



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ

С. А. Миленина

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭЛЕКТРОНИКА И СХЕМОТЕХНИКА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ СПО

Под редакцией Н. К. Миленина

Рекомендовано Учебно–методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

**Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru**

Москва ■ Юрайт ■ 2015

УДК 621.3(075.32)

ББК 31.2я723

М60

Автор:

Миленина Светлана Александровна — кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и электротехники факультета информационных технологий Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА).

Ответственный редактор:

Миленин Николай Кириллович — кандидат технических наук, доцент, почетный радист России.

Рецензенты:

Николаев С. С. — доктор технических наук, профессор Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана;

Одинок В. Ф. — доктор технических наук, профессор Рязанского государственного радиотехнического университета.

Миленина, С. А.

М60 Электротехника, электроника и схемотехника : учебник и практикум для СПО / С. А. Миленина ; под ред. Н. К. Миленина. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 399 с. — Серия : Профессиональное образование.

ISBN 978-5-9916-5244-5

В учебнике рассмотрены основные методы расчета установившихся и переходных процессов в электрических цепях, а также их приложения к наиболее распространенным в инженерной практике электронным схемам, включая различного рода усилители, повторители, генераторы гармонических и релаксационных колебаний, триггеры, пассивные и активные фильтры, стабилизаторы и т.п.

Большое внимание уделено свойствам и характеристикам полупроводниковых элементов: диодов, биполярных и полевых транзисторов, тиристоров, операционных усилителей, приборов с зарядовой связью, простейших логических элементов и универсальных базисов, а также их схемной реализации. Отдельные главы посвящены схемотехнике цифровых устройств, не содержащих памяти, включая АЦП и ЦАП, и цифровых устройств с «памятью». Рассмотрены основные принципы построения программируемых логических устройств и микропроцессоров. Обозначены наиболее перспективные направления развития электронной базы, в том числе на основе СБИС с объемными МОП-транзисторами.

В конце каждой главы учебника содержатся контрольные вопросы и задания. Их цель — направить студента по наиболее рациональному пути при освоении материала учебника.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования инженерно-технического профиля.

УДК 621.3(075.32)

ББК 31.2я723

Оглавление

Предисловие.....	13
------------------	----

Раздел I ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Глава 1. Понятие электрической цепи и ее основные законы.....	17
1.1. Электрическая цепь и ее элементы.....	17
1.2. Пассивные элементы электрической цепи.....	18
1.2.1. Резистор как элемент электрической цепи. Основные соотношения. Установившийся синусоидальный режим в линейном резисторе.....	18
1.2.2. Индуктивность как элемент электрической цепи. Основные соотношения. Особенности стационарного и установившегося синусоидального режимов в индуктивности.....	19
1.2.3. Емкость как элемент электрической цепи. Основные соотношения. Особенности стационарного и установившегося синусоидального режимов в емкости.....	20
1.3. Активные элементы электрической цепи.....	22
1.3.1. Источник электродвижущей силы.....	22
1.3.2. Источник тока.....	23
1.4. Реальный источник и его внешняя характеристика.....	23
1.4.1. Простейшие схемы замещения реального источника.....	25
1.4.2. Понятие внутреннего сопротивления реального источника. Внутренние сопротивления идеальных источников ЭДС и тока.....	25
1.5. Напряжение на участке цепи. Обобщенный закон Ома.....	26
1.6. Топологические элементы электрической цепи.....	27
1.7. Законы Кирхгофа.....	27
1.7.1. Первый закон Кирхгофа.....	28
1.7.2. Второй закон Кирхгофа.....	28
1.7.3. Общий вид системы уравнений Кирхгофа. Классификация задач анализа электрических цепей.....	29
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	30
Глава 2. Методы расчета стационарных режимов в линейных электрических цепях.....	32
2.1. Особенности уравнений Кирхгофа для стационарного режима.....	32
2.2. Метод контурных токов.....	33
2.3. Метод узловых потенциалов.....	34
2.3.1. Общая характеристика метода. Уравнения цепи относительно потенциалов узлов.....	34
2.3.2. Понятие проводимости ветви.....	35
2.3.3. Правила записи системы уравнений относительно узловых потенциалов по виду схемы.....	36
2.4. Понятие входного сопротивления пассивного двухполюсника и его простейшая схема замещения.....	36

2.5. Простейшие схемы замещения активного двухполюсника в стационарном режиме	37
2.5.1. Понятие входного сопротивления активного двухполюсника	37
2.5.2. Теорема об активном двухполюснике (эквивалентном генераторе). Виды простейшей схемы замещения активного двухполюсника	38
2.6. Метод эквивалентного генератора	38
2.7. Методика расчета режима в нелинейной резистивной нагрузке линейного активного двухполюсника	40
2.8. Условие передачи наибольшей мощности от активного двухполюсника к пассивному в стационарном режиме.....	41
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	43
Глава 3. Цепи переменного периодического тока	44
3.1. Основные понятия и характеристики цепей переменного периодического тока.....	44
3.2. Действующее (эффективное) значение переменного тока.....	45
3.2.1. Связь между действующим и мгновенным значениями переменного тока.....	45
3.2.2. Связь между действующим значением синусоидального тока и его амплитудным значением.....	46
3.2.3. Понятия действующих значений напряжения и ЭДС.....	46
3.2.4. Основные измерительные приборы и их учет в расчетных схемах	46
3.3. Условия возникновения и существования синусоидального режима в линейной цепи	47
3.4. Комплексная плоскость и некоторые ее свойства	48
3.5. Изображение синусоидальной функции времени на комплексной плоскости	48
3.5.1. Понятия комплексной амплитуды и комплекса действующего значения	48
3.5.2. Операции дифференцирования и интегрирования синусоидальных функций времени на комплексной плоскости	49
3.5.3. Связь между комплексами тока и напряжения в элементах R, L, C . Понятие комплексного сопротивления	50
3.6. Законы Кирхгофа для комплексов. Порядок расчета установившегося синусоидального режима символическим методом.....	51
3.7. Векторная диаграмма	55
3.8. Расчет периодического несинусоидального режима в линейной цепи.....	56
3.8.1. Идея метода и порядок расчета	56
3.8.2. Действующее значение периодического тока, представленного гармоническим рядом	57
3.9. Трехфазные цепи	58
3.9.1. Понятия трехфазного источника и трехфазной цепи	58
3.9.2. Варианты соединения фазных обмоток трехфазного генератора.....	59
3.9.3. Виды соединения нагрузок трехфазного генератора и основные структурные варианты трехфазной цепи.....	61
3.9.4. Особенности расчета симметричного режима в трехфазной цепи.....	64
Контрольные вопросы и задания.....	65
Глава 4. Энергетические характеристики цепи синусоидального и периодического несинусоидального токов	67
4.1. Мгновенная мощность	67
4.2. Активная мощность	69
4.3. Понятия полной и реактивной мощностей	71

4.4. Единицы измерения мгновенной, активной, полной и реактивной мощностей	72
4.5. Условие передачи наибольшей активной мощности от активного двухполюсника к пассивному в синусоидальном режиме.....	72
4.6. Активная мощность, потребляемая линейным пассивным двухполюсником в периодическом несинусоидальном режиме.....	76
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	77

Глава 5. Пассивный двухполюсник в цепи синусоидального тока. Резонансы ...79

5.1. Простейшие схемы замещения пассивного двухполюсника в синусоидальном режиме.....	79
5.2. Резонансное состояние пассивного двухполюсника.....	81
5.2.1. Резонанс напряжений	81
5.2.2. Резонанс токов.....	83
5.3. Резонанс напряжений в неразветвленном RLC-контуре	84
5.3.1. Основные соотношения при резонансе	84
5.3.2. Понятия характеристического сопротивления и добротности последовательного контура.....	86
5.3.3. Частотная характеристика $I(\omega)$ последовательного контура	86
5.3.4. Полоса пропускания.....	87
5.4. Резонанс токов в параллельном колебательном контуре.....	88
5.4.1. Основные соотношения при резонансе	88
5.4.2. Идеальный параллельный контур (без потерь)	90
5.4.3. Избирательные свойства параллельного колебательного контура.....	92
5.5. Сравнение избирательных свойств последовательного и параллельного колебательных контуров.....	93
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	94

Глава 6. Цепи с взаимной индукцией в установившемся синусоидальном режиме.....95

6.1. Параметры, характеризующие индуктивно связанные катушки	95
6.1.1. Понятие коэффициента взаимной индукции.....	95
6.1.2. Коэффициент связи	97
6.1.3. Понятие одноименных зажимов	98
6.2. Напряжение взаимной индукции	98
6.3. Учет напряжения взаимной индукции в уравнениях по второму закону Кирхгофа.....	99
6.4. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек в синусоидальном режиме.....	102
6.5. Линейный трансформатор в синусоидальном режиме.....	104
6.5.1. Основные уравнения линейного трансформатора при синусоидальном режиме и векторная диаграмма	105
6.5.2. Вносимое сопротивление	106
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	108

Глава 7. Основы теории линейных пассивных четырехполюсников в синусоидальном режиме111

7.1. Основные уравнения линейного пассивного четырехполюсника.....	112
7.2. Расчет коэффициентов основных уравнений линейного пассивного четырехполюсника	114
7.3. Простейшие схемы замещения линейного пассивного четырехполюсника	116
7.4. Понятие комплексного коэффициента передачи линейной системы	117

7.5. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики линейного пассивного четырехполюсника.....	118
7.6. Симметричный четырехполюсник и его характеристические параметры ...	120
7.6.1. Характеристическое сопротивление	120
7.6.2. Постоянная передачи.....	121
7.7. Понятие о частотных электрических фильтрах	122
7.7.1. Пассивные LC -фильтры	123
7.7.2. Пассивные RC -фильтры	124
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	125

Глава 8. Классический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях128

8.1. Законы коммутации	129
8.2. Независимые и зависимые начальные условия	129
8.3. Основные этапы классического метода расчета переходного процесса в линейной цепи.....	130
8.4. Особенности переходного процесса в цепях первого порядка	136
8.4.1. Вид свободной составляющей	136
8.4.2. Понятие постоянной времени.....	136
8.4.3. Приближенная оценка длительности переходного процесса в цепи первого порядка	137
8.5. Переходный процесс в неразветвленном RLC -контуре при подключении его к источнику постоянной ЭДС	137
8.5.1. Особенности характеристического уравнения цепи и его корней. Виды свободной составляющей	137
8.5.2. Аперриодический режим	138
8.5.3. Критический режим	140
8.5.4. Колебательный режим.....	141
8.6. Получение характеристического уравнения по комплексному входному сопротивлению цепи	142
8.7. Особенности переходных процессов в цепях второго порядка.....	144
8.7.1. Виды свободной составляющей	144
8.7.2. Рекомендации по расчету постоянных интегрирования	145
8.7.3. Оценка длительности переходного процесса в цепях второго порядка.....	145
8.8. Дифференцирующие и интегрирующие цепи	146
8.8.1. Дифференцирующее RC -звено.....	146
8.8.2. Интегрирующее RC -звено	147
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	148

Глава 9. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях151

9.1. Прямое и обратное преобразования Лапласа.....	151
9.2. Связь между изображениями тока и напряжения в элементах R, L, C . Их операторные схемы замещения	153
9.3. Законы Кирхгофа для изображений	155
9.4. Порядок расчета переходных процессов операторным методом	155
9.5. Теорема разложения.....	159
9.6. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных пассивных цепях при произвольных (непериодических) воздействиях.....	162
9.6.1. Понятие передаточной функции пассивной цепи $K(p)$ и рекомендации по ее нахождению	162

9.6.2. Основные этапы операторного метода расчета переходных процессов при произвольных внешних воздействиях	165
9.6.3. Рекомендации по определению изображения входного воздействия $X_{вх}(p)$. Применение теоремы запаздывания	165
9.6.4. Изображение ступенчатой функции	165
9.6.5. Изображение экспоненциального импульса длительностью t_n	166
9.7. Связь передаточной функции $K(p)$ и комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$	168
9.8. Сравнение операторного метода расчета переходных процессов с классическим	169
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	169

Глава 10. Принцип наложения и его применение для расчета переходного процесса в цепи линейного пассивного двухполюсника при произвольных воздействиях на его входе

10.1. Постановка задачи и принципы подхода к ее решению	172
10.1.1. Постановка задачи и принципы подхода к ее решению	172
10.2. Ступенчатое представление импульсного входного воздействия	174
10.2.1. Понятие переходной характеристики цепи $h(t)$ (переходной функции)	174
10.2.2. Расчет реакции линейной цепи на ступенчатое воздействие	175
10.3. Применение интеграла Дюамеля при расчете реакции линейной цепи на непрерывное и кусочно-непрерывное воздействия	176
10.3.1. Расчет реакции линейной цепи на непрерывное воздействие	176
10.3.2. Расчет реакции линейной цепи на кусочно-непрерывное воздействие	179
10.4. Импульсная характеристика и ее применение для расчета переходных процессов при сложных воздействиях	180
10.4.1. Функция Дирака (δ -функция)	180
10.4.2. Понятие импульсной характеристики	181
10.4.3. Связь импульсной характеристики $h_\delta(t)$ с переходной функцией $h(t)$	182
10.4.4. Разновидность интеграла Дюамеля, содержащая импульсную характеристику	183
10.4.5. Изображения по Лапласу переходной $h(t)$ и импульсной $h_\delta(t)$ характеристик. Их связь с передаточной функцией $K(p)$	184
10.5. Спектральный метод расчета переходных процессов	185
10.5.1. Вещественная и комплексная формы ряда Фурье для периодической функции времени	185
10.5.2. Спектральное представление непериодического сигнала. Понятие спектральной плотности	186
10.5.3. Понятие амплитудного и фазового спектров сигнала	187
10.5.4. Связь преобразования Фурье с прямым преобразованием Лапласа	187
10.6. Связь между энергией непериодического сигнала и его спектром	190
10.6.1. Понятие энергии импульса	190
10.6.2. Равенство Парсеваля. Спектральная плотность энергии	190
10.6.3. Понятие ширины спектра	192
10.7. Связь между спектрами входного и выходного сигналов для линейной пассивной цепи	192
10.8. Порядок расчета переходных процессов спектральным методом	193
10.9. Сравнение спектрального и операторного методов расчета	195
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	196

Раздел II ЭЛЕКТРОНИКА И СХЕМОТЕХНИКА

Глава 11. Полупроводниковые диоды	201
11.1. Основные свойства p - n -перехода и полупроводникового диода	201
11.2. Выпрямительные диоды	203
11.3. Стабилитроны	204
11.4. Варикапы	208
11.5. Фотодиоды, светодиоды, оптроны	209
11.6. Диоды Шоттки	211
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	<i>212</i>
Глава 12. Биполярные и полевые транзисторы. Тиристоры	214
12.1. Принцип устройства и виды биполярных транзисторов	214
12.2. Вольт-амперные характеристики биполярного транзистора при включении по схеме с общим эмиттером	215
12.3. Полевые транзисторы. Общий принцип действия	217
12.4. Полевые транзисторы с управляющим p - n -переходом и их вольт-амперные характеристики	217
12.4.1. Семейство выходных характеристик	218
12.4.2. Стокозатворная (передаточная) характеристика	219
12.5. Полевые транзисторы с изолированным затвором	220
12.5.1. Полевые транзисторы со встроенным каналом	220
12.5.2. Полевые транзисторы с индуцированным каналом	221
12.6. Составные транзисторы. Схема Дарлингтона	222
12.7. Тиристоры. Структурные особенности и основные виды	223
12.7.1. Принцип действия динистора и его характеристики	223
12.7.2. Тринистор	225
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	<i>226</i>
Глава 13. Электронные усилители	228
13.1. Главные рабочие параметры и характеристики усилителя	228
13.1.1. Понятия рабочей точки и ее окрестности	229
13.1.2. Понятие коэффициента усиления	229
13.1.3. Понятия входного и выходного сопротивлений усилителя	230
13.1.4. Частотная характеристика усилителя	230
13.2. Усилитель напряжения низкой частоты на биполярном транзисторе. Методика расчета основных параметров	231
13.2.1. Постановка задачи	231
13.2.2. Расчет режима в рабочей точке	233
13.2.3. Расчет коэффициента усиления по напряжению	234
13.2.4. Расчет входного и выходного сопротивлений усилителя	235
13.2.5. Способы задания рабочей точки (смещения)	235
13.2.6. Режимы «А», «В», «АВ»	237
13.2.7. Разделительные цепи	238
13.3. Повторитель напряжения на биполярном транзисторе – эмиттерный повторитель (схема с общим коллектором)	238
13.3.1. Коэффициент передачи по напряжению эмиттерного повторителя	239
13.3.2. Входное и выходное сопротивления повторителя	240
13.4. Усилители на полевых транзисторах	241
13.4.1. Методика расчета основных параметров усилителя низкой частоты на полевом транзисторе с управляющим p - n -переходом	241
13.4.2. Особенности задания рабочей точки	242

13.4.3. Определение положения рабочей точки на стоконатворной характеристике	243
13.4.4. Положение рабочей точки на семействе выходных характеристик	243
13.4.5. Расчет коэффициента усиления	244
13.4.6. Выходное сопротивление	244
13.5. Повторитель напряжения на полевом транзисторе(истоковый повторитель). Методика расчета основных параметров	245
13.5.1. Определение рабочей точки на стоконатворной характеристике	246
13.5.2. Коэффициент передачи по напряжению	246
13.5.3. Выходное сопротивление	246
13.6. Усилители с обратной связью	247
13.6.1. Способы получения сигнала обратной связи	247
13.6.2. Способы введения сигнала обратной связи	248
13.6.3. Усилитель, охваченный последовательной отрицательной обратной связью по напряжению	248
13.6.4. Усилитель с большим коэффициентом усиления, охваченный отрицательной обратной связью по напряжению	249
13.6.5. Достоинства отрицательной обратной связи	249
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	249
Глава 14. Дифференциальный и операционный усилители	251
14.1. Дифференциальный усилитель. Методика расчета основных параметров	251
14.1.1. Структурные особенности схемы дифференциального усилителя	251
14.1.2. Расчет базовой цепи в режиме покоя	252
14.1.3. Расчет коллекторной цепи в режиме покоя	253
14.1.4. Синфазная и дифференциальная составляющие входного сигнала	253
14.1.5. Реакция дифференциального усилителя на синфазное воздействие	254
14.1.6. Реакция дифференциального усилителя на дифференциальное воздействие	254
14.1.7. Коэффициент усиления для дифференциальной составляющей входного сигнала	255
14.1.8. Входное и выходное сопротивления для дифференциальной составляющей входного сигнала	255
14.1.9. Инвертирующий и неинвертирующий входы дифференциального усилителя	256
14.2. Основные свойства операционного усилителя	256
14.2.1. Условное обозначение операционного усилителя	256
14.2.2. Особенности передаточной характеристики реального операционного усилителя	257
14.2.3. Взаимодействие операционного усилителя с внешней цепью	258
14.3. Методы расчета цепей, содержащих операционный усилитель	259
14.4. Расчет по мгновенным значениям	260
14.4.1. Инвертирующий и неинвертирующий источники напряжения, управляемые напряжением	260
14.4.2. Повторитель напряжения	261
14.4.3. Схема дифференцирования	261
14.4.4. Схема интегрирования	262
14.5. Операторный метод расчета переходного процесса в цепи с операционным усилителем	263
14.6. Применение символического метода	264
14.7. Активные фильтры	266
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	267

Глава 15. Электронные генераторы. Автогенераторы гармонических колебаний	269
15.1. Электронные генераторы	269
15.1.1. Классификация электронных генераторов.....	269
15.2. Структура автогенератора гармонических колебаний	270
15.3. Условие существования установившихся колебаний	270
15.4. LC-автогенератор	271
15.4.1. Процесс установления колебаний	271
15.4.2. Расчет амплитуды автоколебаний	272
15.5. RC-автогенератор	274
15.5.1. Основное требование к цепи обратной связи	274
15.5.2. Принцип работы RC-автогенератора	275
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	277
Глава 16. Генераторы релаксационных колебаний	278
16.1. Генератор прямоугольных импульсов на операционном усилителе – мультивибратор	278
16.1.1. Структурные особенности схемы мультивибратора.....	279
16.1.2. Принцип работы	280
16.2. Ждущий мультивибратор (одновибратор).....	282
16.3. Генератор пилообразного напряжения на операционном усилителе	283
16.4. Мультивибратор на биполярных транзисторах.....	285
16.4.1. Главные особенности схемы мультивибратора.....	286
16.4.2. Неустойчивость стационарного режима.....	286
16.4.3. Квазиустойчивый режим работы мультивибратора	288
16.5. Триггер.....	292
16.5.1. Статический режим.....	293
16.5.2. Режим «опрокидывания»	293
16.5.3. Простейшая запоминающая ячейка	294
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	294
Глава 17. Источники вторичного электропитания	296
17.1. Источники первичного электропитания	296
17.2. Источники вторичного электропитания, их структура и назначение основных блоков	297
17.3. Выпрямители	298
17.3.1. Однофазные выпрямители	298
17.3.2. Трехфазный выпрямитель	300
17.3.3. Коэффициент пульсации	300
17.4. Сглаживающие фильтры	301
17.4.1. Пассивные сглаживающие фильтры.....	302
17.4.2. Активный сглаживающий фильтр на биполярном транзисторе	304
17.5. Стабилизаторы напряжения	306
17.5.1. Компенсационный стабилизатор напряжения линейного вида	306
17.5.2. Импульсный стабилизатор напряжения	308
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	311
Глава 18. Логические основы цифровых электронных устройств	313
18.1. Цифровое устройство и его таблица истинности	313
18.2. Алгебраическая запись логической функции, выполняемой цифровым устройством	314
18.2.1. Простейшие логические операции и их алгебраическая запись.....	314
18.2.2. Основные законы и теоремы алгебры логики	315
18.2.3. Условное изображение устройств, реализующих простейшие логические действия, и их таблицы истинности	316

18.3. Две канонические формы алгебраической записи логической функции.....	317
18.3.1. Методика получения СДНФ.....	317
18.3.2. Методика получения СКНФ.....	317
18.4. Минимизация логических функций.....	319
18.4.1. Постановка задачи. Способы минимизации.....	319
18.4.2. Минимизация по формулам алгебры логики.....	320
18.5. Универсальные базисы «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ».....	320
18.5.1. Операции «ИЛИ-НЕ», «И-НЕ».....	321
18.5.2. Универсальность функций «ИЛИ-НЕ» и «И-НЕ».....	321
18.6. Методика записи и структурной реализации логических функций в универсальных базисах «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ».....	322
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	325
Глава 19. Схемная реализация логических функций	327
19.1. Ключевые схемы. Позитивная и негативная логики.....	327
19.2. Инвертор на биполярном транзисторе.....	328
19.3. Транзистор Шоттки.....	330
19.4. Особенности схемы простейшего инвертора на полевом транзисторе.....	331
19.5. Инвертор на комплементарных полевых транзисторах.....	331
19.6. Компараторы.....	333
19.7. Схемная реализация универсальных базисов «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ».....	334
19.8. Диодно-транзисторная логика.....	335
19.9. Транзисторно-транзисторная логика.....	337
19.10. Универсальные базисы на КМОП-транзисторах (КМОП-логика).....	339
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	341
Глава 20. Схемотехника цифровых устройств, не содержащих элементов памяти	343
20.1. Аналого-цифровые преобразователи.....	343
20.1.1. Дискретизация во времени.....	344
20.1.2. Квантование по уровню.....	344
20.1.3. Кодирование.....	345
20.1.4. Способы распознавания уровня преобразуемого сигнала внутри интервала дискретизации.....	345
20.1.5. Аналого-цифровые преобразователи последовательного счета.....	346
20.1.6. Аналого-цифровые преобразователи параллельного типа.....	348
20.2. Цифро-аналоговые преобразователи.....	348
20.2.1. Основные соотношения.....	348
20.2.2. Структурные составляющие цифро-аналогового преобразователя.....	349
20.2.3. Цифро-аналоговый преобразователь с двоично-взвешенной резистивной матрицей.....	350
20.2.4. Цифро-аналоговые преобразователи с матрицей $R - 2R$	351
20.3. Дешифраторы.....	352
20.4. Шифраторы.....	354
20.5. Мультиплексоры.....	356
20.6. Демультимплексоры.....	357
20.7. Одноразрядные двоичные сумматоры.....	358
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	361
Глава 21. Цифровые устройства с памятью	363
21.1. Триггеры.....	363
21.1.1. Асинхронные RS-триггеры.....	364
21.1.2. Синхронный RS-триггер.....	366

21.1.3. <i>D</i> -триггер	367
21.1.4. <i>T</i> -триггер (счетный) на основе <i>D</i> -триггера	368
21.1.5. Триггеры типа <i>M-S</i>	368
21.2. Счетчики и регистры	371
21.2.1. Счетчики	371
21.2.2. Регистры сдвига.....	373
21.3. Оперативные запоминающие устройства	375
21.3.1. Статические оперативные запоминающие устройства	375
21.3.2. Динамические оперативные запоминающие устройства	377
21.4. Постоянные запоминающие устройства.....	379
21.5. Программируемые логические устройства.....	380
21.5.1. Программируемые логические матрицы.....	380
21.5.2. Программируемые логические интегральные схемы и устройства	384
21.6. Микропроцессоры.....	386
21.7. Перспективные направления развития элементной базы сверхбольших интегральных схем.....	388
21.7.1. Повышение степени интеграции и снижение энергопотребления сверхбольших интегральных схем	388
21.7.2. Фотоэлектронные преобразователи «свет — сигнал» на основе приборов с зарядовой связью.....	390
21.7.3. Фотодиодные матрицы с координатной адресацией	393
21.7.4. Матричные преобразователи «сигнал — свет».....	395
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	395

Заключение	397
Литература	398

Предисловие

В основу учебника положены материалы курсов лекций, читаемых автором в МГТУ «МИРЭА» по дисциплинам «Теоретические основы электротехники», «Электротехника и электроника» и «Электротехника, электроника и схемотехника».

Учебник состоит из двух разделов.

Первый раздел («Электротехника») посвящен основам теоретической электротехники. В нем рассмотрены главные методы расчета установившихся и переходных процессов в электрических цепях. Теоретический материал сопровождается подробно решенными примерами.

Второй раздел («Электроника и схемотехника») подается с позиций теории линейных и нелинейных электрических цепей как продолжение и воплощение ее методов. Теоретическое изложение иллюстрируется практическими примерами по расчету наиболее важных для инженерной практики электронных схем и схемотехнических устройств, содержащих полупроводниковые диоды, стабилитроны, биполярные и полевые транзисторы. Рассмотрены такие схемотехнические устройства, как электронные и операционные усилители, электронные генераторы, триггеры, источники вторичного электропитания, базовые логические элементы, АЦП, ЦАП, ОЗУ, ПЗУ и другие функциональные узлы цифровой техники. Излагаются основные принципы построения программируемых пользователем логических матриц и устройств, в том числе СБИС программируемых логических интегральных схем и микропроцессоров.

Процесс преподавания курса «Электротехника, электроника и схемотехника» включает три вида аудиторных занятий: лекции, семинары и лабораторные работы. Именно на семинарах и в лаборатории, а также при выполнении специально разработанного комплекса домашних расчетных заданий, охватывающих важнейшие разделы курса, студентом приобретаются профессиональные навыки и умения. Причем лабораторные исследования могут проводиться не только на стендах с реальными элементами, но и на компьютерных моделях.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать

- основные законы и методы расчета и анализа электрических цепей в установившихся и переходных режимах;
- основные свойства и характеристики различных полупроводниковых элементов (приборов) и типовых схем с их использованием;
- принципы работы и параметры наиболее известных аналоговых и цифровых схемотехнических устройств;

уметь

- рассчитывать рабочие параметры аналоговых и цифровых устройств;

- ставить и решать схемотехнические задачи, связанные с выбором элементной базы при заданных требованиях к параметрам аналоговых и цифровых устройств (быстродействие, потребляемая мощность, надежность);

владеть

- практическими навыками применения основных законов электротехники и методов расчета электрических цепей к решению поставленных задач по проектированию схемотехнических устройств;

- методикой составления технических требований к схемотехническим устройствам.

Автор выражает глубочайшую благодарность почетному радисту России, кандидату технических наук, доценту Николаю Кирилловичу Миленину, взявшему на себя не только нелегкий труд научного редактора рукописи учебника, но и всю предварительную работу при подготовке ее к изданию.

Автор благодарит рецензентов доктора технических наук, профессора МГТУ им. Н. Э. Баумана Сергея Сергеевича Николаева, доктора технических наук, профессора РГРУ Валерия Федоровича Одинокова, а также технического редактора Павла Александровича Макарова за внимательное прочтение рукописи, ценные советы и замечания.

Раздел I

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА



Глава 1

ПОНЯТИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- строгое определение и основные свойства пассивных и активных элементов расчетной модели реального электротехнического устройства;

- законы Кирхгофа;

уметь

- записывать в общем виде полную систему независимых уравнений Кирхгофа для заданной электрической схемы;

владеть

- навыками выбора правильной методики решения составленных уравнений в зависимости от вида поставленной задачи (расчет стационарного, синусоидально-го режимов и т.п.).

1.1. Электрическая цепь и ее элементы

Электрическая цепь — это расчетная модель реального электротехнического устройства. Она строится из элементов.

Элемент электрической цепи — идеализированный участок, где генерируется, запасается или преобразуется в другую форму электрическая энергия. Различают элементы пассивные и активные.

Элементы, в которых электрическая энергия запасается или необратимо преобразуется в другую форму, называются *пассивными*. Используемые в теории цепей пассивные элементы принято делить на три идеализированные группы: резисторы (сопротивления), индуктивности, емкости. Следует иметь в виду, что названные термины могут применяться для обозначения как самого пассивного элемента с определенными свойствами, так и величины параметра, характеризующего этот элемент.

Реальные элементы (катушки индуктивности, конденсаторы, потенциометры, реостаты и т.п.) проявляют в той или иной степени свойства, присущие идеальным пассивным элементам всех трех видов (резистивные, индуктивные, емкостные), что учитывается при построении их расчетных моделей.

Активные элементы являются генераторами электрической энергии. При построении электрических схем пользуются двумя видами идеальных активных элементов: источниками электродвижущей силы (ЭДС) и источниками тока.

Таким образом, цепная расчетная модель строится из пяти основных элементов: резистор, индуктивность, емкость, идеальный источник ЭДС, идеальный источник тока.

1.2. Пассивные элементы электрической цепи

1.2.1. Резистор как элемент электрической цепи. Основные соотношения. Установившийся синусоидальный режим в линейном резисторе

Резистор (рис. 1.1) — элемент, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую (иногда — в механическую или химическую). Резистор — всегда потребитель энергии.

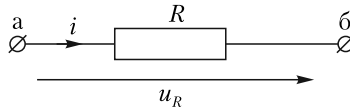


Рис. 1.1. Резистор — элемент, необратимо преобразующий электрическую энергию в тепловую

При выбранных на рис. 1.1 положительных направлениях ток и напряжение на резисторе связаны соотношением

$$u_R = u_{a\delta} = \varphi_a - \varphi_\delta = iR.$$

Здесь $\varphi_a, \varphi_\delta$ — потенциалы точек «а» и «б»; R — сопротивление резистора.

Если величина $R = \text{const}$ (не зависит от протекающего тока либо приложенного напряжения), то резистор называется *линейным*. Для такого резистора при протекании через него переменного тока $i(t)$ напряжение по форме повторяет ток:

$$u_R(t) = Ri(t). \quad (1.1)$$

Например, когда ток в резисторе постоянен, напряжение также постоянно.

Рассмотрим важный для практики случай, когда ток в резисторе изменяется по периодическому закону (рис. 1.2)

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где I_m — амплитуда; $\omega t + \varphi$ — фаза; φ — начальная фаза (на рис. 1.2 $\varphi = 0$); $\omega = 2\pi/T$ — угловая частота; T — период синусоиды. Из формулы (1.1) следует, что

$$u_R = Ri(t) = RI_m \sin(\omega t + \varphi) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi).$$

Вывод. В установившемся синусоидальном режиме напряжение и ток в резисторе по фазе совпадают (одновременно проходят через ноль, одновременно достигают максимума), как показано на рис. 1.2. Амплитудные значения напряжения и тока в резисторе связаны соотношением $U_{mR} = RI_m$, которое можно считать законом Ома для амплитуд.

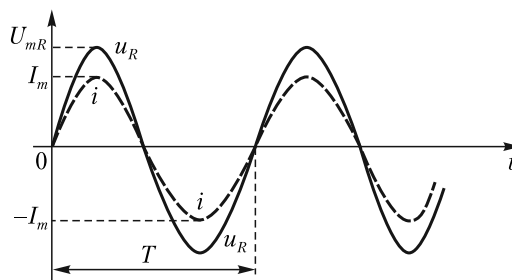


Рис. 1.2. В синусоидальном режиме напряжение и ток в резисторе совпадают по фазе

1.2.2. Индуктивность как элемент электрической цепи. Основные соотношения. Особенности стационарного и установившегося синусоидального режимов в индуктивности

Индуктивность (рис. 1.3) — элемент, запасаящий электрическую энергию в магнитном поле. Запасенная энергия при соответствующих условиях может быть полностью возвращена источнику. Идеальная индуктивность — только накопитель энергии, свойствами необратимого потребления энергии не обладает.

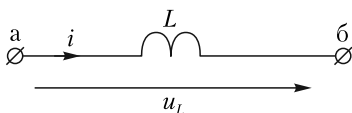


Рис. 1.3. Индуктивность — элемент, запасаящий энергию в магнитном поле

При выбранных на рис. 1.3 положительных направлениях напряжение и ток в индуктивности связаны соотношением

$$u_L = \varphi_a - \varphi_b = L \frac{di(t)}{dt},$$

т.е. разность потенциалов на индуктивном элементе пропорциональна скорости изменения тока во времени. Величина индуктивности L выступает как коэффициент пропорциональности между u_L и di/dt . Если $L = \text{const}$, т.е. не зависит от протекающего тока, индуктивность называется линейной.

Разность потенциалов на индуктивности возникает только в случае изменения тока во времени (когда $\frac{di}{dt} \neq 0$). Поэтому в стационарном режиме под действием постоянных источников, когда $i(t) = \text{const}$, индуктивность проявляет себя как проводник нулевого сопротивления, называемый короткозамкнутой перемычкой — к.з. (рис. 1.4).

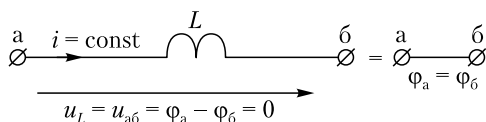


Рис. 1.4. В стационарном режиме ($i = \text{const}$) индуктивность проявляет себя как короткозамкнутая перемычка

Если в индуктивности протекает синусоидальный ток $i(t) = I_m \sin \omega t$, напряжение на индуктивности равно

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{mL} \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Вывод. Напряжение на индуктивности — гармоническая функция той же частоты, что и ток. Но фаза синусоидального напряжения на индуктивности превышает фазу тока на 90° . Кривая напряжения проходит через ноль на четверть периода раньше (рис. 1.5, а).

Амплитуды напряжения и тока в индуктивности связаны соотношением

$$U_{mL} = \omega L I_m,$$

его можно трактовать как закон Ома, причем роль сопротивления выполняет величина $X_L = \omega L$, называемая индуктивным сопротивлением. Индук-

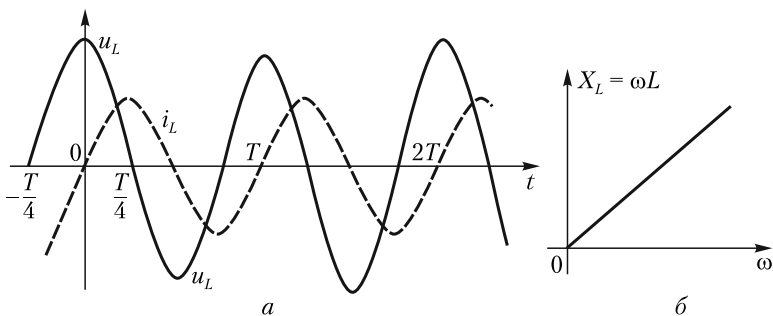


Рис. 1.5. Синусоидальный режим в индуктивности:

a — в синусоидальном режиме напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на 90° ;
б — индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$ пропорционально частоте ω

тивное сопротивление зависит от частоты (рис. 1.5, *б*), а именно: при $\omega \rightarrow 0$ $X_L \rightarrow 0$, а при $\omega \rightarrow \infty$ $X_L \rightarrow \infty$. Поэтому в инженерной практике при качественном анализе схем на низких частотах ($\omega \rightarrow 0$) индуктивности закорачивают, а на высоких частотах ($\omega \rightarrow \infty$) — обрывают.

Реальная катушка обладает, наряду с индуктивными свойствами, резистивными потерями. Поэтому простейшая схема замещения реальной катушки содержит два идеальных элемента: индуктивность и резистор. Возможны как последовательная, так и параллельная схемы замещения катушки. На рис. 1.6 изображен последовательный вариант, включающий индуктивность L_ε и резистор R_ε .

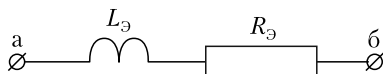


Рис. 1.6. Простейшая схема замещения реальной катушки индуктивности

При синусоидальном режиме для характеристики соотношения между индуктивным ωL_ε и резистивным R_ε сопротивлениями катушки вводится понятие добротности

$$Q_L = \frac{\omega L_\varepsilon}{R_\varepsilon}.$$

Согласно определению Q_L — безразмерная величина, которая зависит от частоты. Для применяемых в инженерной практике высокодобротных катушек на частотах порядка $10 \cdot 10^6$ Гц (десятки мегагерц) добротность достигает нескольких сотен.

1.2.3. Емкость как элемент электрической цепи. Основные соотношения. Особенности стационарного и установившегося синусоидального режимов в емкости

Емкость (рис. 1.7) — элемент электрической цепи, запасующий энергию в электрическом поле. Идеальная емкость только накапливает энергию и при определенных условиях может вернуть ее полностью.

При положительных направлениях, заданных на рис. 1.7, напряжение и ток в емкости связаны соотношением

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt,$$

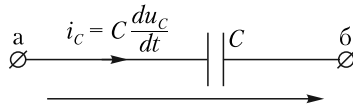


Рис. 1.7. Емкость — элемент, запасующий энергию в электрическом поле.
Ток в емкости протекает только при изменяющемся напряжении
(когда $du_c/dt \neq 0$)

где C — величина емкости (для линейного элемента $C = \text{const}$). Продифференцировав обе части последнего уравнения

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c(t),$$

получим выражение для тока в емкости через напряжение

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt}.$$

Согласно последнему уравнению ток через конденсатор протекает только в случае переменного напряжения на конденсаторе, когда $du_c/dt \neq 0$.

Под действием постоянных источников устанавливается стационарный режим, когда токи в ветвях и напряжения на участках во времени неизменны. В этих условиях токи через конденсаторы не протекают, т.е.

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = 0,$$

что равносильно обрыву соответствующей ветви (рис. 1.8).

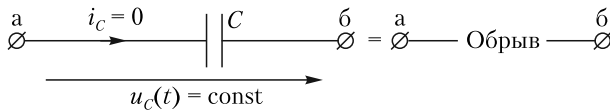


Рис. 1.8. В стационарном режиме ($u_c = \text{const}$) идеальная емкость проявляет себя как обрыв ветви

Если к обкладкам конденсатора емкостью C приложено переменное напряжение

$$u_c(t) = U_{mC} \sin \omega t,$$

в его цепи протекает ток

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = \omega C U_{mC} \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + 90^\circ),$$

где $I_m = \omega C U_{mC}$.

Вывод. Таким образом, в синусоидальном режиме напряжение и ток в емкости — гармоники одной частоты, отличающиеся по фазе. Фаза тока в емкости превышает фазу напряжения на 90° . Это соотношение отражено на рис. 1.9, а.

Амплитуды напряжения и тока в емкости связаны соотношением

$$U_{mC} = I_m / (\omega C),$$

которое также можно трактовать как закон Ома, роль сопротивления выполняет величина $X_C = 1/(\omega C)$, называемая емкостным сопротивлением. Зависимость емкостного сопротивления от частоты представлена на рис. 1.9, б, согласно которому при $\omega \rightarrow 0$ $X_C \rightarrow \infty$, при $\omega \rightarrow \infty$ $X_C \rightarrow 0$.

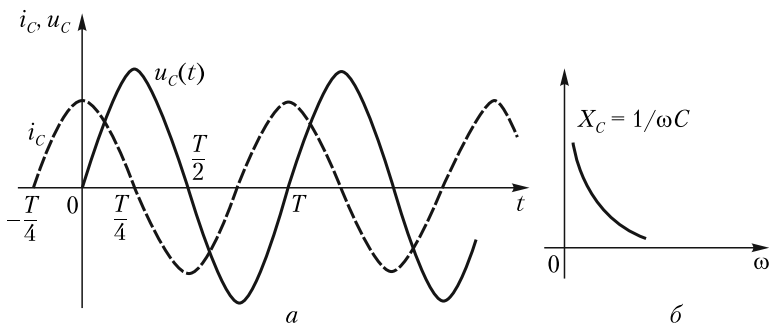


Рис. 1.9. Синусоидальный режим в емкости:

a — в синусоидальном режиме напряжение на емкости отстает по фазе от тока на 90° ; *б* — емкостное сопротивление $X_c = 1/(\omega C)$ обратно пропорционально частоте

Следовательно, при качественном анализе схем на низких частотах конденсаторы обрывают, а на высоких частотах — их закорачивают. Реальный конденсатор проявляет не только емкостные свойства, но и резистивные (главным образом по причине несовершенства изоляции между обкладками).

На рис. 1.10 представлена простейшая параллельная схема замещения конденсатора. Она содержит емкость C_ε и резистор R_ε .

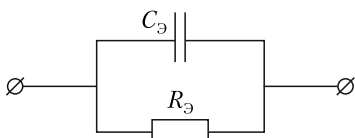


Рис. 1.10. Простейшая схема замещения конденсатора

В синусоидальном режиме соотношение между проводимостями эквивалентной емкости ωC_ε и резистивного элемента $g_\varepsilon = 1/R_\varepsilon$ характеризуется добротностью конденсатора

$$Q_c = \frac{\omega C_\varepsilon}{1/R_\varepsilon} = \omega C_\varepsilon R_\varepsilon.$$

Добротность реальных конденсаторов по определению является величиной безразмерной и на высоких частотах может достигать нескольких тысяч.

1.3. Активные элементы электрической цепи

В теории цепей вводится понятие двух видов активных элементов, наделенных идеальными свойствами. Это источники ЭДС и источники тока (на рис. 1.11, *a*, *б* они изображены в совокупности с внешней цепью).

1.3.1. Источник электродвижущей силы

Источник ЭДС (рис. 1.11, *a*) обеспечивает на своих зажимах напряжение (разность потенциалов), не зависящее от величины и направления протекающего через него тока. Для рис. 1.11, *a*

$$u_{a6} = \varphi_a - \varphi_6 = E.$$

Эту величину будем называть интенсивностью источника ЭДС. Будучи подключенным к внешней цепи, идеальный источник ЭДС «навязывает»

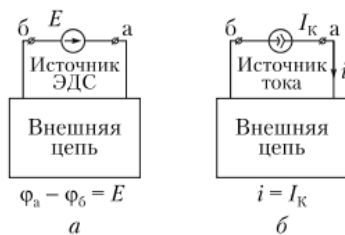


Рис. 1.11. Активные элементы электрической цепи:

a — источник ЭДС; обеспечивает на своих зажимах заданную разность потенциалов; *б* — источник тока; подает во внешнюю цепь ток заданной величины и направления

ей свои условия. Поэтому для внешней цепи (см. рис. 1.11, *a*) должны принять $\varphi_a - \varphi_b = E$.

Случай $E \rightarrow 0$: если интенсивность источника ЭДС падает до нуля, то для его внешней цепи это равносильно равенству потенциалов зажимов «*a*» и «*б*» ($\varphi_a = \varphi_b$), что соответствует режиму короткого замыкания — к.з. (рис. 1.12).

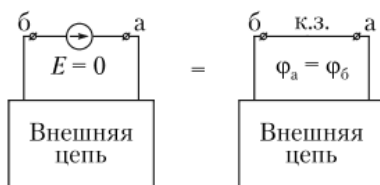


Рис. 1.12. Если интенсивность идеального источника ЭДС падает до нуля, он проявляет себя как короткозамкнутая перемычка

1.3.2. Источник тока

Источник тока (см. рис. 1.11, *б*) подает во внешнюю цепь ток $i = I_K$ в направлении, указанном стрелками, не зависящий от разности потенциалов на его зажимах. Величину I_K будем называть **интенсивностью источника тока**.

Таким образом, идеальный источник тока задает ток через все элементы, включенные с ним последовательно.

Случай $I_K \rightarrow 0$: если интенсивность источника тока падает до нуля, для внешней цепи это равносильно обрыву соответствующей ветви, так как $i = I_K = 0$ (рис. 1.13).

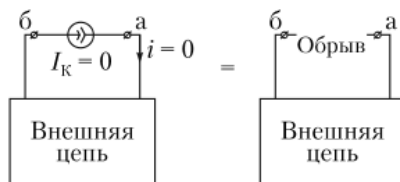


Рис. 1.13. Если интенсивность идеального источника тока падает до нуля, это равносильно обрыву его ветви

1.4. Реальный источник и его внешняя характеристика

На рис. 1.14 изображен реальный источник, нагруженный на переменное сопротивление R_n (сопротивление нагрузки).

Зависимость тока, отдаваемого источником во внешнюю цепь, от напряжения на его зажимах называется **внешней характеристикой источника**.

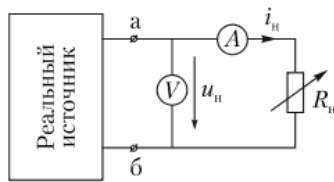


Рис. 1.14. Схема опытного определения внешней характеристики реального источника электрической энергии

Она может быть получена экспериментально по показаниям приборов амперметра и вольтметра при изменении сопротивления R_n (см. рис. 1.14).

Наиболее типичный вид внешней характеристики реального источника представлен на рис. 1.15 в двух вариантах: нелинейный (кривая 1) и линейный (прямая 2). Точки A и B пересечения внешней характеристики с осями координат соответствуют двум предельным значениям сопротивления нагрузки.

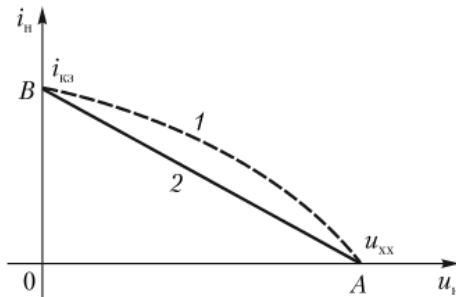


Рис. 1.15. Типичные виды внешней характеристики реального источника:
1 – нелинейная внешняя характеристика; 2 – линейная внешняя характеристика

Точка A ($i_n = 0$) получена при $R_n = \infty$, т.е. при разомкнутых зажимах «а», «б» (режим холостого хода источника). Отрезок OA определяет напряжение холостого хода u_{xx} — напряжение на разомкнутых зажимах источника.

Точка B ($u_n = 0$) получена при $R_n = 0$, т.е. в режиме короткого замыкания зажимов «а», «б». Ток, отдаваемый при этом источником, называется **ТОКОМ КОРотКОГО ЗАМЫКАНИЯ**, обозначается $i_{кз}$ и на рис. 1.15 определяется отрезком OB .

Когда внешняя характеристика источника линейна (прямая 2 на рис. 1.15), она может быть получена по результатам двух опытов — холостого хода (рис. 1.16, а) и короткого замыкания (рис. 1.16, б). Вольтметр и амперметр на рис. 1.16 предполагаются идеальными.

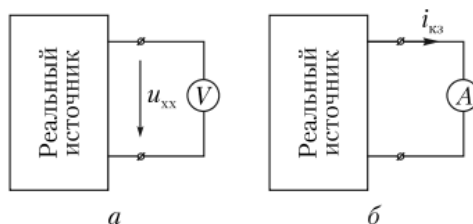


Рис. 1.16. Опыты холостого хода (а) и короткого замыкания внешних зажимов (б) реального источника

1.4.1. Простейшие схемы замещения реального источника

Вид внешней характеристики реального источника свидетельствует о том, что его свойства отличны от свойств идеальных источников ЭДС и тока. Реальный источник лишь при некоторых условиях может приближаться по своим свойствам к идеальному (либо источнику ЭДС, либо источнику тока).

В общем случае неидеальность реального источника учитывается при построении его расчетной модели (эквивалентной схемы замещения). Покажем, что активные двухполюсники, изображенные на рис. 1.17, а, б, обладают внешними характеристиками такого же вида, что и прямая 2 на рис. 1.15 (линейный случай).

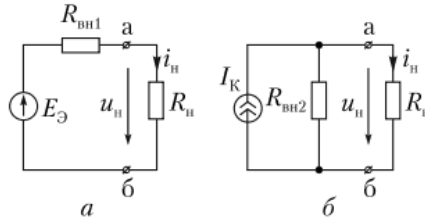


Рис. 1.17. Простейшие эквивалентные схемы реального источника:

а — последовательная; б — параллельная

Действительно, аналитические выражения внешних характеристик $i_н$ ($u_н$) для схем на рис. 1.17 определяются уравнениями:

- $u_н = E_Э - i_н R_{вн1}$ (схема на рис. 1.17, а);
- $i_н = I_{КЭ} - u_н / R_{вн2}$ (схема на рис. 1.17, б).

Соответствующие графики совпадают с прямой 2 на рис. 1.15 при условии выполнения следующих равенств:

$$E_Э = u_{xx}; \quad I_{КЭ} = i_{кз}; \quad R_{вн1} = R_{вн2} = u_{xx}/i_{кз}.$$

Поэтому схемы, изображенные на рис. 1.17, а, б, используют как простейшие расчетные модели (схемы замещения) реального источника. Напомним, что величины u_{xx} и $i_{кз}$ — физические характеристики реального источника: напряжение на разомкнутых внешних зажимах источника и ток через переключку, замыкающую накоротко внешние зажимы (см. рис. 1.15).

Приведенная выше система трех равенств позволяет (при необходимости) проводить переход от последовательной схемы замещения (см. рис. 1.17, а) к параллельной (см. рис. 1.17, б) и наоборот.

1.4.2. Понятие внутреннего сопротивления реального источника.

Внутренние сопротивления идеальных источников ЭДС и тока

Если интенсивность активного элемента в схеме замещения реального источника (см. рис. 1.17, а, б) падает до нуля, двухполюсник начинает проявлять себя как пассивный элемент — резистор ($R_{вн1}$ либо $R_{вн2}$). Сопротивление этого резистора принято называть *внутренним сопротивлением источника*.

Очевидно, для источника с линейной внешней характеристикой (прямая 2 на рис. 1.15)

$$R_{вн} = u_{xx}/i_{кз} = R_{вн1} = R_{вн2}.$$

Таким образом, понятие внутреннего сопротивления источника полностью вытекает из правомерности одного из вариантов схемы замещения реального источника (последовательного или параллельного). Поэтому по отношению к внешней характеристике источника оно является вторичным.

В схеме на рис. 1.17, *а* примем $R_{вн1} = 0$, приходим к идеальному источнику ЭДС. В схеме на рис. 1.17, *б* принимаем $R_{вн2} = \infty$, получаем идеальный источник тока. В изложенном смысле можно считать, что:

- $R_{внЭ} = 0$ — внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю (рис. 1.18, *а*);
- $R_{внI} = \infty$ — внутреннее сопротивление идеального источника тока равно бесконечности (рис. 1.18, *б*).



Рис. 1.18. Внутренние сопротивления идеальных источников ЭДС и тока:
а — $R_{внЭ} = 0$; *б* — $R_{внI} = \infty$

1.5. Напряжение на участке цепи. Обобщенный закон Ома

На рис. 1.19 прямоугольником изображена произвольная цепь, включающая в себя пассивные и активные элементы. При помощи зажимов «а», «б» она может быть подключена к другой цепи с двумя зажимами.



Рис. 1.19. Напряжение на участке цепи

Условимся разность потенциалов $u_{аб} = \varphi_a - \varphi_b$ на схеме обозначать стрелкой, направленной от точки «а» к точке «б» (рис. 1.20). Стрелке противоположного направления будет соответствовать разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_a$, обозначаемая как $u_{ба}$. Таким образом, $u_{аб} = -u_{ба}$ (см. рис. 1.19).

На рис. 1.20 в цепи произвольной конфигурации выделена ветвь «аб», содержащая последовательно включенные резистор R и идеальный источник ЭДС E . Остальная часть схемы рассматривается как внешняя по отношению к ней цепь. Выразим ток ветви «аб» через напряжение $u_{аб} = \varphi_a - \varphi_b$, а также величины R и E .

Точка m разбивает ветвь «аб» (см. рис. 1.20) на два участка: « am » — пассивный; « mb » — активный. Для пассивного участка « am » по закону Ома

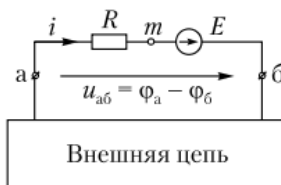


Рис. 1.20. Ток i в ветви с ЭДС и резистором R

$i = \frac{\Phi_a - \Phi_m}{R}$, для активного участка «тб» $E = \Phi_6 - \Phi_m$, или $\Phi_m = \Phi_6 - E$. С учетом последнего получаем

$$i = \frac{\Phi_a - \Phi_6 + E}{R} = \frac{u_{a6} + E}{R}. \quad (1.2)$$

Выражение (1.2) принято называть **обобщенным законом Ома**. В отличие от традиционного закона Ома числитель обобщенного закона Ома содержит в общем случае алгебраическую сумму напряжения на участке u_{a6} и ЭДС E . Причем эти слагаемые учитываются с положительными знаками, если их направления совпадают с положительным направлением тока i .

1.6. Топологические элементы электрической цепи

К топологическим элементам относятся ветви, узлы, контуры.

Ветвь — участок, содержащий один или несколько последовательно включенных элементов (через все элементы ветви течет один и тот же ток).

Узел — место соединения трех и большего числа ветвей.

Контур — замкнутый путь, проходящий по одной или нескольким ветвям. Ни один элемент при обходе контура не должен встречаться дважды.

Независимые контуры — это понятие относится к совокупности контуров. Каждый следующий контур независим по отношению к ранее выбранному, если в него входит хотя бы одна новая ветвь. Так, в цепи, показанной на рис. 1.21 шесть ветвей, четыре узла и три независимых контура.

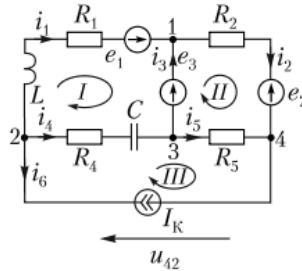


Рис. 1.21. Электрическая цепь с четырьмя узлами ($Y = 4$), шестью ветвями ($B = 6$) и тремя независимыми контурами

Пусть B — число ветвей схемы, Y — число узлов. Можно показать [4, 5], что число независимых контуров $n = B - (Y - 1)$.

1.7. Законы Кирхгофа

Главные законы теории электрических цепей, законы Кирхгофа, можно получить как следствие уравнений Максвелла.

Цепная расчетная модель реального электротехнического устройства имеет право на существование до тех пор, пока не нарушаются законы Кирхгофа. По этой причине недопустим к рассмотрению случай последовательного включения двух различных по интенсивности идеальных источников тока (нарушается первый закон Кирхгофа).

Аналогично мы не можем рассматривать два идеальных источника ЭДС различной интенсивности, включенных параллельно (нарушается второй закон Кирхгофа).

1.7.1. Первый закон Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю.*

Подтекающие и оттекающие токи должны учитываться в алгебраической сумме с различными знаками. Число независимых уравнений по первому закону Кирхгофа на единицу меньше числа узлов. Например, для узлов 1, 2, 3 цепи, показанной на рис. 1.21, при указанных положительных направлениях токов уравнения имеют вид

$$i_1 + i_3 - i_2 = 0; \quad i_6 - i_1 - i_4 = 0; \quad i_4 - i_5 - i_3 = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение для четвертого узла (см. рис. 1.21) представляет собой линейную комбинацию записанных трех уравнений и не является независимым.

Таким образом, для цепи, содержащей $У$ узлов, можно записать $У - 1$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа.

1.7.2. Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа относится к замкнутым контурам и представляет собой баланс между напряжениями, создаваемыми идеальными источниками ЭДС, действующими в контуре, и разностями потенциалов на остальных элементах контура.

Второй закон Кирхгофа формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре электрической цепи, равна алгебраической сумме напряжений на всех остальных элементах контура.*

Правило знаков: с положительными знаками учитывают те ЭДС и те напряжения, которые направлены согласно с произвольно выбранным положительным направлением обхода контура. Напряжения на пассивных элементах R, L, C в общем случае равны

$$u_R = \pm R \cdot i; \quad u_L = \pm L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \pm \frac{1}{C} \int i dt.$$

Они записываются с положительным знаком, если ток в элементе направлен согласно с обходом контура. Знак напряжения на источнике тока определяется после выбора положительного направления для этого напряжения. Так, для рис. 1.21 стрелка напряжения $u_{42} = \varphi_4 - \varphi_2$ направлена от узла «4» к узлу «2». Это направление согласно с обходом контура III, поэтому u_{42} учитывается со знаком «+».

Число независимых уравнений по второму закону Кирхгофа равно числу независимых контуров. Для контуров I, II, III (см. рис. 1.21) при показанном направлении их обхода уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad e_1 - e_3 &= L \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 - \frac{1}{C} \int i_4 dt - i_4 R_4; \\ \text{II)} \quad e_3 - e_2 &= i_2 R_2 - i_5 R_5; \\ \text{III)} \quad 0 &= i_4 R_4 + \frac{1}{C} \int i_4 dt + i_3 R_5 + u_{42}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) в совокупности с уравнениями (1.3) представляют собой полную систему независимых уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Она содержит шесть уравнений. Если заданы интенсивности источников и величины R, L, C , то в уравнения (1.3), (1.4) в качестве неизвестных входят пять неизвестных токов (ток $i_6 = i_k$) и напряжение на источнике тока u_{42} . Так как число уравнений равно числу неизвестных, то система (1.3), (1.4) разрешима однозначно.

Этот вывод распространяется на все задачи анализа электрических цепей. Действительно, для схемы, содержащей B ветвей и Y узлов, число независимых контуров равно $n = B - (Y - 1)$. Тогда число независимых уравнений в полной системе по первому и второму законам Кирхгофа равно $(Y - 1) + B - (Y - 1) = B$, т.е. числу ветвей.

В типичных задачах анализа, когда заданы параметры всех пассивных элементов (R, L, C) и интенсивности источников ЭДС и тока, в качестве неизвестных в системе уравнений Кирхгофа фигурируют токи в ветвях, не содержащих источники тока, и напряжения на источниках тока. В сумме количество названных неизвестных равно числу ветвей схемы. Следовательно, любая задача по анализу электрической цепи разрешима однозначно.

1.7.3. Общий вид системы уравнений Кирхгофа. Классификация задач анализа электрических цепей

Для линейной цепи ($R = \text{const}, L = \text{const}, C = \text{const}$) в общем случае система уравнений Кирхгофа — система линейных интегро-дифференциальных уравнений (см. систему (1.3), (1.4)). Ее структура (число уравнений, количество слагаемых в каждом уравнении, их вид) определяется структурой цепи, а также характером и видом ее пассивных и активных элементов. Методика же решения полученной системы уравнений Кирхгофа почти полностью зависит от вида действующих в цепи источников ЭДС $e(t)$ и тока $i_k(t)$.

Во всем многообразии задач, решаемых методами теории цепей, четко выделяются четыре класса:

1) расчет установившегося режима под действием постоянных источников $e(t) = \text{const}$ и $i_k(t) = \text{const}$. Искомые токи и напряжения в этом случае также неизменны во времени. Такой режим называется стационарным;

2) расчет установившегося режима под действием синусоидальных источников одной частоты. Искомые токи и напряжения при этом являются синусоидальными функциями времени с частотой, заданной источниками;

3) расчет установившихся режимов под действием периодических несинусоидальных источников. Искомые токи и напряжения также представляют собой периодические функции времени;

4) расчет переходных процессов, при которых токи и напряжения являются непериодическими функциями времени. Переходный режим предшествует любому установившемуся режиму, а также возникает при любых непериодических (например, импульсных) воздействиях.

Приведенная классификация положена в основу построения электро-технической части данного учебника.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение электрической цепи и ее элементу. По какому признаку элементы электрической цепи делятся на пассивные и активные?
2. Назовите основные свойства идеальных элементов: а) резистора; б) индуктивности; в) емкости. Какими резистивными сопротивлениями должны обладать идеальные амперметр и вольтметр, чтобы их подключение не приводило к искажению исследуемого режима?
3. Запишите основные соотношения, связывающие мгновенные значения напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ в элементах R, L, C .
4. Определите функцию напряжения на резисторе $R = 10$ Ом, если его ток имеет форму импульса, показанного на рис. 1.22.
5. В индуктивности $L = 0,01$ Гн протекает ток $i(t)$, заданный на графике рис. 1.22. Найдите функцию $u_L(t)$ и постройте ее график.
6. Определите, до какого напряжения зарядится конденсатор $C = 0,2$ мкФ прямоугольным импульсом тока величиной $I = 1$ А длительностью $t_u = 1$ мс.
7. Найдите ток $i(t)$ в конденсаторе $C = 0,1$ мкФ по известному напряжению $u(t)$, заданному на графике рис. 1.23.

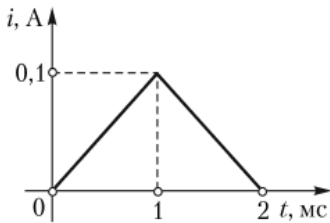


Рис. 1.22. К заданиям 4 и 5

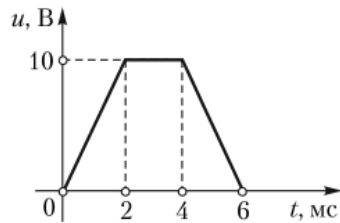


Рис. 1.23. К заданию 7

8. Дайте определение идеальным источникам ЭДС и тока. Каково их условное изображение (графическое обозначение)? Определите показания идеальных приборов в цепи, показанной на рис. 1.24.
9. Пользуясь свойством идеального источника ЭДС и законом Ома, определите токи i_2 и i_3 цепи, показанной на рис. 1.25, не находя остальных токов.

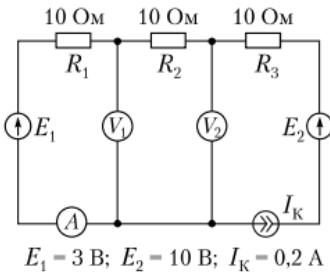


Рис. 1.24. К заданию 8

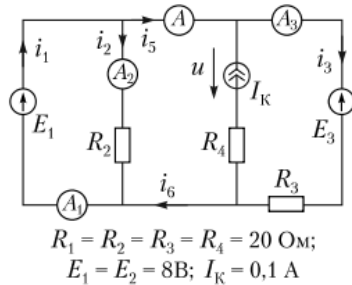


Рис. 1.25. К заданиям 9, 14, 16, 19–21

10. Что понимается под внешней характеристикой реального источника, а также под его режимами холостого хода и короткого замыкания?
11. Нарисуйте простейшие схемы замещения реального источника (линейного).
12. Определите параметры последовательной и параллельной схем замещения источника с линейной характеристикой, определяемой величинами $u_{xx} = 20$ В, $i_{кз} = 0,5$ А.
13. Дайте определение топологическим элементам цепи — ветви, узлу, контуру. Что понимается под совокупностью независимых контуров?
14. Сформулируйте первый и второй законы Кирхгофа. Пользуясь только первым законом Кирхгофа, покажите, что в цепи, показанной на рис. 1.25, $i_6 = i_5$.

15. Сколько независимых уравнений по первому и второму законам Кирхгофа можно составить для схемы с U узлами и V ветвями?

16. Запишите уравнение по второму закону Кирхгофа для контура (E_1, I_K, R_4) цепи, показанной на рис. 1.25.

17. Чем объясняется интегро-дифференциальный общий вид полной системы уравнений Кирхгофа?

18. Как изменится система уравнений Кирхгофа (1.3) и (1.4) для цепи, показанной на рис. 1.21, если: а) оборвать первую ветвь (между узлами «1» и «2»); б) закортить ее?

19. Найдите показания идеальных приборов в цепи, показанной на рис. 1.25.

20. В цепи, показанной на рис. 1.25, идеальный амперметр «А» (в пятой ветви) заменили на идеальный вольтметр. Что он покажет?

21. Определите напряжение u на источнике тока I_K цепи, показанной на рис. 1.25, при обрыве второй ветви (R_2).

22. Реальный источник, заданный параметрами элементов последовательной схемы замещения ($E = 00$ В, $R_{\text{вн}} = 1$ кОм), питает переменную резистивную нагрузку R_n (рис. 1.26). Определите минимальное и максимальные значения тока ($i_{n\text{min}}, i_{n\text{max}}$) и напряжения ($u_{n\text{min}}, u_{n\text{max}}$) на нагрузке R_n для двух случаев диапазона ее изменения: а) $R_n = 10 \div 100$ Ом; б) $R_n = 10 \div 100$ кОм.

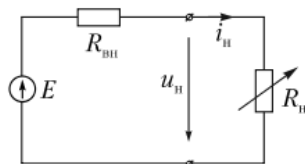


Рис. 1.26. К заданию 22

В котором из них реальный источник приближается по своим свойствам к идеальному источнику ЭДС, а в котором — к идеальному источнику тока?

Глава 2

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- условия существования стационарного режима, особенности пассивных элементов и вид полной системы уравнений цепи в этом режиме;

уметь

- записывать алгебраическую систему уравнений Кирхгофа для заданной электрической цепи;

владеть

- расчетными методами (контурных токов, узловых потенциалов, эквивалентного генератора) и выбирать наиболее рациональный для конкретной задачи.

2.1. Особенности уравнений Кирхгофа для стационарного режима

Рассмотрим важный для практики случай, когда в цепи действуют источники, интенсивности которых во времени неизменны, т.е.

$$e(t) = E = \text{const}; \quad i_k(t) = I_k = \text{const}.$$

По окончании переходного процесса под действием таких источников токи в ветвях и напряжения на элементах постоянны во времени. Такой режим будем называть **стационарным**. При этом индуктивности проявляют себя как короткое замыкание, емкости — как обрыв ($u_L = 0, i_C = 0$). Цепь превращается в чисто резистивную, и ей будут соответствовать алгебраические уравнения Кирхгофа.

Вывод: для стационарного режима система уравнений Кирхгофа — система алгебраических уравнений.

Примечание. Для обозначения токов в ветвях и напряжений на участках цепи, находящейся *заведомо* в стационарном режиме, обычно пользуются заглавными буквами I и U . Однако применение строчных символов i и u в этом случае возможно и ошибкой не является.

В качестве примера запишем полную систему уравнений Кирхгофа для цепи, показанной на рис. 1.21, в стационарном режиме, приняв

$$e_1(t) = E_1 = \text{const}; \quad e_2(t) = E_2 = \text{const}; \quad e_3(t) = E_3 = \text{const}; \quad i_k(t) = I_k = \text{const}$$

и обозначив $i_1 = I_1, i_2 = I_2$ и т.д.

Наличие конденсатора в четвертой ветви равносильно ее обрыву, поэтому $I_4 = 0; I_1 = I_6 = I_K; I_3 = -I_5$. Тогда схема на рис. 1.21 может рассматривать-

ся как цепь с двумя узлами («1» и «4») и тремя ветвями. Ее состояние определяется уравнениями

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \text{ (для первого узла),} \\ E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + U_{42} \text{ (для внешнего контура),} \\ E_3 - E_2 = I_2 R_2 - I_5 R_5 \text{ (для контура, включающего } E_2 \text{ и } E_3). \end{cases}$$

Метод непосредственного составления и решения полной системы независимых уравнений Кирхгофа — это главный расчетный метод. Он универсален, и им широко пользуются. Его недостаток — громоздкость.

Алгебраический вид уравнений Кирхгофа в стационарном режиме позволил создать ряд расчетных методов, которые следуют из законов Кирхгофа, но позволяют решить задачу анализа с меньшим числом уравнений.

2.2. Метод контурных токов

В основе метода лежит предположение о справедливости *модели контурных токов*. Сформулируем основные положения модели, поясняя их на примере цепи (рис. 2.1).

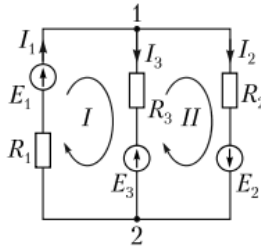


Рис. 2.1. Схема с двумя независимыми контурами (к методу контурных токов)

1. Предполагается, что в каждом независимом контуре циркулирует некоторый ток, называемый контурным, обтекающий только элементы данного контура.

Пусть по элементам первого контура (R_1, E_1, R_3, E_3) (см. рис. 2.1) в направлении, указанном кривой стрелкой, протекает контурный ток J_{11} . По элементам второго контура (R_3, R_2, E_2, E_3) течет контурный ток J_{22} .

2. Если ветвь входит только в один контур, по ней течет один контурный ток (через элементы первой ветви — J_{11} , через элементы второй ветви — J_{22}). Истинный ток в такой ветви с точностью до знака равен контурному.

3. Если ветвь входит одновременно в несколько контуров, по ней одновременно протекают несколько контурных токов. Истинный ток в этой ветви равен алгебраической сумме соответствующих контурных токов. Поэтому согласно сформулированным положениям

$$I_1 = J_{11}; \quad I_2 = J_{22}; \quad I_3 = J_{11} - J_{22} \quad (2.1)$$

(J_{22} направлен встречно I_3).

Принятая модель не противоречит первому закону Кирхгофа, так как каждый контурный ток подтекает к узлу и оттекает от него. Если с учетом ее справедливости записать систему уравнений по второму закону Кирхгофа (выразив напряжения через контурные токи) получаем систему, удовлетворяющую обоим законам Кирхгофа. Для независимых контуров цепи,

показанной на рис. 2.1, обходя их в направлении собственного контурного тока, имеем

$$\begin{cases} \text{I)} E_1 - E_3 = J_{11}(R_1 + R_3) - J_{22}R_3, \\ \text{II)} E_2 + E_3 = -J_{11}R_3 + J_{22}(R_2 + R_3). \end{cases} \quad (2.2)$$

В правую часть каждого уравнения входит напряжение, определяемое собственным контурным током, оно всегда положительно. Остальные слагаемые правой части обусловлены смежными контурными токами. Их знак зависит от выбора положительных направлений контурных токов. В нашем случае эти слагаемые отрицательны.

В систему (2.2) в качестве неизвестных входят контурные токи. Число уравнений в ней равно числу независимых контуров схемы.

По найденным из системы (2.2) контурным токам J_{11}, J_{22} истинные токи ветвей находятся путем алгебраического суммирования контурных токов. В нашем примере пользуемся выражениями (2.1).

Таким образом, метод контурных токов позволяет снизить число решаемых уравнений до числа независимых контуров. *Порядок расчета* при этом следующий.

1. Выбираем независимые контуры и задаем в каждом из них направление собственного контурного тока.
2. Составляем систему уравнений по второму закону Кирхгофа, выражая напряжения на пассивных элементах через контурные токи. Решаем ее относительно контурных токов.
3. Находим истинные токи ветвей алгебраическим суммированием контурных токов.

2.3. Метод узловых потенциалов

2.3.1. Общая характеристика метода.

Уравнения цепи относительно потенциалов узлов

Метод узловых потенциалов позволяет сократить число решаемых уравнений до числа узлов схемы без единицы. Идея метода:

- а) по определенному правилу (следующему из уравнений Кирхгофа) записывается система уравнений, неизвестными в которой являются потенциалы узлов схемы; система решается, определяются потенциалы узлов;
- б) рассчитываются токи в ветвях через потенциалы узлов по обобщенному закону Ома (1.2).

Рассмотрим один из способов получения системы уравнений требуемого вида на примере цепи, показанной на рис. 2.2.

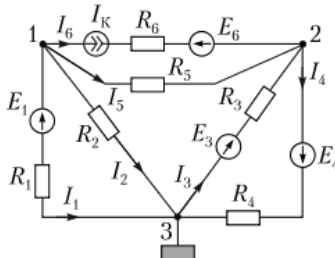


Рис. 2.2. Цепь с тремя узлами и шестью ветвями. Ее состояние определяется системой двух независимых уравнений относительно узловых потенциалов

Выполняем следующие шаги.

Шаг 1. Записываем систему уравнений по первому закону Кирхгофа. Для рис. 2.2 она содержит два независимых уравнения, например для узлов «1» и «2»

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_5 - I_6 = 0, \\ I_3 - I_4 + I_5 + I_6 = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Шаг 2. Выразим токи ветвей через потенциалы узлов по закону Ома (1.2). Так как токи ветвей определяются разностями потенциалов, потенциал одного из узлов можем задать произвольно. Примем потенциал узла «3» равным нулю ($\varphi_3 = 0$). Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = \frac{-\varphi_1 + E_1}{R_1}; & I_2 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_2} = \frac{\varphi_1}{R_2}; \\ I_3 &= \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_3}{R_3} = \frac{-\varphi_2 + E_3}{R_3}; \\ I_4 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_4}{R_4} = \frac{\varphi_2 + E_4}{R_4}; & I_5 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5}; & I_6 &= I_K. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Шаг 3. Подставим формулы (2.4) в уравнения (2.3), группируем слагаемые с одинаковыми потенциалами. Приходим к системе

$$\begin{cases} \varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R_5} = E_1 \cdot \frac{1}{R_1} - I_K, \\ -\varphi_1 \cdot \frac{1}{R_5} + \varphi_2 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = E_3 \cdot \frac{1}{R_3} - E_4 \cdot \frac{1}{R_4} + I_K. \end{cases} \quad (2.5)$$

Таким образом, пришли к системе двух уравнений, в которых в качестве неизвестных фигурируют потенциалы узлов схемы (см. рис. 2.2) φ_1 и φ_2 .

2.3.2. Понятие проводимости ветви

Под проводимостью ветви понимаем величину, обратную ее полному сопротивлению. Сопротивление ветви складывается из сопротивления резистора и внутреннего сопротивления источника, включенного последовательно. Если это идеальный источник ЭДС, то для него $R_{\text{вн}} = 0$. Поэтому за исключением шестой ветви схемы на рис. 2.2 проводимости ветвей обратны соответствующим резистивным сопротивлениям: $g_1 = 1/R_1$, $g_2 = 1/R_2$ и т.д. Поскольку внутреннее сопротивление источника тока равно ∞ , то проводимость шестой ветви с источником тока равна нулю: $g_6 = 1/(R_6 + \infty) = 0$.

С использованием проводимостей ветвей система (2.5) имеет более компактный вид

$$\begin{cases} \varphi_1(g_1 + g_2 + g_5) - \varphi_2 g_5 = E_1 g_1 - I_K, \\ -\varphi_1 g_5 + \varphi_2(g_3 + g_4 + g_5) = E_3 g_3 - E_4 g_4 + I_K. \end{cases} \quad (2.6)$$

Размерность проводимости обратна размерности сопротивления, т.е. $[g] = 1/\text{Ом}$. Эта величина называется сименс и обозначается См. Таким образом, $[g] = [1/R] = 1/\text{Ом} = 1 \text{ См}$.

2.3.3. Правила записи системы уравнений относительно узловых потенциалов по виду схемы

Структура уравнений (2.6) позволяет выявить общие закономерности, зная которые, можно сразу по виду схемы записывать систему вида (2.5), минуя промежуточные системы (2.3) и (2.4).

Уравнения записываются для всех узлов схемы, кроме одного (потенциал которого принят за ноль). Таким образом, число уравнений системы равно $Y - 1$.

Все $Y - 1$ уравнений имеют сходную *структуру*.

Левая часть уравнений содержит:

а) потенциал узла, для которого записывается уравнение, умноженный на сумму проводимостей всех ветвей, сходящихся в данном узле. Это слагаемое берется с положительным знаком ($\varphi_1(g_1 + g_2 + g_5)$ – в первом уравнении системы (2.6), $\varphi_2(g_3 + g_4 + g_5)$ – во втором уравнении системы (2.6));

б) кроме рассмотренного слагаемого, в левой части присутствуют произведения потенциалов остальных узлов схемы на проводимости ветвей, соединяющих эти узлы с рассматриваемым. Эти слагаемые записываются с отрицательным знаком ($-\varphi_2 g_5$ – в первом уравнении системы (2.6), $-\varphi_1 g_5$ – во втором уравнении системы (2.6)).

Под «остальными» узлами понимаются те, которые соединены с рассматриваемым не более, чем через одну ветвь.

Правая часть уравнений содержит:

а) алгебраическую сумму произведений ЭДС ветвей, сходящихся в данном узле, на проводимости соответствующих ветвей;

б) алгебраическую сумму токов источников тока, если они есть в ветвях, сходящихся в данном узле.

В алгебраических суммах с положительным знаком учитываются те ЭДС и те источники тока, которые направлены к рассматриваемому узлу: ($E_1 g_1 - I_K$) – в первом уравнении системы (2.6), ($E_3 g_3 - E_4 g_4 + I_K$) – во втором уравнении системы (2.6).

2.4. Понятие входного сопротивления пассивного двухполюсника и его простейшая схема замещения

Любая цепь, имеющая два зажима, является **двухполюсником**. Если внутри двухполюсника нет источников, то он называется **пассивным** и обозначается, как показано на рис. 2.3, а. Токи в ветвях пассивного двухполюсника могут возникать только при наличии внешних воздействий.

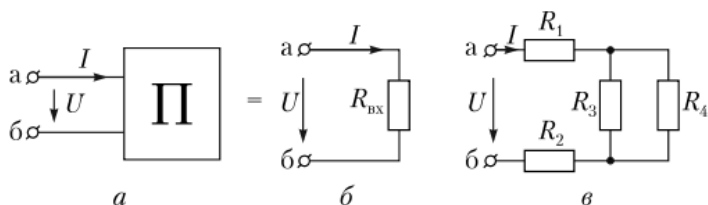


Рис. 2.3. Пассивный двухполюсник:

а – общее изображение; б – простейшая схема замещения; в – пассивный двухполюсник с параллельно-последовательным соединением элементов

Входным сопротивлением пассивного двухполюсника называется величина, равная отношению напряжения к току на его входе: $R_{\text{вх}} = U/I$.

Для линейного двухполюсника (рис. 2.3, б) $R_{\text{вх}}$ — его параметр, определяемый схемой и величиной сопротивлений элементов. От напряжения, созданного на его входе, $R_{\text{вх}}$ не зависит. Входное сопротивление можно определить экспериментально методом амперметра-вольтметра.

Если известна схема двухполюсника, то возможен расчетный путь. Например, для двухполюсника на рис. 2.3, в

$$R_{\text{вх}} = \frac{U}{I} = R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_2.$$

Здесь учтено, что параллельно включенные R_3 и R_4 последовательны с R_1 и R_2 .

Если соединение элементов в схеме двухполюсника не является параллельно-последовательным (рис. 2.4), его входное сопротивление может быть найдено по законам Кирхгофа. Для этого рассчитываем ток входной ветви, соответствующий произвольно заданному напряжению на входе.

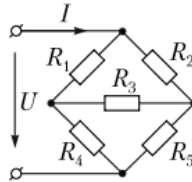


Рис. 2.4. Схема пассивного двухполюсника, которая не является параллельно-последовательной

При определении $R_{\text{вх}}$ в схемах вида изображенной на рис. 2.4 возможно также применение преобразования пассивных трехполюсников [4].

По отношению к внешней цепи пассивный двухполюсник может быть заменен одним элементом — резистором $R_{\text{вх}}$. Поэтому можно утверждать, что простейшая схема замещения пассивного двухполюсника содержит один элемент — резистор $R_{\text{вх}}$ (см. рис. 2.3, б).

2.5. Простейшие схемы замещения активного двухполюсника в стационарном режиме

2.5.1. Понятие входного сопротивления активного двухполюсника

Если схема двухполюсника содержит источники, он называется **активным** и в общем случае обозначается, как показано на рис. 2.5, а. На рис. 2.5, б дана конкретная схема активного двухполюсника, имеющего наряду с пассивными и активные элементы: источники ЭДС и источник тока.

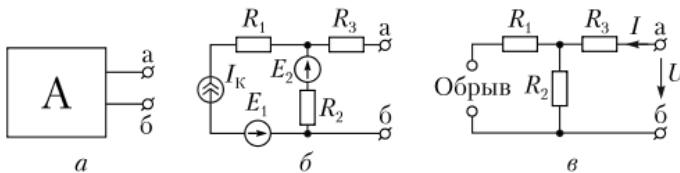


Рис. 2.5. Активный двухполюсник:

а — общее изображение; б — конкретная схема; в — схема пассивного двухполюсника, соответствующего заданному активному двухполюснику (б)

Под входным сопротивлением активного двухполюсника понимается входное сопротивление того пассивного двухполюсника, который получится из активного, если интенсивности всех внутренних источников принять равными нулю.

Согласно определению, для нахождения входного сопротивления переходим от активного двухполюсника к пассивному, «обнуляя» все внутренние источники. При этом ЭДС закорачиваем, а источники тока обрываем.

Активному двухполюснику на рис. 2.5, б соответствует пассивный, изображенный на рис. 2.5, в. Его входное сопротивление относительно зажимов «а», «б» равно

$$R_{\text{вх}} = R_2 + R_3.$$

2.5.2. Теорема об активном двухполюснике (эквивалентном генераторе). Виды простейшей схемы замещения активного двухполюсника

В теореме доказывается вид простейшей схемы замещения активного двухполюсника. На рис. 2.6, а изображены активный двухполюсник и его внешняя цепь ($I_{\text{н}}$ — ток, отдаваемый двухполюсником во внешнюю цепь; $U_{\text{н}}$ — напряжение на его зажимах). Согласно этой теореме активный двухполюсник по отношению к его внешней цепи можно заменить двумя элементами, включенными последовательно: идеальным источником ЭДС E_3 и резистором R_3 (рис. 2.6, б). Формулировка теоремы следующая.

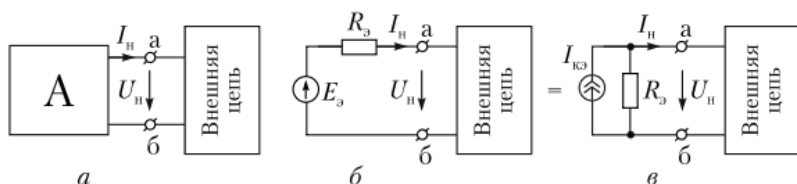


Рис. 2.6. К теореме об активном двухполюснике:

а — общее изображение нагруженного активного двухполюсника; б — последовательная схема замещения активного двухполюсника; в — параллельная схема замещения активного двухполюсника

Теорема об активном двухполюснике. *Любой активный двухполюсник может быть заменен эквивалентным генератором, ЭДС которого E_3 равна напряжению на разомкнутых зажимах данного активного двухполюсника, а внутреннее сопротивление R_3 — его входному сопротивлению [4].*

Режим разомкнутых зажимов активного двухполюсника называется режимом **холостого хода**, при этом напряжение на его зажимах обозначается $U_{\text{хх}}$. Таким образом, условия эквивалентности схем на рис. 2.6, а и б следующие:

$$E_3 = \varphi_a - \varphi_b|_{\text{хх}} = U_{\text{ххаб}}; \quad R_3 = R_{\text{вхаб}}.$$

Несложно от последовательной схемы замещения активного двухполюсника (см. рис. 2.6, б) перейти к эквивалентной параллельной схеме (рис. 2.6, в), где $I_{\text{кз}} = I_{\text{кз}}$ — ток короткого замыкания; R_3 — входное сопротивление активного двухполюсника.

2.6. Метод эквивалентного генератора

Рассмотренная в параграфе 2.5 теорема лежит в основе одного из важнейших расчетных методов теории цепей. Метод наиболее целесообразен,

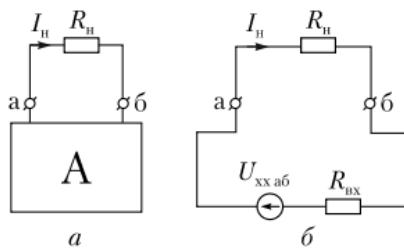


Рис. 2.7. К методу эквивалентного генератора:

a — относительно ветви с R_n остальную схему можно рассматривать как активный двухполюсник; *б* — замена активного двухполюсника его последовательной схемой замещения приводит схему к одноконтурной цепи

когда требуется найти ток одной ветви, не находя остальных токов. Идея метода эквивалентного генератора заключается в следующем:

- по отношению к выделенной ветви остальную цепь рассматриваем как активный двухполюсник (рис. 2.7, *a*);
- замена этого активного двухполюсника его последовательной схемой замещения (рис. 2.7, *б*) приводит сложную схему к одноконтурной цепи, для которой

$$I_n = U_{xxab} / (R_{вх} + R_n).$$

По сути, задача сводится к расчету параметров схемы замещения активного двухполюсника U_{xxab} и $R_{вх}$.

Пример 2.1. Воспользуемся методом эквивалентного генератора для расчета тока I_4 в цепи, показанной на рис. 2.8, *a*. Для нее заданы: $I_K = 2$ А; $E = E_5 = 120$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 60$ Ом.

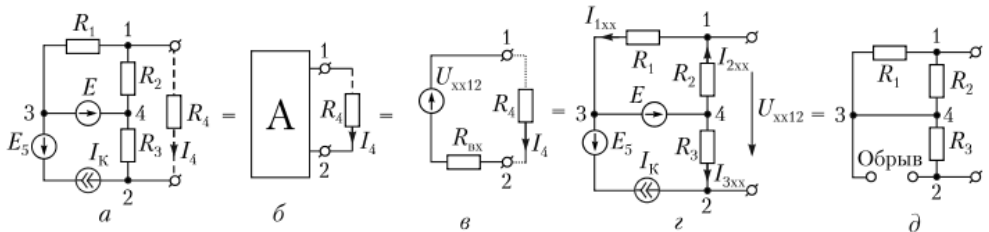


Рис. 2.8. Применение метода эквивалентного генератора для расчета тока в выделенной ветви

Решение

По отношению к ветви с током I_4 остальную схему рассматриваем как активный двухполюсник (рис. 2.8, *б*). Представляем этот двухполюсник его последовательной схемой замещения и приходим к цепи, показанной на рис. 2.8, *в*. Для нее

$$I_4 = U_{xx12} / (R_{вх} + R_4), \quad (2.7)$$

где $U_{xx12} = (\varphi_1 - \varphi_2)|_{xx}$ — напряжение на разомкнутых зажимах активного двухполюсника (при обрыве четвертой ветви), изображенного на рис. 2.8, *з*; $R_{вх}$ — входное сопротивление активного двухполюсника (см. рис. 2.8, *з*).

Расчет U_{xx12} . В общем случае при нахождении напряжения холостого хода можно воспользоваться любым из рассмотренных расчетных методов (см. параграфы 2.1—2.3), причем обрыв ветви существенно упрощает задачу на этом этапе.

Для двухполюсника на рис. 2.8, z в режиме холостого хода

$$I_{2xx} = I_{1xx} = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{R_2 + R_1} = \frac{E}{R_2 + R_1} = 1 \text{ А}; \quad I_{3xx} = I_K = 2 \text{ А}.$$

Примем $\varphi_2 = 0$, тогда

$$\varphi_4 = \varphi_2 + I_{3xx} R_3 = 0 + 2 \cdot 60 = 120 \text{ В};$$

$$\varphi_1 = \varphi_4 - I_{2xx} R_2 = 120 - 1 \cdot 60 = 60 \text{ В}.$$

Итак, $U_{xx12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 60 \text{ В}$.

Расчет $R_{вх}$. На рис. 2.8, d изображен пассивный двухполюсник, который соответствует рассматриваемому активному двухполюснику. Относительно зажимов «1», «2»

$$R_{вх} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_2 = 90 \text{ Ом}.$$

С учетом найденных величин U_{xx12} и $R_{вх}$ по формуле (2.7) получаем

$$I_4 = \frac{60}{90 + 60} = 0,4 \text{ А}.$$

2.7. Методика расчета режима в нелинейной резистивной нагрузке линейного активного двухполюсника

Метод эквивалентного генератора находит широкое применение не только в линейных цепях, но и при решении определенного класса нелинейных задач. К таким задачам относится расчет режима в нелинейной резистивной нагрузке линейного активного двухполюсника. Этот случай достаточно часто встречается при расчете электронных схем.

На рис. 2.9 изображен линейный активный двухполюсник, к зажимам которого подключен нелинейный резистор. Обычно нелинейный резистор задается вольтамперной характеристикой, зависимостью $I_n(U_n)$, представленной графически.

Применение к активному двухполюснику теоремы об эквивалентном генераторе позволяет достаточно просто найти режим в нелинейном резисторе. Действительно, замена активного двухполюсника двухэлементной схемой замещения приводит заданную цепь к одноконтурной, как это показано на рис. 2.9, b . По второму закону Кирхгофа для нее справедливо нелинейное уравнение $U_n(I_n) = U_{xx\text{ а}б} - I_n R_{вх}$. Его решением являются координаты точки пересечения внешней характеристики активного двухполюсника $U_{xx\text{ а}б} - I_n R_{вх}$ и вольтамперной характеристики (ВАХ) нелинейной нагрузки $U_n(I_n)$.

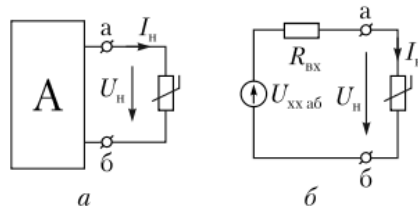


Рис. 2.9. Совокупность линейного активного двухполюсника и нелинейной резистивной нагрузки:

a — общее изображение; b — эквивалентная схема для расчета режима в нелинейном элементе

Напомним, что график зависимости $U_{xxab} - I_{II} R_{II}$ — это прямая, отсекающая по оси напряжения отрезок U_{xxab} , а по оси тока — отрезок $U_{xxab}/R_{вх}$.

Пример 2.2. Определить ток в нелинейной нагрузке цепи (рис. 2.10, а), если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \text{ кОм}$; $E = \text{const} = 12 \text{ В}$; $I_K = \text{const} = 8 \text{ мА}$; ВАХ нелинейного резистора $i_{II}(u_{II})$ задана на рис. 2.10, б.

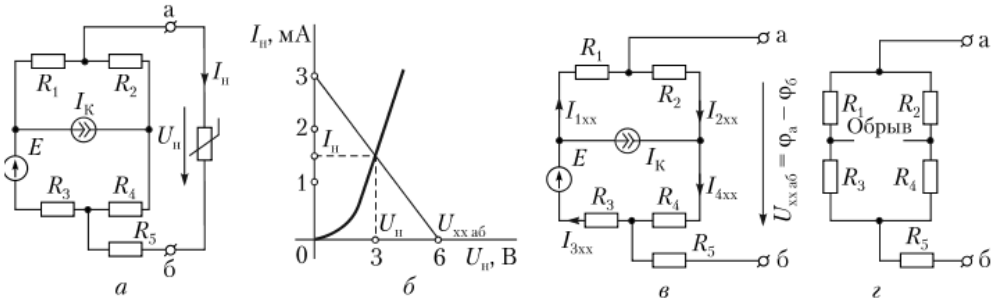


Рис. 2.10. К примеру 2.2:

а — заданная цепь; б — ВАХ нелинейного резистора и внешняя характеристика линейной части схемы; в — схема линейного активного двухполюсника, питающего нелинейную нагрузку, в режиме холостого хода; з — к расчету $R_{вх}$ линейного активного двухполюсника

Решение

Проведем расчет параметров схемы замещения линейного активного двухполюсника, подключенного к нелинейному резистору (рис. 2.10, в).

Напряжение холостого хода U_{xxab} находим по схеме, показанной на рис. 2.10, в, учитывая, что при обрыве ветви с нелинейным резистором элементы R_1, R_2 , а также R_3, R_4 между собой последовательны. Поэтому $I_{1xx} = I_{2xx}; I_{3xx} = I_{4xx}$.

В соответствии с законами Кирхгофа цепи, показанной на рис. 2.10, в, удовлетворяют уравнения

$$\begin{cases} I_K + I_{2xx} - I_{4xx} = 0, \\ I_{4xx}(R_4 + R_3) + I_{2xx}(R_1 + R_2) = E. \end{cases}$$

Их решение таково: $I_{2xx} = -1 \cdot 10^{-3} \text{ А}$; $I_{4xx} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ А}$.

Искомое напряжение U_{xxab} через найденные токи выражается следующим образом:

$$U_{xxab} = \phi_a - \phi_b = I_{2xx} R_2 + I_{4xx} R_4 = 6 \text{ В}.$$

Входное сопротивление рассматриваемого активного двухполюсника находим по схеме соответствующего пассивного двухполюсника, изображенной на рис. 2.10, з:

$$R_{вх} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3) + (R_2 + R_4)} + R_5 = 2 \text{ кОм}.$$

Режим в нелинейной нагрузке определяется точкой пересечения ВАХ нелинейного резистора $I_{II}(U_{II})$ и прямой, отсекающей по осям отрезки (см. рис. 2.10, б):

$$U_{xxab} = 6 \text{ В} \text{ и } U_{xxab}/R_{вх} = 3 \text{ мА}.$$

Ответ: $I_{II} = 1,5 \text{ мА}$; $U_{II} = 3 \text{ В}$.

2.8. Условие передачи наибольшей мощности

от активного двухполюсника к пассивному в стационарном режиме

Энергетической характеристикой стационарного режима является *мощность* P , определяющая количество энергии, передаваемое в единицу вре-

мени. Одной из важнейших задач, решаемых в инженерной практике, является подбор параметров потребителя, обеспечивающих отбор от источника наибольшей мощности.

На рис. 2.11, *а* изображен типичный случай, когда к зажимам активного двухполюсника подключен пассивный, а на рис. 2.11, *б* приведены их простейшие схемы замещения.

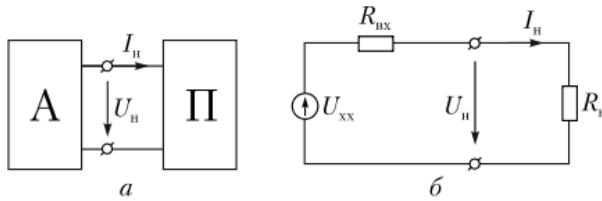


Рис. 2.11. К условию передачи наибольшей активной мощности от активного двухполюсника к пассивному в стационарном режиме:

а — общее изображение случая, когда нагрузкой активного двухполюсника является пассивный двухполюсник; *б* — эквивалентная схема после замены активного и пассивного двухполюсников их простейшими схемами замещения

Активный двухполюсник представлен последовательно включенными источником ЭДС U_{xx} и резистором R_{vx} , сопротивление которого обычно называют внутренним сопротивлением и обозначают $R_{вн}$.

Пассивный двухполюсник заменен эквивалентным резистором, обозначенным R_n .

Предположим, что параметры активного двухполюсника U_{xx} и R_{vx} неизменны, а сопротивление нагрузки R_n может изменяться в широких пределах $0 \leq R_n \leq \infty$. Выясним, при какой величине сопротивления нагрузки R_n в ней выделяется наибольшая из возможных мощность и чему она равна.

Выразим мощность, потребляемую нагрузкой, через параметры активного двухполюсника и нагрузки, воспользовавшись изображенной на рис. 2.11, *б* схемой замещения.

Поскольку ток в нагрузке равен $I_n = U_{xx}/(R_{vx} + R_n)$, потребляемую нагрузкой мощность можно определить по известной формуле

$$P_n = I_n^2 R_n = U_{xx}^2 R_n / (R_{vx} + R_n)^2. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) обращается в нуль при $R_n = 0$ и $R_n = \infty$. Несложно показать, что при $R_n = R_{vx}$ оно имеет экстремум (максимум), равный

$$P_{n \max} = U_{xx}^2 R_{vx} / (R_{vx} + R_{vx})^2 = U_{xx}^2 / (4R_{vx}).$$

График зависимости $P_n(R_n)$ показан на рис. 2.12.

Таким образом, условием передачи в нагрузку наибольшей из возможных мощности является равенство сопротивления нагрузки R_n и внутрен-

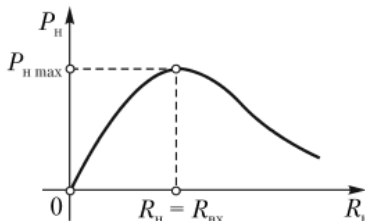


Рис. 2.12. Зависимость потребляемой мощности от сопротивления нагрузки

него сопротивления источника $R_{\text{вн}} = R_{\text{вх}}$. Коэффициент полезного действия в этом режиме составляет 50%, так как половина развиваемой источником энергии тратится на его внутреннем сопротивлении.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой режим называется стационарным? Как проявляют себя элементы L и C в стационарном режиме?

2. Почему система уравнений Кирхгофа в стационарном режиме имеет алгебраический вид?

3. В чем достоинства расчетных методов контурных токов (МКТ) и узловых потенциалов (МУП) по отношению к методу непосредственного решения системы уравнений Кирхгофа?

4. Дайте рекомендации по целесообразности применения МКТ и МУП в конкретных схемах, имеющих U узлов и n независимых контуров.

5. Сколько уравнений в узловых потенциалах необходимо составить для расчета токов в цепи, показанной на рис. 2.2, в случае короткого замыкания резистора R_5 ?

6. Что понимается под входным сопротивлением $R_{\text{вх}}$ пассивного двухполюсника в стационарном режиме? Найдите значение $R_{\text{вх}}$ для двухполюсника, показанного на рис. 2.4, в случае, когда: а) $R_5 = 0$ (к.з.); б) $R_5 = \infty$ (обрыв).

7. Как выглядит простейшая схема замещения пассивного двухполюсника в стационарном режиме?

8. Дайте определение понятию входного сопротивления активного двухполюсника в стационарном режиме.

9. Запишите выражение для $R_{\text{вх}}$ активного двухполюсника, показанного на рис. 2.5, когда параллельно источнику тока I_k включен резистор R_4 .

10. Сформулируйте теорему об активном двухполюснике (эквивалентном генераторе). Какой вид согласно этой теореме имеет простейшая схема замещения активного двухполюсника в стационарном режиме?

11. Изложите идею метода эквивалентного генератора и соответствующий порядок расчета.

12. Пользуясь методом эквивалентного генератора, рассчитайте ток в нагрузке цепи, показанной на рис. 2.8, при обрыве ветви с ЭДС E (между узлами «3» и «4»).

13. Каким образом рассчитывается ток в нелинейной резистивной нагрузке линейного активного двухполюсника в стационарном режиме?

14. В условиях примера 2.2 произошел обрыв ветви с резистором R_3 (см. рис. 2.10). Определите ток в нелинейном резисторе.

15. Из какого условия рассчитывается резистивная нагрузка линейного активного двухполюсника, при которой в ней выделяется наибольшая из возможных мощность?

16. Нарисуйте качественный график зависимости мощности, отдаваемой активным двухполюсником в нагрузку R_n .

17. В условиях примера 2.1 определите величину сопротивления резистора R_4 , при которой в нем выделяется наибольшая мощность. Вычислите ее. Каков КПД передачи энергии в этом режиме?

Глава 3

ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТОКА

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- условие существования синусоидального режима и основные амплитудно-фазовые соотношения для элементов R, L, C в этом режиме;
- особенности системы уравнений Кирхгофа для линейной цепи в синусоидальном режиме относительно мгновенных значений токов, напряжений и их комплексов;

уметь

- рассчитывать временные функции токов и напряжений для заданной цепи с учетом наличия в схеме измерительных приборов;
- находить показания измерительных приборов заданной системы;
- вычислять энергетические характеристики цепи;

владеть

- символическим методом расчета, включая построение векторных диаграмм.

3.1. Основные понятия и характеристики цепей переменного периодического тока

Ток называется **переменным**, если он изменяется во времени либо по величине, либо по направлению (или и по величине, и по направлению). Переменный ток может быть периодической или непериодической функцией времени. Режим, при котором токи и напряжения являются периодическими функциями времени, называется **установившимся**. Данная глава посвящена рассмотрению только установившихся режимов.

На рис. 3.1, $a - d$, изображены несколько вариантов зависимостей $i(t)$ переменных периодических токов. Задание функций $i(t)$ аналитически или

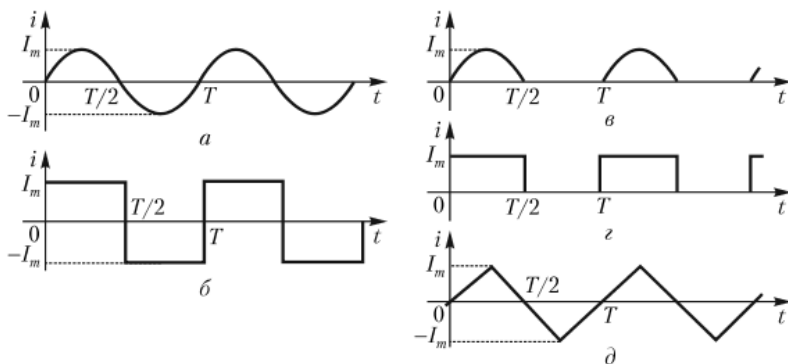


Рис. 3.1. Примеры функций $i(t)$ переменных периодических токов

графически предполагает определенное положительное направление тока на схеме.

Переменный периодический ток принято характеризовать:

а) мгновенным значением — i (его величина и знак зависят от выбранного момента времени);

б) максимальным на периоде значением I_m (показано на графиках рис. 3.1, $a - \delta$);

в) действующим или эффективным значением — I .

Наиболее полной характеристикой переменного тока является временная зависимость мгновенного значения — функция $i(t)$. Однако во многих практических случаях важен не конкретный вид функции $i(t)$, а тепловой эффект от протекающего тока. Причем различные по функциям мгновенных значений $i(t)$ токи могут быть равноценны по тепловому воздействию (например, как будет показано в следующем параграфе, токи, заданные на рис. 3.1, a и z). Для оценки теплового воздействия переменного периодического тока вводится понятие его действующего значения.

3.2. Действующее (эффективное) значение переменного тока

Под *действующим значением* переменного тока принято понимать величину такого постоянного тока, который за время, равное периоду переменного тока, выделяет в резисторе R то же количество тепла, что и переменный ток.

3.2.1. Связь между действующим и мгновенными значениями переменного тока

Рассмотрим два случая:

- по резистору R протекает переменный ток $i(t)$ с периодом T ;
- по тому же резистору R протекает постоянный ток I .

Сравним количества тепла, выделяемые в резисторе R переменным током Q_{\sim} и постоянным током $Q_{\text{п}}$ за время, равное периоду T :

$$Q_{\sim} = \int_0^T i^2(t) R dt \quad (3.1)$$

(произведение $i^2(t)R$, стоящее под знаком интеграла, есть мгновенная мощность $p(t)$, характеризующая быстроту преобразования энергии электрического тока в тепловую);

$$Q_{\text{п}} = \int_0^T I^2 R dt = I^2 RT. \quad (3.2)$$

Приравниваем Q_{\sim} и $Q_{\text{п}}$, с учетом выражений (3.1) и (3.2) получаем

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}. \quad (3.3)$$

Согласно определению, выражение (3.3) дает искомую связь между мгновенным и действующим значениями переменного периодического тока. Оно позволяет найти действующее значение переменного тока по заданной аналитически или графически функции $i(t)$.

Из выражения (3.3) следует, что для двухполярных прямоугольных импульсов тока (см. рис. 3.1, б) действующее значение $I = I_m$, а для однополярных (см. рис. 3.1, з) — $I = I_m/\sqrt{2}$. Действительно, в случае рис. 3.1, з подкоренное выражение (3.3) в два раза меньше, чем в случае рис. 3.1, б.

Для треугольных импульсов тока, изображенных на рис. 3.1, д, $I = I_m/\sqrt{3}$.

3.2.2. Связь между действующим значением синусоидального тока и его амплитудным значением

Вспользуемся выражением (3.3) для случая синусоидального тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. С учетом известного тригонометрического соотношения

$$i^2(t) = I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = I_m^2 \frac{1 - \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} = \frac{I_m^2}{2} - \frac{I_m^2}{2} \cos 2(\omega t + \varphi).$$

из выражения (3.3) для действующего значения синусоидального тока получаем

$$I = I_m/\sqrt{2}, \quad (3.4)$$

т.е. оно определяется только амплитудой тока, а от его начальной фазы не зависит.

Заметим, что для однополярных импульсов синусоидальной формы (см. рис. 3.1, в) действующее значение в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем для полной синусоиды, т.е.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{I_m}{2}.$$

3.2.3. Понятия действующих значений напряжения и ЭДС

Для периодических функций времени напряжения $u(t)$ и ЭДС $e(t)$ понятия действующего значения вводятся математически. Под действующими значениями напряжения U и ЭДС E понимаются их среднеквадратичные значения:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt}.$$

При синусоидальной форме функций $u(t)$ и $e(t)$ их действующие значения связаны с амплитудами соотношениями

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Обычно, когда говорят о величине переменного периодического напряжения (ЭДС, тока), подразумевают его действующее значение. Например, напряжение сети 230 В соответствует синусоидальному напряжению с амплитудой $230\sqrt{2}$ В.

3.2.4. Основные измерительные приборы и их учет в расчетных схемах

При опытном исследовании установившихся режимов основными измерительными приборами являются *амперметры* и *вольтметры*. Общее требование, предъявляемое к этим приборам, — по возможности снизить

(в идеальном случае — исключить) искажения, возникающие при включении этих приборов в заданную цепь.

Основное требование к амперметру. Поскольку амперметр включается в разрыв ветви с измеряемым током, то его внутреннее сопротивление должно быть пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением исследуемой ветви, а для идеального амперметра — равным нулю: $R_{внА} = 0$.

Основное требование к вольтметру. Как известно, вольтметр подключается параллельно участку с измеряемым напряжением (разностью потенциалов) и «забирает» на себя некоторый ток. Во избежание существенных искажений ток через вольтметр должен быть достаточно малым (близким к нулю), а его внутреннее сопротивление достаточно большим (в идеале — бесконечно большим): $R_{внV} \rightarrow \infty$.

Таким образом, при наличии в расчетной схеме названных выше измерительных приборов, идеальный амперметр ($R_{внА} \rightarrow 0$) учитывается как короткозамкнутая перемычка, а идеальный вольтметр ($R_{внV} \rightarrow \infty$) — как оборванная ветвь.

3.3. Условия возникновения и существования синусоидального режима в линейной цепи

Методам расчета и анализа синусоидального режима уделяется особое внимание, так как синусоидальный режим — один из наиболее распространенных на практике. Кроме того, расчет периодических несинусоидальных режимов в линейных цепях основывается на методике расчета синусоидальных режимов.

Возникает синусоидальный режим в том случае, если в цепи действуют источники ЭДС и тока вида $f(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$ одной и той же частоты.

По окончании переходного процесса токи в ветвях и напряжения на участках в этом случае являются синусоидальными функциями времени с частотой, заданной источниками:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi); \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Следовательно, расчет синусоидальных токов и напряжений при заданных интенсивностях источников сводится к нахождению их амплитуд и начальных фаз.

В основе расчета лежат первый и второй законы Кирхгофа, они справедливы для каждого момента времени:

$$\sum i(t) = 0; \quad \sum e(t) = \sum u(t). \quad (3.5)$$

Первое уравнение в системе (3.5) свидетельствует о том, что алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле электрической цепи равно нулю. Из второго уравнения системы (3.5) следует, что сумма мгновенных значений ЭДС, действующих в замкнутом контуре электрической цепи, равна алгебраической сумме мгновенных значений напряжений на остальных элементах контура.

Система уравнений (3.5) представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений. Ее непосредственное применение для расчета синусоидальных режимов связано с громоздкими записями. Поэтому для ре-

шения рассматриваемых задач был использован разработанный математиками так называемый *символический метод*, позволивший проводить расчет в существенно более компактной форме. Главным, основополагающим моментом символического метода является изображение синусоидальной функции времени вектором на комплексной плоскости.

3.4. Комплексная плоскость и некоторые ее свойства

Комплексная плоскость (рис. 3.2, *a*) — это система прямоугольных координат. Одна ось называется вещественной, обозначается $+1$, вторая ось называется мнимой, обозначается $+j$ (принятый в математике символ « i » в электротехнике используется для обозначения тока).

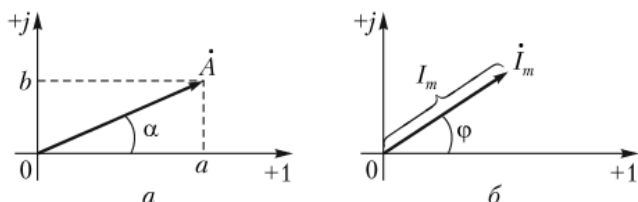


Рис. 3.2. Изображение комплексного числа на комплексной плоскости:

a — при алгебраической форме записи $\dot{A} = a + jb$;

b — при показательной форме записи $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$

Комплексное число $\dot{A} = a + jb$ (алгебраическая форма записи на комплексной плоскости изображается вектором, имеющим начало в точке O (начало координат), а конец — в точке с координатами (a, b) (рис. 3.2, *a*). Его длину обозначим A ; очевидно, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Угол, составляемый изображающим вектором с вещественной осью (отсчитываемой против часовой стрелки), обозначим α . Тогда $a + jb = A \cos \alpha + jA \sin \alpha = A e^{j\alpha}$ — показательная форма записи комплексного числа; A — модуль вектора; α — аргумент.

Таким образом, при помощи соотношений

$$a = A \cos \alpha; \quad b = A \sin \alpha$$

можно переходить от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной и обратно. Например:

$$j = 1e^{j90^\circ}; \quad -j = 1e^{-j90^\circ}; \quad 1 = 1e^{j0^\circ}; \quad -1 = 1e^{j180^\circ}.$$

3.5. Изображение синусоидальной функции времени на комплексной плоскости

3.5.1. Понятия комплексной амплитуды и комплекса действующего значения

Рассмотрим функцию времени $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. Если частоту ω считать неизменной и заданной (что соответствует подавляющему большинству решаемых здесь задач), то функция $i(t)$ однозначно определяется двумя величинами: амплитудой I_m и начальной фазой φ . Представим информацию о величинах I_m и φ на комплексной плоскости следующим образом. Построим на комплексной плоскости (рис. 3.2, *b*) вектор длиной I_m , составляющий

с вещественной осью угол φ , обозначим его \dot{I}_m и будем считать изображением синусоиды $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ на комплексной плоскости.

Согласно свойствам комплексной плоскости вектору \dot{I}_m на рис. 3.2, б соответствует комплексное число в показательной форме записи $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$. Это комплексное число, а также изображающий его вектор (см. рис 3.2, б) называют **комплексной амплитудой**.

Если учесть, что модуль комплексной амплитуды I_m равен амплитуде синусоиды, а аргумент φ — ее начальной фазе, то можно считать, что между функцией $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ и комплексной амплитудой \dot{I}_m имеет место взаимно однозначное соответствие, которое обозначается стрелками:

$$I_m \sin(\omega t + \varphi) \leftrightarrow I_m e^{j\varphi} = \dot{I}_m.$$

Отношение комплексной амплитуды к $\sqrt{2}$ называют **комплексом действующего значения**, обозначается \dot{I} :

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

— по сути, это укороченная в $\sqrt{2}$ раз комплексная амплитуда.

Таким образом, синусоидальной функции времени можно поставить в соответствие либо вектор комплексной амплитуды \dot{I}_m , либо вектор комплекса действующего значения \dot{I} . По любому из этих векторов синусоида восстанавливается однозначно (при известной частоте). Знак соответствия синусоиды и ее комплекса будем в дальнейшем обозначать стрелкой (не путать со знаком равенства). Например:

$$\begin{aligned} \dot{I}_m &= 5e^{-j30^\circ} \rightarrow i(t) = 5\sin(\omega t - 30^\circ); \\ \dot{I} &= 2e^{j20^\circ} \rightarrow i(t) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 20^\circ). \end{aligned}$$

Если комплекс имеет алгебраическую форму, для перехода к синусоиде приводим его в показательную форму. Пусть $\dot{I} = 3 + j3$, этот же комплекс в показательной форме $\dot{I} = 3\sqrt{2}e^{j45^\circ}$. Ему соответствует синусоида

$$i(t) = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ).$$

3.5.2. Операции дифференцирования и интегрирования синусоидальных функций времени на комплексной плоскости

Как известно, производная и интеграл от синусоидальной функции времени — гармоники той же частоты, им соответствуют свои комплексы и векторы на комплексной плоскости.

Можно показать, что, если комплекс синусоидальной функции $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ равен $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$, или $i(t) \rightarrow \dot{I}_m$, то справедливы следующие соответствия [4, 7]:

- $\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \dot{I}_m \cdot j\omega$ — комплекс производной равен комплексу дифференцируемой функции, умноженному на $j\omega$;

- $\int i(t) dt \rightarrow \frac{\dot{I}_m}{j\omega}$ — комплекс интеграла равен комплексу интегрируемой функции, деленному на $j\omega$. Так как $j = 1e^{j90^\circ}$, то при умножении на $j\omega$ фаза возрастает на 90° , а при делении — уменьшается на 90° . Поэтому вектор $\dot{I}_m \cdot j\omega$

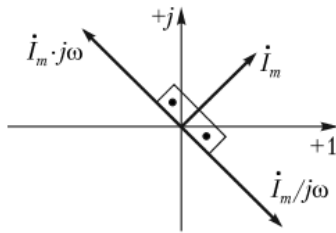


Рис. 3.3. Относительно вектора \dot{I}_m вектор $\dot{I}_m \cdot j\omega$ повернут на 90° в положительном направлении, а вектор $\dot{I}_m/j\omega$ — на 90° в отрицательном направлении повернут относительно \dot{I}_m на 90° в положительном направлении, а $\dot{I}_m/j\omega$ — в отрицательном (см. рис. 3.3).

Вывод. Дифференциальная и интегральная операции над синусоидальными функциями времени при переходе на комплексную плоскость превращаются в алгебраические операции с соответствующими комплексами.

3.5.3. Связь между комплексами тока и напряжения в элементах R, L, C . Понятие комплексного сопротивления

На рис. 3.4 показана ветвь, содержащая резистор, индуктивность, емкость. Пусть ток ветви $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, а $\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$ — его комплекс действующего значения.

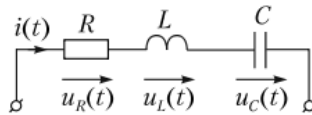


Рис. 3.4. Ветвь, содержащая резистор, индуктивность, емкость; стрелками показаны выбранные положительные направления тока и напряжений на элементах

Выразим комплексы синусоидальных напряжений на элементах R, L, C (они являются гармониками той же частоты, что и ток) через комплекс тока. Для этого записываем известные соотношения

$$u_R(t) = Ri(t); \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

В них справа и слева стоят синусоидальные функции времени. Переходя к соответствующим комплексам, учитываем, что функции времени $\frac{di(t)}{dt}$ соответствует комплекс $\dot{I}_m \cdot j\omega$, а функции $\int i(t) dt$ — комплекс $\dot{I}_m/j\omega$, получаем следующее:

$$u_R(t) \rightarrow \dot{U}_R = R\dot{I}; \quad u_L(t) \rightarrow \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}; \quad u_C(t) \rightarrow \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}.$$

Таким образом, комплексы напряжений на элементах R, L, C связаны с комплексом тока алгебраическими соотношениями

$$\dot{U}_R = R\dot{I}; \quad \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}; \quad \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}. \quad (3.6)$$

Под **комплексным сопротивлением** Z элемента понимается отношение комплекса, изображающего синусоидальное напряжение на элементе, к комплексу, изображающему синусоидальный ток: $Z = \dot{U}/\dot{I}$.

Комплексные сопротивления резистора R , индуктивности L , емкости C обозначим соответственно Z_R, Z_L, Z_C . Согласно формулам (3.6)

$$Z_R = R; \quad Z_L = j\omega L; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}. \quad (3.7)$$

В выражении для Z_C системы (3.7) принято во внимание, что

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = -j.$$

Таким образом, комплексное сопротивление резистора вещественно; комплексные сопротивления индуктивности и емкости являются мнимыми величинами различного знака. Эти результаты непосредственно связаны с фазовыми соотношениями между током и напряжениями в элементах R, L, C , рассмотренными в первой главе. Напомним, что для синусоидального режима:

- в резисторе напряжение и ток по фазе совпадают;
- в индуктивности напряжение опережает ток на 90° ;
- в емкости напряжение отстает от тока на 90° .

Наряду с введенным понятием комплексного сопротивления элемента Z пользуются и понятием его комплексной проводимости Y . Это величина, обратная комплексному сопротивлению, $- Y = 1/Z$:

$$Y_R = \frac{1}{R}; \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}; \quad Y_C = j\omega C.$$

3.6. Законы Кирхгофа для комплексов. Порядок расчета установившегося синусоидального режима символическим методом

В уравнениях Кирхгофа, записанных относительно функций мгновенных значений токов и напряжений, $\sum i(t) = 0$ — в узле, $\sum e(t) = \sum u(t)$ — в контуре, фигурируют только синусоидальные функции времени. Для соответствующих им комплексов справедливы уравнения

$$\sum \dot{I} = 0 \text{ — в узле; } \sum \dot{E} = \sum \dot{U} \text{ — в контуре.} \quad (3.8)$$

Так как комплексы напряжений на элементах контура связаны с комплексом тока алгебраически (см. формулы (3.6)), система (3.8) является системой алгебраических уравнений. Ее принято называть **системой уравнений Кирхгофа для комплексов**.

Вывод. Для комплексов, изображающих синусоидальные токи и напряжения, выполняются первый и второй законы Кирхгофа. Система уравнений Кирхгофа для комплексов является системой алгебраических уравнений.

Символический метод также называют методом комплексных амплитуд. Рекоменгуемый порядок расчета продемонстрируем на примерах 3.1 и 3.2.

Пример 3.1. Для цепи, показанной на рис. 3.5, а, заданы: $R = 200 \text{ Ом}$; $L = 0,4 \text{ Гн}$; $C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$; $e(t) = 720 \sin 1000t \text{ В}$. Определить: $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$.

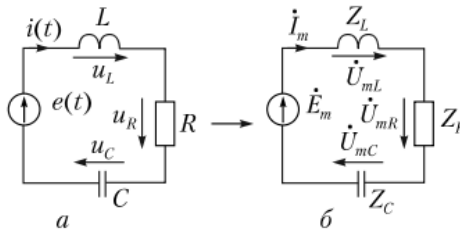


Рис. 3.5. Схемы к примеру 3.1:

а — исходная цепь; б — ее символическая модель

Решение

1. Для всех действующих в цепи синусоидальных источников находим соответствующие им комплексы. Расчет может выполняться как в комплексных амплитудах, так и в комплексах действующих значений. Проведем решение в комплексных амплитудах.

Синусоидальной ЭДС $e(t) = 720 \sin 1000t$ соответствует комплексная амплитуда $\dot{E}_m = 720e^{j0}$.

2. Рассчитываем комплексные сопротивления всех пассивных элементов:

$$Z_R = R = 200 \text{ Ом};$$

$$Z_L = j\omega L = j1000 \cdot 0,4 = j400 = 400e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{10^6}{1000 \cdot 10} = -j100 = 100e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

3. Строим символическую расчетную модель цепи. В модели действуют комплексные источники, элементы обладают комплексными сопротивлениями. В ветвях модели протекают комплексные токи, на ее участках — комплексные напряжения (рис. 3.5, б).

4. Пользуясь символической моделью, рассчитываем комплексы искомого синусоидального тока и напряжений. При этом либо применяем непосредственно законы Кирхгофа (3.8), либо любой расчетный метод, следующий из алгебраической формы уравнений Кирхгофа. Другими словами, рассмотренные во второй главе методы контурных токов, узловых потенциалов, эквивалентного генератора и т.п. применимы для символической модели.

Для символической схемы на рис. 3.5, б из второго закона Кирхгофа для комплексной амплитуды тока имеем

$$\dot{i}_m = \frac{\dot{E}_m}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{720e^{j0}}{200 + j400 - j100} = \frac{720e^{j0}}{200 + j300}.$$

Комплексную амплитуду искомого тока желательно иметь в показательной форме записи. С этой целью стоящее в знаменателе последнего выражения комплексное число $200 + j300$ приводим к виду $Ae^{j\alpha}$ (рис. 3.6):

$$200 + j300 = \sqrt{200^2 + 300^2} e^{j \arctg \frac{300}{200}} \approx 360e^{j56^\circ}.$$

Тогда для тока \dot{i}_m получаем

$$\dot{i}_m = \frac{720e^{j0}}{360e^{j56^\circ}} = 2e^{-j56^\circ} \text{ А}.$$

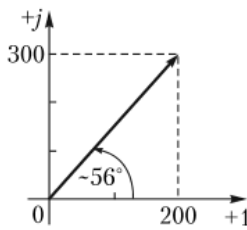


Рис. 3.6. Изображение комплексного числа $200 + j300$ на комплексной плоскости

Комплексы напряжений на элементах:

$$\dot{U}_{mR} = \dot{I}_m Z_R = 2e^{-j56^\circ} \cdot 200 = 400e^{-j56^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m Z_L = 2e^{-j56^\circ} \cdot 400e^{j90^\circ} = 800e^{j34^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{mC} = \dot{I}_m Z_C = 2e^{-j56^\circ} \cdot 100e^{-j90^\circ} = 200e^{-j146^\circ} \text{ В}.$$

Найденные комплексы в выбранном масштабе изображены на комплексной плоскости (рис. 3.7).

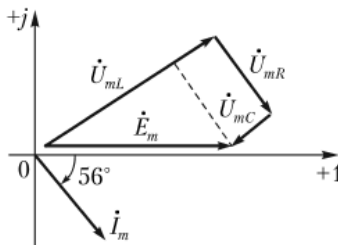


Рис. 3.7. Векторы тока и напряжений на элементах цепи рис. 3.5.

Векторный многоугольник напряжений иллюстрирует на комплексной плоскости второй закон Кирхгофа

5. Переходим от найденных комплексов к соответствующим синусоидальным функциям времени. Переход наиболее удобен, если комплексы имеют показательную форму записи:

$$\dot{I} = 2e^{-j56^\circ} \rightarrow i(t) = 2\sin(1000t - 56^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{U}_{mR} = 400e^{-j56^\circ} \rightarrow u_R(t) = 400\sin(1000t - 56^\circ) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{mL} = 800e^{j34^\circ} \rightarrow u_L(t) = 800\sin(1000t + 34^\circ) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{mC} = 200e^{-j146^\circ} \rightarrow u_C(t) = 200\sin(1000t - 146^\circ) \text{ В}.$$

В следующем примере дан расчет синусоидального режима с использованием комплексов действующего значения. Этот вид комплексов особенно удобен в задачах, где требуется определить действующие значения синусоидальных величин, например показания приборов.

Пример 3.2. Для цепи (рис. 3.8, а) дано: $R = 100 \text{ Ом}$; $L = 0,02 \text{ Гн}$; $C = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$; $i_K(t) = 4\cos 5000t \text{ А}$.

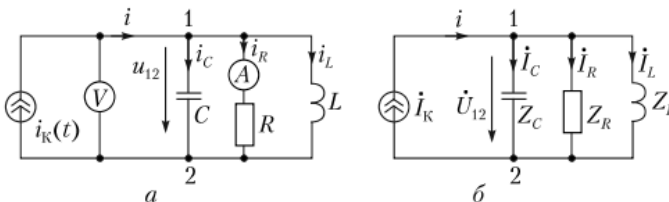


Рис. 3.8. К примеру 3.2:

а — заданная цепь; б — ее символическая модель

Определить: $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$ и показания вольтметра и амперметра, измеряющих действующие значения. Приборы считать идеальными.

Решение

Если гармонический источник задан как косинусоидальная функция времени, то переходим к синусу: $i_K(t) = 4\cos 5000t = 4\sin(5000t + 90)$ А.

Соответствующий комплекс действующего значения равен

$$\dot{I}_K = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

Вычисляем комплексные сопротивления пассивных элементов:

$$Z_R = R = 100 \text{ Ом;}$$

$$Z_L = j\omega L = j5000 \cdot 0,02 = j100 = 100e^{j90^\circ} \text{ Ом;}$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{10^6}{5000 \cdot 4} = -j50 = 50e^{-j90^\circ} \text{ Ом.}$$

Символическая модель цепи рис. 3.8, а изображена на рис. 3.8, б. Идеальные приборы на рис. 3.8, б не показаны.

При расчете схемы на рис. 3.8, б принимаем во внимание параллельное соединение ветвей R, L, C . Найдем комплексную входную проводимость цепи относительно зажимов источника «1» и «2»:

$$\begin{aligned} Y_{\text{вх}} &= Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{100} + \frac{1}{j100} + \frac{1}{-j50} = \\ &= \frac{1}{100} - j\frac{1}{100} + j\frac{2}{100} = \frac{1}{100} + j\frac{1}{100} = \frac{1}{100} \sqrt{2} e^{j45^\circ} \frac{1}{\text{Ом}}. \end{aligned}$$

Напряжение на зажимах источника тока (одновременно это напряжение на параллельных элементах Z_R, Z_L, Z_C цепи, изображенной на рис. 3.8, б) равно

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}_K \cdot \frac{1}{Y_{\text{вх}}} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} \cdot \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 200e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

Комплексы токов в ветвях находим по закону Ома:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_R} = \frac{200e^{j45^\circ}}{100} = 2e^{j45^\circ} \text{ А; } \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_L} = \frac{200e^{j45^\circ}}{100e^{j90^\circ}} = 2e^{-j45^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_C} = \frac{200e^{j45^\circ}}{50e^{-j90^\circ}} = 4e^{j135^\circ} \text{ А.}$$

Векторы, соответствующие комплексам \dot{U}_{12} , \dot{I}_R , \dot{I}_L , \dot{I}_C , \dot{I}_K , построены на рис. 3.9.

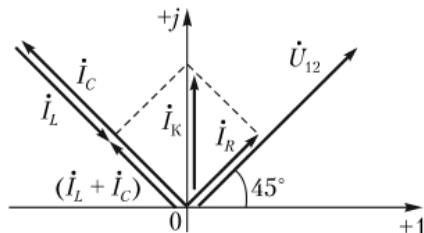


Рис. 3.9. Векторная диаграмма цепи рис. 3.8 иллюстрирует на комплексной плоскости первый закон Кирхгофа

Функции мгновенных значений токов в ветвях записываем, принимая во внимание, что амплитуды синусоид в $\sqrt{2}$ раз больше модулей их комплексов действующего значения:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= 2\sqrt{2}\sin(5000t + 45^\circ) \text{ А}; \\ i_L(t) &= 2\sqrt{2}\sin(5000t - 45^\circ) \text{ А}; \\ i_C(t) &= 4\sqrt{2}\sin(5000t + 135^\circ) \text{ А}. \end{aligned}$$

Показания приборов. По условию задачи приборы измеряют действующие значения. Их показания равны модулям соответствующих комплексов действующего значения: вольтметр показывает модуль комплекса \dot{U}_{12} , $V \rightarrow U_{12} = 200 \text{ В}$; амперметр показывает модуль комплекса \dot{I}_R , $A \rightarrow I_R = 2 \text{ А}$.

3.7. Векторная диаграмма

Совокупность векторов, изображающих на комплексной плоскости синусоидальные токи в ветвях и напряжения на участках, называют **векторной диаграммой**. При построении векторной диаграммы принято векторы располагать таким образом, чтобы иллюстрировать выполнение законов Кирхгофа.

Так, на векторной диаграмме (см. рис. 3.7), построенной для неразветвленной цепи рис. 3.5, б, иллюстрируется второй закон Кирхгофа (см. пример 3.1)

$$\dot{E}_m = \dot{U}_L + \dot{U}_R + \dot{U}_C.$$

Векторная диаграмма на рис. 3.9, построенная в примере 3.2, иллюстрирует первый закон Кирхгофа в векторной форме

$$\dot{I}_C + \dot{I}_L + \dot{I}_R = \dot{I}_K.$$

При качественном построении векторных диаграмм должна учитываться взаимная ориентация векторов тока и напряжения в элементах R, L, C , т.е. векторные диаграммы одноэлементных двухполюсников. Эти диаграммы даны на рис. 3.10, а – в; они отражают известные фазовые соотношения в R, L, C при синусоидальном режиме.

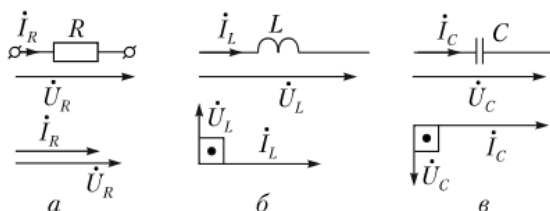


Рис. 3.10. Векторные диаграммы одноэлементных двухполюсников:

а – резистора; б – индуктивности; в – емкости

Построение векторной диаграммы в процессе расчета позволяет контролировать его правильность. Кроме этого, векторная диаграмма может использоваться как средство расчета, например при решении следующей задачи.

Пример 3.3. В цепи, показанной на рис. 3.11, а, имеет место установившийся синусоидальный режим.

Идеальные амперметры измеряют действующие значения токов. Известны показания двух амперметров: $A_2 \rightarrow 4 \text{ А}$; $A_3 \rightarrow 3 \text{ А}$. Требуется определить показания амперметра A_1 .

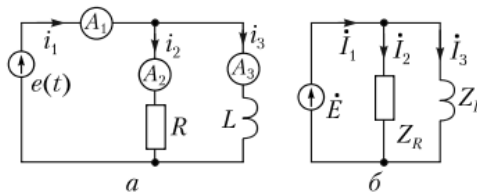


Рис. 3.11. Схема к примеру 3.3:

a — заданная цепь; *б* — ее символическая модель (идеальные амперметры не изображены)

Решение

На рис. 3.11, *б*, изображена символическая модель заданной цепи, а на рис. 3.12 — соответствующая векторная диаграмма (напряжения на *R* и *L* одинаковы и равны \dot{E} ; ток в резисторе \dot{I}_2 совпадает по фазе с напряжением, а ток в индуктивности \dot{I}_3 отстает от напряжения на 90°).

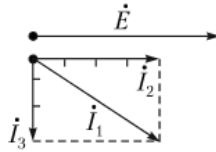


Рис. 3.12. Векторная диаграмма цепи, показанной на рис. 3.11

Из рис. 3.12 следует, что длина вектора \dot{I}_1 как геометрической суммы векторов \dot{I}_2 и \dot{I}_3 равна

$$I_1 = \sqrt{I_2^2 + I_3^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ A.}$$

Итак, $A_1 \rightarrow 5 \text{ A.}$

3.8. Расчет периодического несинусоидального режима в линейной цепи

3.8.1. Идея метода и порядок расчета

Периодический несинусоидальный режим в линейной цепи устанавливается под воздействием источников ЭДС и тока, интенсивности которых изменяются во времени по периодическому закону. Наиболее общий метод подхода к анализу и расчету таких режимов заключается в следующем.

Периодические несинусоидальные воздействия (интенсивности источников ЭДС и тока) представляются в виде совокупности гармонических составляющих (гармоническим рядом).

Рассчитываются частичные режимы, вызываемые каждой гармоникой в отдельности. Режим от постоянной составляющей находят методом цепей постоянного тока. Реакцию на каждую синусоидальную составляющую определяют символическим методом.

Производят наложение частичных режимов путем алгебраического суммирования найденных частичных токов и напряжений. При выполнении данного этапа необходимо помнить, что суммированию подлежат только функции мгновенных значений токов и напряжений. Нельзя суммировать комплексы (векторы) различных частот. Обязателен предварительный переход от найденных комплексов к соответствующим синусоидальным функциям времени.

3.8.2. Действующее значение периодического тока, представленного гармоническим рядом

Периодической функции времени $i(t)$ с периодом T соответствует разложение в ряд

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + I_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots, \quad (3.9)$$

где $\omega = (2\pi/T)$ — частота основной гармоники; I_{mk} и φ_k — амплитуда и начальная фаза k -й гармонической составляющей.

Действующее значение функции $i(t)$ в соответствии с формулами (3.3) и (3.9) равно

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots]^2 dt}.$$

Записанное выражение приводится к виду

$$I = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (3.10)$$

В соотношении (3.10) $I_k = \frac{I_{mk}}{\sqrt{2}}$ — действующее значение k -й гармонической составляющей, включая нулевую гармонику (постоянную составляющую).

Вывод. Действующее значение периодической функции времени равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений ее гармонических составляющих.

Пример 3.4. В цепи, представленной на рис. 3.13, действует источник периодической ЭДС

$$e(t) = 100 + 300 \sin 1000t + 300 \cos 2000t \text{ В;}$$

$$R = 150 \text{ Ом; } L = 0,1 \text{ Гн; } C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Определить функцию мгновенного значения тока $i(t)$ и показания идеальных приборов (амперметра и вольтметра), измеряющих действующие значения.

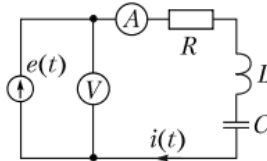


Рис. 3.13. Схема к примеру 3.4

Решение

1. В линейной цепи спектральный состав тока $i(t)$ не может отличаться от спектра воздействующего источника ЭДС $e(t)$, т.е. искомая функция мгновенного значения тока имеет вид

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(1000t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(2000t + \varphi_2).$$

2. Расчет постоянной составляющей I_0 . Ввиду наличия конденсатора в заданной неразветвленной цепи $I_0 = 0$.

3. Расчет для первой гармоники $\omega = 1000$ рад/с. Комплексная амплитуда входной ЭДС по первой гармонике равна $\dot{E}_m^{(1)} = 300e^{j0^\circ}$ В.

Вычисляем комплексное входное сопротивление цепи, показанной на рис. 3.13, относительно зажимов источника на частоте $\omega = 1000$ рад/с:

$$Z_{\text{вх}}^{(1)} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 150 + j100 - j100 = 150 \text{ Ом.}$$

Полученный для $Z_{\text{вх}}^{(1)}$ результат свидетельствует о состоянии резонанса напряжений на частоте $\omega = 1000$ рад/с.

Находим комплексную амплитуду тока первой гармоники:

$$\dot{i}_m^{(1)} = \frac{\dot{E}_m^{(1)}}{Z_{\text{вх}}^{(1)}} = \frac{300e^{j0}}{150} = 2e^{j0} \text{ А.}$$

Найденной комплексной амплитуде соответствует синусоидальная функция времени

$$i_1(t) = 2\sin 1000t \text{ А.}$$

4. Расчет для второй гармонической составляющей $2\omega = 2000$ рад/с. Комплексная амплитуда гармоники частотой 2ω в спектре ЭДС равна $\dot{E}_m^{(2)} = 300e^{j90^\circ}$ В. Находим комплексное входное сопротивление цепи (см. рис. 3.13) на частоте 2ω :

$$Z_{\text{вх}}^{(2)} = R + j2\omega L - j\frac{1}{2\omega C} = 150 + j200 - j50 = 150 + j150 = 150\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексную амплитуду тока второй гармоники определяем по закону Ома:

$$\dot{i}_m^{(2)} = \frac{\dot{E}_m^{(2)}}{Z_{\text{вх}}^{(2)}} = \frac{300e^{j90^\circ}}{150\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Соответствующая синусоидальная составляющая равна

$$i_2(t) = \sqrt{2}\sin(2000t + 45^\circ) \text{ А.}$$

5. Искомая функция мгновенного значения тока $i(t)$ определяется как сумма найденных гармонических составляющих:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 2\sin 1000t + \sqrt{2}\sin(2000t + 45^\circ) \text{ А.}$$

Ее действующее значение вычисляем, пользуясь соотношением (3.10):

$$I = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ А.}$$

Тогда показание амперметра $A \rightarrow \sqrt{3} \text{ А.}$

Вольтметр в цепи рис. 3.13 показывает действующее значение ЭДС:

$$U = E = \sqrt{100^2 + \left(\frac{300}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{300}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 316 \text{ В.}$$

3.9. Трехфазные цепи

3.9.1. Понятия трехфазного источника и трехфазной цепи

Три синусоидальных ЭДС, одинаковых по частоте и амплитуде, каждая из которых относительно двух других сдвинута по фазе на угол $\pm 120^\circ$, образуют симметричную систему, называемую **трехфазным источником**. Эти

ЭДС принято обозначать e_A ; e_B ; e_C . Если начальную фазу ЭДС e_A принять равной нулю, то функции мгновенных значений симметричной трехфазной системы ЭДС можно представить так:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тогда соответствующие комплексные амплитуды будут равны

$$\dot{E}_A = E_m e^{j0}; \quad \dot{E}_B = E_m e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E_m e^{-j240^\circ}. \quad (3.12)$$

На комплексной плоскости векторы \dot{E}_A , \dot{E}_B , \dot{E}_C образуют симметричную трехлучевую звезду (рис. 3.14, а). При построении векторных диаграмм трехфазных цепей вещественную ось (+1) обычно направляют вертикально вверх.

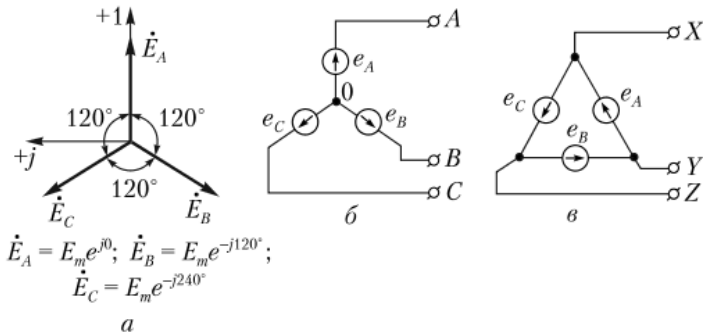


Рис. 3.14. Трехфазный симметричный источник:

а — изображение фазных ЭДС на комплексной плоскости; б — соединение фазных ЭДС «звездой»; в — соединение фазных ЭДС «треугольником»

Совокупность ЭДС вида (3.12) вырабатывается (наводится) в статорных обмотках трехфазного генератора. Одинаковая частота, амплитуда и фазовый сдвиг $\pm 120^\circ$ обеспечиваются конструкцией генератора. Ввиду малого резистивного сопротивления статорных обмоток наводимые в них ЭДС e_A , e_B , e_C можно считать идеальными. Они называются **фазными ЭДС**, а соответствующие напряжения (разности потенциалов между концевыми точками каждой из обмоток) — **фазными напряжениями**.

Использование вырабатываемых трехфазным источником ЭДС e_A , e_B , e_C в самостоятельных цепях (не имеющих электрического контакта) весьма неэкономично. Трехфазная система ЭДС гораздо эффективнее работает в единой электрической цепи, содержащей всю совокупность ЭДС, образующих трехфазный источник и все нагрузочные цепи. Она называется **трехфазной цепью**.

3.9.2. Варианты соединения фазных обмоток трехфазного генератора

При построении трехфазной цепи фазные ЭДС генератора соединяют по схеме трехполюсника. Возможны два варианта такого соединения: «звездой» и «треугольником». Они изображены на рис. 3.14, б, в. Рассмотрим главные особенности каждого из названных вариантов.

Соединение фазных ЭДС генератора «звездой» (см. рис. 3.14, б). В этом случае контакт генератора с внешней цепью может осуществляться

четырьмя точками (внешними зажимами генератора): A, B, C и O , называемой нейтральной точкой генератора.

Если потенциал точки O принять равным нулю ($\varphi_O = 0$), то потенциалы точек A, B, C будут равны фазным ЭДС или фазным напряжениям генератора. При этом условии для комплексных потенциалов точек A, B, C справедливы равенства

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_A &= \dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_O = \dot{E}_A; \\ \dot{\varphi}_B &= \dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_O = \dot{E}_B; \\ \dot{\varphi}_C &= \dot{\varphi}_C - \dot{\varphi}_O = \dot{E}_C.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Напряжения

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_B; \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_C; \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{\varphi}_C - \dot{\varphi}_A\end{aligned}\quad (3.14)$$

принято называть **линейными напряжениями генератора**. Согласно выражениям (3.14) векторы, изображающие линейные напряжения на комплексной плоскости, образуют треугольник (рис. 3.15, *a*).

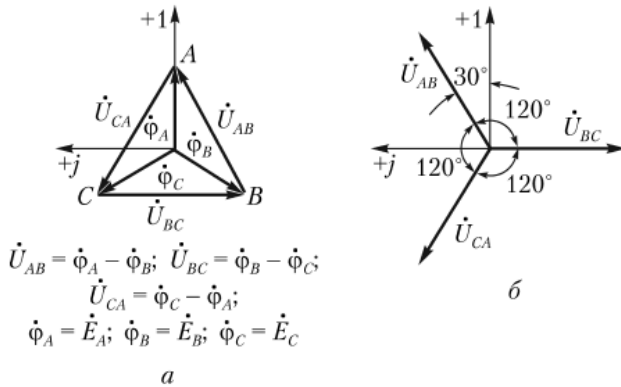


Рис. 3.15. Линейные напряжения трехфазного генератора при соединении его обмоток «звездой»:

- a* — построение векторов линейных напряжений по симметричной тройке фазных напряжений;
- б* — расположение векторов линейных напряжений в виде симметричной звезды

Покажем, что амплитуды линейных напряжений в рассматриваемом случае превышают фазные напряжения в $\sqrt{3}$ раз. Определим также начальные фазы комплексов \dot{U}_{AB} ; \dot{U}_{BC} ; \dot{U}_{CA} . По-прежнему будем считать начальную фазу \dot{E}_A равной нулю.

Воспользуемся известными комплексными соотношениями

$$e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad e^{-j240^\circ} = e^{+j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad (3.15)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (3.12)–(3.15), линейное напряжение \dot{U}_{AB} запишется так:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= E_m e^{j0} - E_m e^{-j120^\circ} = E_m \left[1 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \sqrt{3} E_m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} E_m e^{j \arg(1/\sqrt{3})} = \sqrt{3} E_m e^{j30^\circ}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Аналогичные с соотношениями (3.16) расчеты для комплексов \dot{U}_{BC} и \dot{U}_{CA} приводят к следующим результатам:

$$\dot{U}_{BC} = \sqrt{3}E_m e^{-j90^\circ}; \quad \dot{U}_{CA} = \sqrt{3}E_m e^{-j210^\circ}. \quad (3.17)$$

Из выражений (3.16) и (3.17) следует, что при соединении обмоток трехфазного генератора «звездой» линейное напряжение в $\sqrt{3}$ раз больше фазного. Комплексы линейных напряжений \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} на комплексной плоскости образуют симметричную тройку, которую можно расположить в виде симметричной звезды (рис. 3.15, б).

Соединение фазных обмоток генератора «треугольником» (см. рис. 3.14, в). Важнейшей особенностью соединения ЭДС трехфазного генератора «треугольником» является отсутствие тока в контуре генератора при отключении внешней цепи. Действительно, в режиме холостого хода генератора ток в контуре, образованном статорными обмотками при их соединении «треугольником», определяется алгебраической суммой фазных ЭДС ($e_A + e_B + e_C$). Эта сумма равна нулю, в чем можно убедиться, сложив как функции мгновенных значений фазных ЭДС, так и их комплексные амплитуды.

В рассматриваемом случае генератор контактирует с внешней цепью тремя точками. На рис. 3.14, в они обозначены как X, Y, Z. Линейные напряжения равны фазным:

$$\dot{U}_{XY} = \dot{U}_A; \quad \dot{U}_{YZ} = \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{ZX} = \dot{U}_C.$$

3.9.3. Виды соединения нагрузок трехфазного генератора и основные структурные варианты трехфазной цепи

Нагрузка трехфазного генератора может иметь сложную и разветвленную структуру, но в целом она представляет собой пассивный трехполюсник. Как известно [4], любой пассивный трехполюсник по отношению к внешней для него цепи может быть заменен эквивалентными «звездой» или «треугольником». Поэтому случаи соединения нагрузок трехфазного генератора «звездой» (рис. 3.16, а) и «треугольником» (рис. 3.16, б) для практики весьма важны.

Поскольку трехфазный генератор и его нагрузки обычно разнесены в пространстве, трехфазная цепь включает в себя три или четыре (в зависимости от ее структуры) соединительных провода, которые образуют трехфазную линию. Причем четвертый провод может применяться только в случае соединения как ЭДС генератора, так и сопротивлений нагрузки «звездой». Он соединяет нейтральные точки генератора и нагрузки (точки

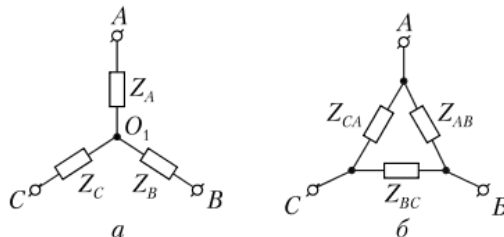


Рис. 3.16. Способы соединения нагрузок трехфазного источника:
а — «звездой»; б — «треугольником»

O и O_1 на рис. 3.18) и называется нейтральным (нулевым) проводом или *нейтралью*. Остальные соединительные провода называются линейными.

В зависимости от видов соединения фазных ЭДС генератора и его нагрузок можно выделить четыре основных структурных варианта трехфазной цепи:

- 1) «звезда» — «звезда»;
- 2) «треугольник» — «треугольник»;
- 3) «звезда» — «треугольник»;
- 4) «треугольник» — «звезда».

Трехфазная цепь — это частный случай цепи синусоидального тока. Поэтому при ее расчете пользуются всеми методами и приемами, разработанными для синусоидальных режимов, и прежде всего символическим методом, а также векторными диаграммами.

Однако учет симметрии действующего в цепи трехфазного источника позволяет выбрать более рациональный подход к расчету и может существенно его упростить. Кроме того, выбор расчетной методики зависит от структуры трехфазной цепи.

Рассмотрим особенности расчета синусоидального режима в трехфазной цепи для перечисленных структурных вариантов.

1. Трехфазная цепь вида «звезда» — «звезда». Данная схема применяется в двух вариантах — как с нейтральным проводом (рис. 3.17), так и без него (рис. 3.18).

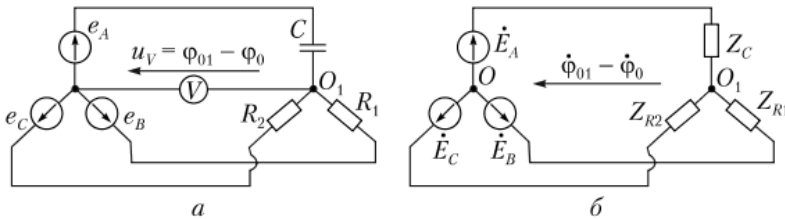


Рис. 3.17. Расчет трехфазной цепи «звезда» — «звезда» без нейтрального провода: a — заданная цепь; b — символическая модель цепи

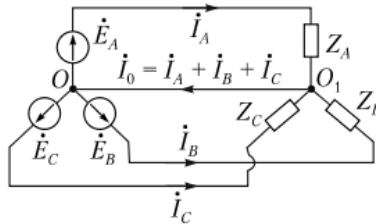


Рис. 3.18. Символическая модель трехфазной цепи вида «звезда» — «звезда» с нейтральным проводом

Наиболее трудоемким для расчета является случай трехфазной цепи вида «звезда» — «звезда» без нейтрального (нулевого) провода при несимметричной нагрузке. Он рассмотрен в нижеследующем примере.

Пример 3.5. На рис. 3.17, a задана трехфазная цепь, содержащая трехфазный генератор, соединенный по схеме «звезда», и нагрузку, также в виде несимметричной «звезды». Параметры нагрузки: $R_1 = R_2 = 100$ Ом; $C = 25$ мкФ. Для трехфазного генератора задана ЭДС $E_A = 200 \sin 400t$ (В). Требуется определить по-

казание вольтметра, включенного между нейтральными точками нагрузки и генератора, измеряющего действующее значение, а также функцию мгновенного значения измеряемого напряжения. Как изменится показание вольтметра, если произойдет пробой конденсатора (короткое замыкание)?

Решение

1. Записываем комплексные амплитуды фазных ЭДС генератора:

$$\dot{E}_A = 200e^{j0} \text{ (В)}; \quad \dot{E}_B = 200e^{-j120^\circ} \text{ (В)}; \quad \dot{E}_C = 200e^{-j240^\circ} \text{ (В)}.$$

2. Находим комплексные сопротивления элементов трехфазной нагрузки:

$$Z_A = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{10^6}{400 \cdot 25} = -j100 \text{ (Ом)};$$

$$Z_B = Z_C = R_1 = R_2 = 100 \text{ (Ом)}. \quad (3.18)$$

3. Переходим к символической модели заданной трехфазной цепи (рис. 3.17, б). Она представляет собой цепь с двумя узловыми точками: O — нейтральная точка генератора; O_1 — нейтральная точка нагрузки. Для расчета режима в такой цепи целесообразно воспользоваться методом узловых потенциалов (параграф 2.3). Примем комплексный потенциал точки O равным нулю. Тогда для комплекса $\dot{\phi}_{01}$ можем записать уравнение

$$\dot{\phi}_{01} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}, \quad (3.19)$$

где Y_A, Y_B, Y_C — комплексные проводимости элементов трехфазной нагрузки. Они обратны соответствующим комплексным сопротивлениям (3.18):

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = 0,01j \text{ (Ом}^{-1}\text{)}; \quad Y_B = Y_C = 0,01 \text{ (Ом}^{-1}\text{)}.$$

После подстановки в равенство (3.19) числовых данных получим следующее значение комплексной амплитуды потенциала нейтральной точки нагрузки:

$$\dot{\phi}_{01} \approx 128e^{j107^\circ} \text{ (В)}.$$

Найденному комплексу соответствует синусоидальная функция времени

$$\phi_{01}(t) = 128 \sin(400t + 107^\circ) \text{ (В)},$$

которая и определяет искомую функцию мгновенного значения напряжения на вольтметре. Его действующее значение равно $128/\sqrt{2} \approx 90$ (В).

При коротком замыкании нагрузки (конденсатора C) в фазе «А» потенциал точки O_1 становится равным потенциалу точки A (см. рис. 3.17, а), а напряжении на вольтметре — фазному напряжению $\dot{U}_A = \dot{E}_A$. Следовательно, вольтметр покажет действующее значение фазного напряжения $200/\sqrt{2} \approx 141$ (В).

Рассмотрим цепь «звезда» — «звезда» с нейтральным проводом (см. рис. 3.18).

Соединение нейтральных точек генератора и нагрузки (O и O_1 на рис. 3.18), обладающего пренебрежительно малым резистивным сопротивлением, выравнивает их потенциалы $\dot{\phi}_{O_1} = \dot{\phi}_O$. В этом случае напряжение на нагрузках «звезды» равно соответствующим фазным напряжениям. Токи в ветвях Z_A, Z_B, Z_C определяются по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C},$$

а ток в нейтральном (нулевом) проводе \dot{I}_0 равен алгебраической сумме фазных токов, т.е.

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Обратим внимание на следующую важную особенность режима при наличии нейтрального провода: независимость режима в каждой фазе нагрузки от режима в остальных двух фазах. Например, обрыв одной из фаз не изменит токов в двух других фазах.

2. Трехфазная цепь вида «треугольник» — «треугольник». Напомним, что при соединении обмоток генератора «треугольником» напряжения между проводами трехфазной линии равны фазным ЭДС генератора. Если пренебречь сопротивлениями линейных проводов, то каждая из сторон нагрузочного «треугольника» оказывается включенной параллельно одной из фазных ЭДС генератора. Ток в каждом из трех сопротивлений нагрузки связан с соответствующим фазным напряжением законом Ома.

3. Трехфазная цепь вида «звезда» — «треугольник». Данная структура сводится к предыдущей («треугольник» — «треугольник») путем эквивалентной замены схемы «звезда» симметричного трехфазного источника (см. рис. 3.14, б) схемой «треугольник» (см. рис. 3.14, в) с помощью соотношений (3.16) и (3.17).

Действительно, роль фазных ЭДС трехфазного источника на эквивалентной схеме «треугольник» (см. рис. 3.14, в) выполняют линейные напряжения заданного генератора (см. рис. 3.14, б).

4. Трехфазная цепь вида «треугольник» — «звезда». Этот случай несложно свести к рассмотренному варианту в примере 3.5, заменив три ЭДС генератора, соединенных в «треугольник», эквивалентной «звездой». Для этого заданные фазные напряжения генератора рассматриваются как линейные напряжения, создаваемые эквивалентной тройкой ЭДС, включенных «звездой». Амплитуды эквивалентных ЭДС, очевидно, в $\sqrt{3}$ меньше заданных фазных напряжений генератора. Их начальные фазы несложно найти из векторной диаграммы.

3.9.4. Особенности расчета симметричного режима в трехфазной цепи

Симметричную нагрузку трехфазного генератора можно всегда заменить эквивалентной симметричной «звездой». По причине симметрии потенциал нейтральной точки эквивалентной «звезды» равен потенциалу нейтральной точки генератора (его ЭДС также считаем соединенными «звездой»). Соединение этих точек нейтральным проводом не приводит к изменению режима в цепи.

Таким образом, симметричную трехфазную цепь любого вида можно свести к структуре вида «звезда» — «звезда» с нейтральным проводом. Наличие нейтрального провода, как уже отмечалось, приводит к независимости режима в каждой фазе нагрузки от остальных. Поэтому можно рассчитывать режим только в одной фазе, например в фазе «А», оборвав фазы «В» и «С». Полученные результаты с учетом сдвига фазы на $\pm 120^\circ$ справедливы и для фаз «В» и «С». Следовательно, расчет симметричной трехфазной цепи сводится к расчету режима в однофазной цепи.

Контрольные вопросы и задания

1. Что понимается под мгновенным i , максимальным I_m и действующим значениями периодического переменного тока?
2. Запишите математическую связь между действующим I и мгновенным $i(t)$ значениями периодического тока.
3. Пользуясь соотношением (3.3), найдите действующее значение периодической последовательности прямоугольных однополярных импульсов с периодом T длительностью $T/4$.
4. Как связано действующее значение синусоидального тока I с его амплитудным значением I_m ? Почему действующее значение I не зависит от начальной фазы этого тока?
5. Какой вид имеет система уравнений Кирхгофа для линейной цепи в синусоидальном режиме?
6. Что понимается под комплексной плоскостью (КП)? Запишите комплекс $a + jb = -5 + j5$ в показательной форме записи, т.е. в виде $Ae^{j\alpha}$. Изобразите этот комплекс на КП.
7. По какому принципу осуществляется изображение синусоидальной функции времени $I_m \sin(\omega t + \varphi)$ на КП? Какие из параметров учитываются при таком изображении? Что такое комплексная амплитуда? Запишите для функции $i(t) = 2\sin(1000t + 30^\circ)$ соответствующую комплексную амплитуду I_m .
8. Что понимается под комплексом действующего значения? Как он связан с комплексной амплитудой?
9. Каким образом по комплексу, изображающему синусоидальную функцию $i(t)$, записать комплекс, изображающий: а) ее производную di/dt ; б) интеграл $\int i(t)dt$?
10. Запишите соотношения, связывающие комплексы, изображающие напряжения на элементах R , L , C , с комплексом протекающего в них тока (в синусоидальном режиме).
11. Что понимается под комплексным сопротивлением элемента (или участка цепи)?
12. На частоте $\omega = 2000$ рад/с найдите комплексные сопротивления: а) резистора $R = 100$ Ом; б) индуктивности $L = 0,1$ Гн; в) емкости $C = 10$ мкФ. Чему равно полное комплексное сопротивление ветви, содержащей рассмотренные элементы, при их последовательном включении?
13. Какой вид имеет система уравнений Кирхгофа для линейной цепи в синусоидальном режиме относительно комплексов токов и напряжений?
14. Изложите порядок расчета синусоидального режима символическим методом. Воспользуйтесь этим методом для расчета токов в ветвях цепи, показанной на рис. 3.8, в случае обрыва индуктивной ветви.
15. Постройте векторные диаграммы элементов R , L , C , изобразив для каждого из них векторы тока и напряжения.
16. Изложите идею расчета периодического несинусоидального режима в линейной цепи. Каким образом здесь применяется принцип наложения, справедливый в линейных системах?
17. Определите функцию мгновенного значения напряжения на зажимах ветви, содержащей последовательно включенные резистор $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 0,1$ Гн, если известен протекающий ток $i(t) = 0,5 + 0,5\sin 1000t$ (А).
18. Как находится действующее значение периодического тока $i(t)$ по его разложению в ряд Фурье? Вычислите действующее значение функции $i(t) = 1 + 0,5\sin \omega t - 0,5 \sin 2\omega t$.
19. Что понимается под трехфазным симметричным синусоидальным источником?

20. Изобразите применяемые способы соединения фазных обмоток трехфазного генератора, а также их нагрузок.

21. Какова методика расчета несимметричного режима в трехфазной цепи «звезда» — «звезда» без нулевого провода.

22. Отметьте главные особенности расчета симметричных синусоидальных режимов в трехфазной цепи. Поясните возможность сведения расчета режима в симметричной трехфазной цепи к расчету однофазной цепи.

Глава 4

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКОВ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- понятия мгновенной, активной, реактивной, полной мощностей и их математическую связь;
- условие передачи наибольшей активной мощности от источника к потребителю;

уметь

- рассчитывать мгновенную, активную, реактивную и полную мощности для конкретной цепи в синусоидальном режиме;
- рассчитывать активную мощность, потребляемую при периодическом несинусоидальном режиме;

владеть

- методикой подбора параметров потребителя с целью обеспечения передачи наибольшей активной мощности.
-

4.1. Мгновенная мощность

Рассмотрим достаточно общий случай, когда к зажимам источника электрической энергии подключен приемник (рис. 4.1), функции мгновенных значений напряжения и тока на входе приемника обозначим $u(t)$, $i(t)$.

Количество энергии, поступающее в приемник на интервале времени $0-t$ при указанных на рис. 4.1 положительных направлениях напряжения и тока, равно

$$W = \int_0^t u(t)i(t)dt. \quad (4.1)$$

Если при интегрировании в правой части соотношения (4.1) результат положителен, то приемник на рассматриваемом интервале времени потре-

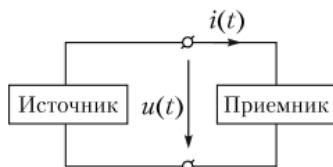


Рис. 4.1. К зажимам источника электрической энергии подключен приемник. Показаны традиционные положительные направления тока и напряжения

бил энергию от источника. При отрицательном значении интеграла приемник на данном временном интервале отдал энергию источнику.

Произведение $u(t)i(t)$, стоящее под знаком интеграла в формуле (4.1), определяет быстроту поступления энергии от источника, обозначается $p(t)$ и называется **мгновенной мощностью**:

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Мгновенная мощность является функцией времени. Для периодического режима $p(t)$ — периодическая функция времени. Знак мгновенной мощности $p(t)$ характеризует направление передачи энергии. Если $p(t) > 0$, энергия поступает от источника в приемник. Если $p(t) < 0$, приемник отдает энергию источнику.

В случае установившегося синусоидального режима $u(t)$ и $i(t)$ — синусоидальные функции одной частоты, в общем случае отличающиеся по фазе:

$$u(t) = U_m \sin \omega t; \quad i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (4.2)$$

Мгновенная мощность при этом равна

$$p(t) = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi).$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим преобразованием

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

для функции мгновенной мощности получаем

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \quad (4.3)$$

На рис. 4.2 построены временные зависимости $u(t)$, $i(t)$ и $p(t)$ в соответствии с формулами (4.2) и (4.3) для случая $\varphi > 0$ (когда ток отстает по фазе от напряжения на угол φ).

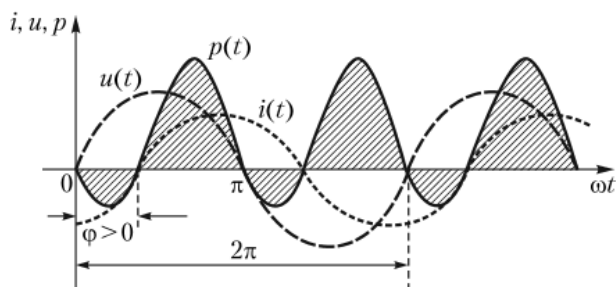


Рис. 4.2. Временные зависимости напряжения, тока и мгновенной мощности на входе пассивного двухполюсника в синусоидальном режиме

Согласно формуле (4.3) $p(t)$ — периодическая функция, ее период в два раза меньше периодов тока и напряжения. В течение периода функция $p(t)$ принимает как отрицательные, так и положительные значения:

- на интервале $0 \leq \omega t \leq \varphi$ энергия поступает в направлении от приемника к источнику, так как $p(t) < 0$;
- на интервале $\varphi \leq \omega t \leq \pi$ энергия передается от источника к приемнику, так как $p(t) > 0$.

Количество энергии, поступающей в том или ином направлении, определяется площадью под кривой $p(t)$ на соответствующем интервале. Соотно-

шение между «положительной» ($\varphi \leq \omega t < \pi$) и «отрицательной» ($0 \leq \omega t < \varphi$) площадями зависит от величины угла φ и характеризует свойства приемника как потребителя энергии. Однако использование зависимости $p(t)$ для оценки потребительских свойств приемника сложно. В связи с этим для периодических режимов вводится понятие активной мощности.

4.2. Активная мощность

Под **активной мощностью** P понимается среднее за период переменного тока значение мгновенной мощности, т.е.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt. \quad (4.4)$$

В синусоидальном режиме в соответствии с формулой (4.3) для активной мощности имеем

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T \cos \varphi dt - \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt.$$

Второе слагаемое в последнем выражении при интегрировании дает ноль. Приходим к следующему соотношению:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (4.5)$$

Обращаем внимание, что U, I — действующие значения синусоидальных напряжения и тока.

Вывод. Для установившегося синусоидального режима активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока на косинус угла сдвига фаз между ними.

Предполагаем, что приемник содержит только пассивные элементы R, L, C ; при этом $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$ и активная мощность P — величина сугубо положительная, т.е. $P \geq 0$. Рассмотрим выражение (4.5) для частных случаев приемников электрической энергии.

1. Резистор. Для резистора сдвиг фаз между током и напряжением φ равен нулю, а $\cos \varphi = 1$. Активная мощность

$$P_R = UI = IRI = I^2 R = U^2 / R \geq 0.$$

Мгновенная мощность в резисторе $p_R(t) = u(t)i(t) = i^2(t)R$ также не принимает отрицательных значений (рис. 4.3).

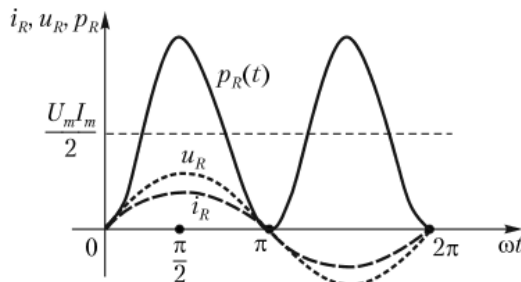


Рис. 4.3. Мгновенная мощность в резисторе $p_R(t)$ не принимает отрицательных значений

2. Индуктивность. В индуктивности напряжение опережает ток на 90° , т.е. $\varphi = 90^\circ$; $\cos \varphi = 0$; $P_L = 0$. Кривая мгновенной мощности $p_L(t)$ на рис. 4.4 симметрична относительно оси времени. Положительная и отрицательная площади под кривой $p_L(t)$ на периоде одинаковы.

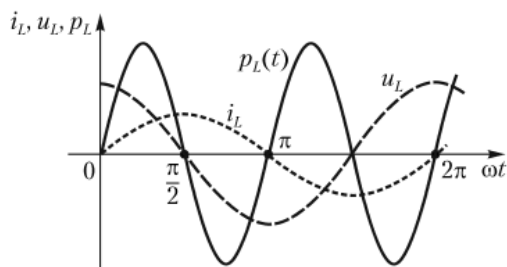


Рис. 4.4. Кривая мгновенной мощности в индуктивности $p_L(t)$ симметрична относительно оси времени. За время, кратное периоду, индуктивность не потребляет энергии от источника

Таким образом, за время, равное или кратное периоду, индуктивность не потребляет энергию от источника. В этом случае энергия источника периодически запасается в магнитном поле индуктивности, затем полностью возвращается источнику.

3. Емкость. Для емкости $\varphi = -90^\circ$; $\cos \varphi = 0$, поэтому $P_C = 0$. Идеальный емкостной элемент, как накопитель энергии, периодически запасает энергию источника в электрическом поле, а затем полностью возвращает накопленную энергию источнику.

За время, равное или кратное периоду, емкость не потребляет энергию источника. Об этом свидетельствуют величина $P_C = 0$, а также кривая мгновенной мощности $p_C(t)$ на рис. 4.5.

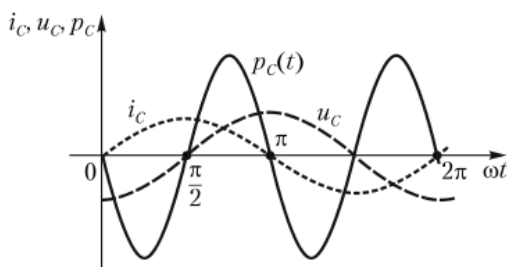


Рис. 4.5. Кривая мгновенной мощности в емкостном элементе $p_C(t)$ симметрична относительно оси времени. За время, кратное периоду, емкость не потребляет энергии от источника

Можно показать, что для любого линейного пассивного двухполюсника, потребляемая им активная мощность равна сумме активных мощностей, выделяемых на всех его резисторах:

$$P = \sum P_R = \sum I^2 R.$$

Выводы. Таким образом, в установившемся синусоидальном режиме мерой потребления электрической энергии является активная мощность P (энергия, потребляемая в единицу времени). Для приемника электрической энергии активная мощность отлична от нуля только при наличии в его схеме резистивных элементов. Поэтому сопротивление резистора называют активным.

Индуктивности и емкости активной мощности не потребляют. Их называют **реактивными элементами**, а величины $X_L = \omega L$ и $X_C = 1/(\omega C)$ — **реактивными сопротивлениями**. Еще раз напомним, что реактивные сопротивления зависят от частоты.

Опытное определение рассмотренных энергетических характеристик (прежде всего активной мощности P) может быть осуществлено либо при помощи трех приборов, измеряющих ток I , напряжение U и сдвиг фаз φ между ними на входе приемника, либо с использованием специального прибора — ваттметра.

4.3. Понятия полной и реактивной мощностей

Полной мощностью S называется величина, равная произведению действующих значений напряжения и тока на входе пассивного двухполюсника:

$$S = UI. \quad (4.6)$$

Из сравнения выражений для полной и активной мощностей (4.6) и (4.5) следует

$$P \leq S.$$

Полную мощность можно трактовать как наибольшее из возможных значений для активной мощности при заданных действующих значениях напряжения и тока.

Отношение активной мощности к полной называют **коэффициентом мощности**, как следует из вышеизложенного, он равен $\cos \varphi = P/S$.

Реактивной мощностью называется величина, равная

$$Q = UI \sin \varphi, \quad (4.7)$$

где U, I — действующие значения напряжения и тока на входе пассивного двухполюсника; φ — угол сдвига фаз между ними.

Реактивная мощность — расчетная характеристика, применяется главным образом в электроэнергетике.

При заданных действующих значениях напряжения и тока U, I величина Q определяет сдвиг фаз между током и напряжением с учетом его знака (в отличие от активной мощности, которая не определяет знак φ).

Если $Q > 0$, ток на входе пассивного двухполюсника отстает от напряжения на угол φ ($\varphi > 0$).

Если $Q < 0$, входной ток имеет опережающий по отношению к напряжению характер ($\varphi < 0$).

В предельных случаях:

- для индуктивности ($\varphi = 90^\circ$, $\sin \varphi = 1$)

$$Q_L = UI = \omega LI \cdot I = I^2 \omega L = I^2 X_L > 0;$$

- для емкости ($\varphi = -90^\circ$, $\sin \varphi = -1$)

$$Q_C = -UI = -\left[\frac{1}{\omega C} \cdot I\right] \cdot I = -I^2 \cdot \frac{1}{\omega C} = -I^2 X_C < 0.$$

В общем случае можно показать, что реактивная мощность на входе пассивного двухполюсника равна сумме реактивных мощностей, «потребляемых» его индуктивными и емкостными элементами, т.е.

$$Q = \sum Q_L + \sum Q_C$$

Хотя сочетание слов «потребляемая реактивная мощность» прямого физического смысла не имеет, в инженерной практике им пользуются.

Как следует из соотношений (4.5)–(4.7), величины P , S , Q связаны между собой соотношением

$$P^2 + Q^2 = S^2$$

4.4. Единицы измерения мгновенной, активной, полной и реактивной мощностей

Хотя размерности мгновенной, активной, полной и реактивной мощностей одинаковы, единицам их измерения даны различные названия.

Единица измерения мгновенной и активной мощностей называется **ватт**:

$$[P] = [p] = 1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А.}$$

Единица измерения полной мощности называется **вольт-ампер**:

$$[S] = 1 \text{ ВА} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А.}$$

Единица измерения реактивной мощности называется **вольт-ампер реактивный**:

$$[Q] = 1 \text{ ВАР} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А.}$$

4.5. Условие передачи наибольшей активной мощности от активного двухполюсника к пассивному в синусоидальном режиме

Рассмотрим достаточно общий случай, когда к зажимам активного двухполюсника подключен пассивный (рис. 4.6, *a*). Активный двухполюсник является источником электрической энергии, а пассивный — потребителем, или нагрузкой.

Решим следующую задачу. Считая параметры активного двухполюсника заданными и неизменными, определим величину комплексного входного сопротивления пассивного двухполюсника, при которой от источника в нагрузку передается наибольшая активная мощность (обозначаем ее P_n).

Получим выражение, связывающее P_n с параметрами источника и нагрузки. С этой целью представим активный и пассивный двухполюсники

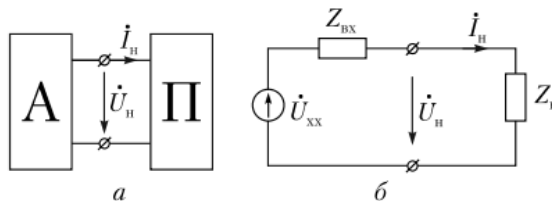


Рис. 4.6. К условию передачи наибольшей активной мощности от активного двухполюсника к пассивному:

a — общее изображение случая, когда нагрузкой активного двухполюсника является пассивный двухполюсник; *б* — эквивалентная схема после замены активного и пассивного двухполюсников их простейшими схемами замещения

простейшими схемами замещения. По теореме об эквивалентном генераторе активный двухполюсник заменяем источником ЭДС величиной \dot{U}_{xx} (комплекс напряжения на разомкнутых зажимах активного двухполюсника) и включенным последовательно комплексным сопротивлением $Z_{вх}$ (входное сопротивление активного двухполюсника).

Пассивный двухполюсник заменяем эквивалентным ему входным сопротивлением, обозначим его $Z_{н}$. После указанной замены приходим к неразветвленной цепи (рис. 4.6, б), в которой протекает ток $\dot{I}_{н}$, равный току на входе пассивного двухполюсника исходной схемы. Для определенности полагаем, что указанные на схемах и фигурирующие в расчетах комплексы являются комплексами действующего значения.

Из эквивалентной схемы на рис. 4.6, б ток $\dot{I}_{н}$ определяется по закону Ома:

$$\dot{I}_{н} = \dot{U}_{xx} / (Z_{вх} + Z_{н}). \quad (4.8)$$

С учетом алгебраической формы записи комплексов $Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$ и $Z_{н} = R_{н} + jX_{н}$ уравнение (4.8) принимает вид

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{xx}}{(R_{вх} + R_{н}) + j(X_{вх} + X_{н})}. \quad (4.9)$$

Из комплексного уравнения (4.9) следует уравнение для модулей

$$I = \frac{U_{xx}}{\sqrt{(R_{вх} + R_{н})^2 + (X_{вх} + X_{н})^2}}. \quad (4.10)$$

Активная мощность, потребляемая нагрузкой, выделяется только на резистивной составляющей, т.е. $P_{н} = I_{н}^2 R_{н}$. С учетом формулы (4.10) для $P_{н}$ получаем выражение

$$P_{н} = \frac{U_{xx}^2 R_{н}}{(R_{вх} + R_{н})^2 + (X_{вх} + X_{н})^2}. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) связывает активную мощность нагрузки с параметрами источника и нагрузки.

По условию задачи величины U_{xx} , $R_{вх}$ и $X_{вх}$ (параметры источника) считаем неизменными. Параметры нагрузки $R_{н}$ и $X_{н}$ могут изменяться.

Проведем исследование соотношения (4.11) и выясним, при каких величинах $R_{н}$ и $X_{н}$ пассивный двухполюсник потребляет от источника наибольшую мощность.

Разбиваем исследование соотношения (4.11) на два этапа.

1. Считая $R_{н}$ неизменным и заданным, найдем величину реактивной составляющей $X_{н}$, при которой соотношение (4.11) достигает максимума. Данное требование равносильно требованию минимума выражения, стоящего в его знаменателе: $(R_{вх} + R_{н})^2 + (X_{вх} + X_{н})^2$.

В записанной сумме оба слагаемых не могут быть отрицательными, ее минимум достигается только при $(X_{вх} + X_{н}) = 0$. Из этого уравнения следует условие для реактивной составляющей сопротивления нагрузки, необходимое для обеспечения наибольшей активной мощности в нагрузке при фиксированном значении $R_{н}$:

$$X_{н} = -X_{вх}. \quad (4.12)$$

При выполнении равенства (4.12) активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна

$$P_{\text{н}} = \frac{U_{\text{xx}}^2 R_{\text{н}}}{(R_{\text{вх}} + R_{\text{н}})^2}. \quad (4.13)$$

2. Исследуем выражение (4.13) на экстремум при изменении величины $R_{\text{н}}$:

$$\frac{dP}{dR_{\text{н}}} = U_{\text{xx}}^2 \left[\frac{1}{(R_{\text{вх}} + R_{\text{н}})^2} - \frac{2R_{\text{н}}}{(R_{\text{вх}} + R_{\text{н}})^3} \right] = U_{\text{xx}}^2 \cdot \frac{R_{\text{вх}} + R_{\text{н}} - 2R_{\text{н}}}{(R_{\text{вх}} + R_{\text{н}})^3} = U_{\text{xx}}^2 \cdot \frac{R_{\text{вх}} - R_{\text{н}}}{(R_{\text{вх}} + R_{\text{н}})^3} = 0.$$

Из последнего уравнения следует

$$R_{\text{н}} = R_{\text{вх}}. \quad (4.14)$$

Таким образом, наибольшая активная мощность в нагрузке активного двухполюсника обеспечивается при выполнении двух условий (4.12) и (4.14):

- реактивная составляющая сопротивления нагрузки равна по величине, но противоположна по знаку реактивной составляющей внутреннего сопротивления источника;
- резистивная составляющая сопротивления нагрузки равна резистивной составляющей внутреннего сопротивления источника.

Два вещественных условия (4.12) и (4.14) можно объединить в одно уравнение для комплексов: $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} + jX_{\text{н}} = R_{\text{вх}} - jX_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}}^*$, где $Z_{\text{вх}}^*$ — комплекс, сопряженный с комплексом $Z_{\text{вх}}$.

Вывод. Для передачи наибольшей мощности от активного двухполюсника в нагрузку сопротивление нагрузки должно быть комплексно сопряжено с входным сопротивлением активного двухполюсника:

$$Z_{\text{н}} = Z_{\text{вх}}^*. \quad (4.15)$$

При выполнении условия (4.15) мощность, передаваемая в нагрузку, в соответствии с выражением (4.11) равна

$$P_{\text{н max}} = \frac{U_{\text{xx}}^2}{4R_{\text{н}}}.$$

Поскольку $R_{\text{вх}} = R_{\text{н}}$, на внутреннем резистивном сопротивлении источника выделяется точно такая же мощность. Поэтому коэффициент полезного действия передачи энергии в рассматриваемом режиме равен 50%.

Режим, при котором от источника в нагрузку передается наибольшая из возможных мощность, называется **согласованным**. Процесс обеспечения условия (4.15) называют **согласованием**.

Обратим внимание, что соотношение (4.15) равносильно условию резонанса в неразветвленном контуре эквивалентной цепи, показанной на рис. 4.6, б.

Пример 4.1. Для цепи, изображенной на рис. 4.7 (символическая модель), заданы: действующее значение тока синусоидального источника $I_{\text{К}} = 5 \text{ А}$, его частота $\omega = 2000 \text{ рад/с}$; $R_1 = R = 100 \text{ Ом}$; $C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$.

Требуется: 1) подобрать величины активной $R_{\text{н}}$ и реактивной $X_{\text{н}}$ составляющих комплексного сопротивления нагрузки, при которых происходит отбор наибольшей мощности в нагрузку; 2) определить мощность нагрузки в согласованном режиме $P_{\text{н max}}$; 3) найти показание амперметра, измеряющего действующее значение.

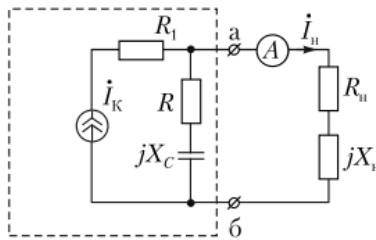


Рис. 4.7. Схема к примеру 4.1, иллюстрирующему методику подбора параметров нагрузки с целью передачи наибольшей активной мощности в нагрузку

Решение

1. Расчет $Z_n = R_n + jX_n$. Для получения в нагрузке наибольшей активной мощности сопротивление нагрузки должно быть комплексно сопряжено с входным сопротивлением активного двухполюсника, подключенного к нагрузке. Активный двухполюсник (см. рис. 4.7) по отношению к зажимам «а», «б» обладает сопротивлением

$$Z_{\text{вх}} = R - j \frac{1}{\omega C} = 100 - j \frac{10^6}{2000 \cdot 5} = 100 - j100 \text{ Ом.}$$

Следовательно, $Z_n = R_n + jX_n = Z_{\text{вх}}^* = 100 + j100 \text{ Ом.}$

Полученное комплексное сопротивление Z_n можно реализовать последовательным соединением резистора $R_n = 100 \text{ Ом}$ и индуктивности L_n , определяемой из соотношения $\omega L_n = X_n = 100 \text{ Ом}$; в результате $L_n = 0,05 \text{ Гн}$.

2. Расчет максимальной мощности $P_{n \text{ max}}$. Рассмотрим активный двухполюсник на рис. 4.7 в режиме холостого хода его зажимов «а», «б» (обрываем нагрузочную ветвь).

Напряжение на разомкнутых зажимах «а», «б» вызвано протеканием тока \dot{I}_K через элементы R, C . Поэтому

$$\dot{U}_{\text{xxаб}} = \dot{I}_K [R + (-j/(\omega C))].$$

Для определенности примем начальную фазу тока источника равной нулю, тогда его комплекс равен $\dot{I}_K = 5e^{j0} \text{ А}$, а для комплекса напряжения холостого хода в этом случае получаем такой результат:

$$\dot{U}_{\text{xxаб}} = 5e^{j0} (100 - j100) = 5e^{j0} \cdot 100\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 500\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ В.}$$

Модуль этого комплекса равен действующему значению напряжения холостого хода

$$U_{\text{xxаб}} = 500\sqrt{2} \text{ (В).}$$

Активную мощность в нагрузке вычисляем по формуле

$$P_{n \text{ max}} = \frac{U_{\text{xx}}^2}{4R_{\text{вх}}} = \frac{(500\sqrt{2})^2}{4 \cdot 100} = 1250 \text{ (Вт).}$$

3. Показание амперметра. Амперметр в цепи на рис. 4.7 измеряет действующее значение тока нагрузки I_n . Его комплекс равен

$$\dot{I}_n = \frac{U_{\text{xx}}}{Z_{\text{вх}} + Z_n} = \frac{\dot{U}_{\text{xx}}}{R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} + R_n + jX_n} = \frac{\dot{U}_{\text{xx}}}{R_n + R_{\text{вх}}} = \frac{500\sqrt{2}e^{-j45^\circ}}{200} = 2,5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

Амперметр показывает модуль найденного комплекса: $A \rightarrow 2,5\sqrt{2} \text{ А}$.

4.6. Активная мощность, потребляемая линейным пассивным двухполюсником в периодическом несинусоидальном режиме

Если на входе линейного пассивного двухполюсника действует периодический несинусоидальный источник, в установившемся режиме токи в ветвях и напряжения на участках двухполюсника являются периодическими несинусоидальными функциями времени. Активная мощность, потребляемая двухполюсником от источника, в этом случае определяется общим выражением (4.4)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt,$$

где $u(t)$, $i(t)$ — соответственно функции мгновенных значений напряжения и тока на входе двухполюсника.

Примем во внимание, что для линейной цепи функции $u(t)$ и $i(t)$ имеют один и тот же гармонический состав, определяемый источником. Тогда из соотношения (4.4) можно получить следующее выражение:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots = \sum P_k, \quad (4.16)$$

где U_k и I_k — действующие значения напряжения и тока k -й гармонической составляющей (включая нулевую гармонику, т.е. постоянную составляющую); φ_k — сдвиг фаз между напряжением и током k -й гармоники; P_k — активная мощность, потребляемая двухполюсником на k -й гармонике; $k = 0, 1, 2, \dots$

Вывод. Активная мощность на входе пассивного двухполюсника равна сумме активных мощностей, обусловленных каждой из гармонических составляющих тока (напряжения).

Пример 4.2. На входе пассивного двухполюсника, изображенного на рис. 4.8, действует периодическое напряжение, заданное в виде гармонического ряда

$$u_{\text{вх}}(t) = 120 + 240\sqrt{2} \sin 2000t + 100 \sin 4000t \text{ (В)}.$$

Параметры элементов двухполюсника равны $R = \frac{200}{3}$ Ом; $L = 0,025$ Гн; $C = 2,5$ мкФ.

Определить активную мощность, потребляемую двухполюсником от источника.

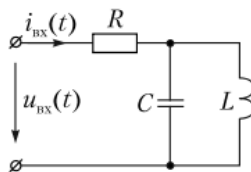


Рис. 4.8. Схема к примеру 4.2, иллюстрирующему расчет активной мощности при периодическом несинусоидальном режиме

Решение

1. Расчет функции мгновенного значения тока на входе двухполюсника $i_{\text{вх}}(t)$.

Искомая функция $i_{\text{вх}}(t)$ содержит те же гармонические составляющие, что и напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, т.е. имеет вид

$$i_{\text{вх}}(t) = I_0 + I_{m1} \sin(2000t + \alpha_1) + I_{m2} \sin(4000t + \alpha_2).$$

А. Расчет по постоянной составляющей. Так как индуктивность на нулевой гармонике проявляет себя как короткое замыкание, то

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{120 \cdot 3}{200} = 1,8 \text{ А.}$$

Б. Расчет по первой гармонике $\omega_1 = 2000$ рад/с.

Вычисляем комплексное входное сопротивление двухполюсника по первой гармонике:

$$Z_{\text{вх}}^{(1)} = R + \frac{j\omega_1 L \cdot \left(-j \frac{1}{\omega_1 C}\right)}{j\omega_1 L - j \frac{1}{\omega_1 C}} = \frac{200}{3} + j \frac{200}{3} = \frac{200}{3} \sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Определяем комплексную амплитуду входного тока по первой гармонике:

$$\dot{i}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{Z_{\text{вх}}^{(1)}} = \frac{240\sqrt{2}e^{j0}}{\frac{200}{3} \cdot \sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 3,6e^{-j45^\circ} \text{ (А).}$$

В. Расчет по второй гармонике $\omega_2 = 4000$ рад/с.

Комплексные сопротивления индуктивности и емкости цепи, показанной на рис. 4.8, на второй гармонике равны

$$Z_L^{(2)} = j\omega_2 L = j4000 \cdot 0,025 = j100 \text{ Ом;}$$

$$Z_C^{(2)} = -j \frac{1}{\omega_2 C} = -j \frac{10^6}{4000 \cdot 2,5} = -j100 \text{ Ом.}$$

Ввиду равенства модулей комплексов $Z_L^{(2)}$ и $Z_C^{(2)}$ комплексная проводимость параллельного участка обращается в ноль:

$$\frac{1}{Z_L^{(2)}} + \frac{1}{Z_C^{(2)}} = Y_L^{(2)} + Y_C^{(2)} = 0.$$

Следовательно ток на входе по второй гармонической составляющей отсутствует ($\dot{I}_{m2} = 0$).

II. Активную мощность, потребляемую заданным двухполюсником, вычисляем по выражению (4.16):

$$P = U_0 I_0 + \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} \frac{I_{m1}}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1.$$

Слагаемое, соответствующее гармонике ω_2 , в данном выражении отсутствует, так как ток на входе по этой гармонике равен нулю. На частоте $\omega_2 = 4000$ рад/с не происходит обмена энергиями между источником и двухполюсником.

Таким образом, активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником от источника, равна

$$P = 120 \cdot 1,8 + \frac{240\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{3,6}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ = 648 \text{ Вт.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что понимается под мгновенной мощностью, потребляемой пассивным двухполюсником? Как определить функцию $p(t)$ по известным функциям $u(t)$ и $i(t)$ на его входе (см. рис. 4.1)?

2. Источник в цепи, показанной на рис. 4.1, обеспечивает напряжение $u(t) = 50 \sin \omega t$ (В). Найдите и постройте графики мгновенной мощности $p(t)$, потребля-

емой приемником в следующих случаях: а) $i(t) = 0,1\sin \omega t$ (А); б) $i(t) = 0,1\cos \omega t$ (А); в) $i(t) = -0,1\cos \omega t$ (А). Нарисуйте простейшую схему замещения приемника для всех заданных случаев.

3. Что понимается под активной мощностью P , потребляемой приемником в периодическом режиме?

4. Запишите выражение, связывающее активную мощность P , потребляемую пассивной схемой в синусоидальном режиме, с амплитудами и начальными фазами напряжения и тока на ее входе, а именно: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$; $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$.

5. Напряжение и ток на входе пассивного двухполюсника равны $u(t) = 10\sin \omega t$ (В); $i(t) = 0,1\sin(\omega t - 45^\circ)$ (А). Определите активную мощность P , потребляемую двухполюсником.

6. Зависит ли активная мощность от знака угла сдвига между напряжением и током на входе приемника?

7. Что понимается под полной мощностью S ?

8. Почему активная мощность P не может превышать полной мощности S ?

9. Дайте определение реактивной мощности Q . Определите Q , если в цепи, показанной на рис. 4.1, $u(t) = 10\sin(500t + 30^\circ)$ (В); $i(t) = 0,5\cos 500t$ (А).

10. Запишите названия, используемые для единиц измерения мгновенной, активной, полной и реактивных мощностей.

11. Запишите общее выражение, связывающее комплексное сопротивление нагрузки Z_n активного двухполюсника в синусоидальном режиме с его комплексным входным сопротивлением $Z_{вх}$, из условия передачи в нагрузку наибольшей активной мощности. Определите $Z_n = R_n + jX_n$, если: а) $Z_{вх} = 100e^{j45^\circ}$ (Ом); б) $Z_{вх} = 100e^{-j45^\circ}$ (Ом).

12. Определите активную мощность, потребляемую пассивным двухполюсником в периодическом несинусоидальном режиме, если напряжение и ток на его входе равны

$$u(t) = 10 + 10\sin 500t + 10\cos 1000 t \text{ (В);}$$
$$i(t) = 0,2 + 0,2\sin(500t - 45^\circ) + 0,2\cos 1000 t \text{ (А).}$$

Глава 5

ПАССИВНЫЙ ДВУХПОЛЮСНИК В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА. РЕЗОНАНСЫ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- вид простейших схем замещения пассивных двухполюсников в синусоидальном режиме;
- общее определение и условие существования резонансов напряжений и токов;
- особенности частотно-избирательных свойств последовательного и параллельного контуров и основные их характеристики (добротность, характеристическое сопротивление, полоса пропускания);

уметь

- рассчитывать параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения пассивного двухполюсника в синусоидальном режиме и частоту резонанса для заданного двухполюсника;

владеть

- методикой подбора значений параметров элементов R , L , C для обеспечения существования состояния резонанса на заданной частоте.

5.1. Простейшие схемы замещения пассивного двухполюсника в синусоидальном режиме

Отношение комплексов напряжения и тока на входе пассивного двухполюсника (рис. 5.1, *a*) называется его **комплексным входным сопротивлением**:

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U} / \dot{I}.$$

Для линейной цепи $Z_{\text{вх}}$ определяется схемой и величинами R , L , C самого двухполюсника, а также частотой источника. При фиксированной частоте $Z_{\text{вх}}$ — параметр двухполюсника.

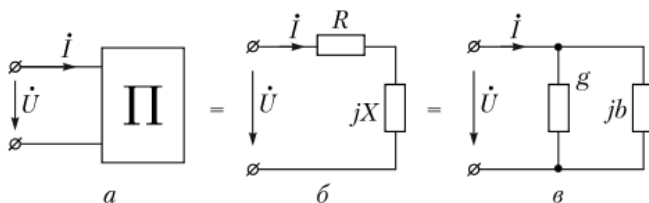


Рис. 5.1. Простейшие схемы замещения пассивного двухполюсника в синусоидальном режиме:

a — символическая модель пассивного двухполюсника; *б* — последовательная схема замещения; *в* — параллельная схема замещения

Представим комплекс $Z_{\text{вх}}$ в алгебраической форме записи:

$$Z_{\text{вх}} = R + jX, \quad (5.1)$$

где R и X — вещественная и мнимая части комплексного входного сопротивления.

Выражению (5.1) соответствует символическая схема, включающая два последовательных элемента (рис. 5.1, б). Один из них обладает резистивным сопротивлением R , другой — реактивным сопротивлением jX . При $X > 0$ реактивный элемент реализуется индуктивностью — $Z_l = j\omega L = jX_l$; при $X < 0$ реактивный элемент с сопротивлением jX реализуется емкостью

$$Z_c = -j \frac{1}{\omega C} = j \left[-\frac{1}{\omega C} \right].$$

Обращаем внимание, что величины R и X зависят от частоты. Вещественная часть R комплекса $Z_{\text{вх}}$ на всех частотах величина неотрицательна ($R \geq 0$). Мнимая часть X с частотой может изменять не только величину, но и знак (характер). Поэтому вектор, изображающий комплексное входное сопротивление пассивного двухполюсника, располагается в правой половине комплексной плоскости (рис. 5.2).

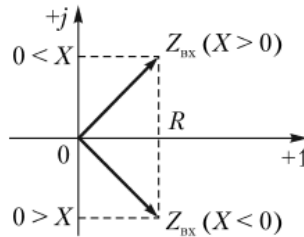


Рис. 5.2. Ориентация на комплексной плоскости вектора комплексного входного сопротивления при индуктивном ($X > 0$) и емкостном ($X < 0$) характерах реактивности

Схему, изображенную на рис. 5.1, б, называют *последовательной схемой замещения пассивного двухполюсника*. Обратная комплексу $Z_{\text{вх}}$ величина называется **комплексной входной проводимостью** пассивного двухполюсника:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}} = \frac{1}{R + jX} \quad (5.2)$$

Представим $Y_{\text{вх}}$ в алгебраической форме записи, домножив числитель и знаменатель в правой части формулы (5.2) на $(R - jX)$:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{R + jX} \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{(-X)}{R^2 + X^2}.$$

Обозначаем

$$\frac{R}{R^2 + X^2} = g; \quad (5.3)$$

$$\frac{(-X)}{R^2 + X^2} = b. \quad (5.4)$$

Тогда для $Y_{\text{вх}}$ имеем

$$Y_{\text{вх}} = g + jb, \quad (5.5)$$

где g и b — соответственно вещественная и мнимая части комплексной входной проводимости.

Выражению (5.5) соответствует символическая схема, содержащая два элемента, включенных параллельно (рис. 5.1, *в*). Один элемент обладает вещественной проводимостью g (резистор), другой — мнимой jb .

Если $b > 0$, то элемент с проводимостью jb является емкостью: $Y_C = j\omega C = jb$.

Если $b < 0$, то элемент с проводимостью jb реализуется индуктивностью:

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = j\left[-\frac{1}{\omega L}\right] = jb.$$

Величины g и b зависят от частоты. Вещественная часть g не может принимать отрицательных значений и лишь в идеальном случае приближается к нулю ($g \geq 0$). Мнимая часть комплексной входной проводимости b с частотой может менять как величину, так и знак (характер). Поэтому вектор $Y_{вх}$ так же как и $Z_{вх}$, лежит в правой половине комплексной плоскости.

Схему на рис. 5.1, *в* называют *параллельной схемой замещения пассивного двухполюсника*.

Таким образом, простейшая схема замещения пассивного двухполюсника содержит два элемента: резистор и реактивный элемент (либо индуктивность, либо емкость). Возможны два варианта: последовательная (см. рис. 5.1, *б*) и параллельная схема (см. рис. 5.1, *в*). Связь между параметрами обеих схем определяется соотношениями (5.3) и (5.4). Из соотношения (5.4) следует, что характер реактивного элемента в схемах замещения одного и того же пассивного двухполюсника одинаков. Например, если в схеме на рис. 5.1, *б* реактивный элемент — индуктивность, то элемент с проводимостью jb в схеме на рис. 5.1, *в* также является индуктивностью.

5.2. Резонансное состояние пассивного двухполюсника

Резонанс — особое состояние пассивного двухполюсника (содержащего наряду с резисторами индуктивные и емкостные элементы), при котором ток и напряжение на его входе в синусоидальном режиме совпадают по фазе.

Другими словами, пассивный двухполюсник при резонансе ведет себя, как резистивное сопротивление. Двухполюсники, в которых может возникнуть состояние резонанса, называют резонансными или колебательными.

Различают два вида резонанса: 1) резонанс напряжений; 2) резонанс токов. Они возникают в схемах различной структуры.

5.2.1. Резонанс напряжений

Этот вид резонанса может существовать в том случае, когда схему двухполюсника можно разбить на две части (подсхемы), включенных последовательно, с различным характером реактивности входного сопротивления.

На рис. 5.3, *а*, изображен заданный пассивный двухполюсник, а на рис. 5.3, *б* он разбит на две подсхемы, обозначенные буквами Π_1 и Π_2 (в прямоугольниках). На рис. 5.3, *в* вместо двухполюсников Π_1 и Π_2 изображены их последовательные схемы замещения.

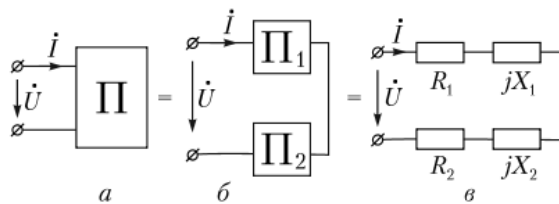


Рис. 5.3. Состояние резонанса напряжений на входе пассивного двухполюсника возможно в том случае, если его схему можно разбить на две последовательных части с различным характером реактивности:

a — исходная схема двухполюсника; b — представление схемы a в виде последовательного соединения двух более простых двухполюсников; $в$ — последовательная схема замещения цепи b

Если входные сопротивления двухполюсников Π_1 и Π_2 равны соответственно $Z_1 = R_1 + jX_1$, $Z_2 = R_2 + jX_2$, то для комплексного входного сопротивления полного двухполюсника (см. рис. 5.3, a) имеем

$$Z_{\text{вх}} = R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2). \quad (5.6)$$

Пусть реактивные составляющие входных сопротивлений двухполюсников Π_1 и Π_2 равны по величине, а по знаку противоположны ($X_2 = -X_1$, или $X_1 + X_2 = 0$). Тогда из соотношения (5.6) получаем $Z_{\text{вх}} = R_1 + R_2$ — чисто резистивно, поэтому ток \dot{I} и напряжение \dot{U} на входе двухполюсника (см. рис. 5.3, a) совпадают по фазе. Это состояние называется **резонанс напряжений**.

Таким образом, причина резонанса напряжений — взаимная компенсация реактивных составляющих комплексных входных сопротивлений двух частей схемы, включенных последовательно.

Пример 5.1. Для двухполюсника, изображенного на рис. 5.4, $R = 100$ Ом, $L = 0,1$ Гн, частота входного напряжения $\omega = 1000$ рад/с. Определить величину емкости конденсатора, обеспечивающего состояние резонанса напряжений.

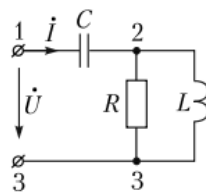


Рис. 5.4. Схема к примеру 5.1, иллюстрирующему расчет величины емкости, обеспечивающей состояние резонанса напряжений

Решение

Схема на рис. 5.4 составлена из двух последовательных участков:

- параллельно соединенные R, L — двухполюсник с зажимами «2», «3»;
- емкость C — двухполюсник с зажимами «1», «2».

Запишем комплексные входные сопротивления названных двухполюсников, приведя их к алгебраической форме:

$$Z_{23} = \frac{Rj\omega L}{R + j\omega L} = \frac{100 \cdot j100}{100 + j100} = 50 + j50 \text{ (Ом)}; \quad Z_{12} = Z_C = -j\frac{1}{\omega C}.$$

Полное комплексное входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = Z_{12} + Z_{23} = -j\frac{1}{\omega C} + 50 + j50 = 50 + j\left[50 - \frac{1}{\omega C}\right].$$

Условием резонанса напряжений является равенство нулю мнимой части $Z_{\text{вх}}$:

$$50 - \frac{1}{\omega C} = 0; \quad \frac{1}{\omega C} = 50.$$

При $\omega = 1000$ рад/с требуемая для обеспечения резонанса емкость $C = \frac{1}{1000 \cdot 50} = 20 \cdot 10^{-6}$ Ф.

5.2.2. Резонанс токов

Резонанс токов возникает тогда, когда в схеме двухполюсника можно выделить две подсхемы, соединенные параллельно, с различным характером реактивности комплексной входной проводимости.

На рис. 5.5, б исходная схема (рис. 5.5, а) представлена параллельно включенными двухполюсниками Π_1 и Π_2 . На рис. 5.5, в пассивные двухполюсники Π_1 и Π_2 заменены эквивалентными параллельными схемами. В соответствии с рис. 5.5, в комплексные входные проводимости двухполюсников Π_1 и Π_2 равны $Y_1 = g_1 + jb_1$; $Y_2 = g_2 + jb_2$.

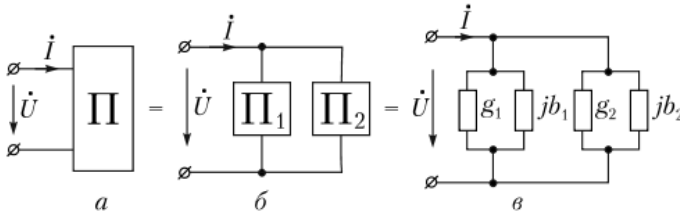


Рис. 5.5. Условие возникновения состояния резонанса токов на входе пассивного двухполюсника:

а — символическая модель заданного двухполюсника; б — представление исходной схемы в виде двух параллельных частей; в — параллельная схема замещения цепи б

Комплексная входная проводимость полного двухполюсника определяется суммой проводимостей Y_1 и Y_2 :

$$Y_{\text{вх}} = Y_1 + Y_2 = (g_1 + g_2) + j(b_1 + b_2). \quad (5.7)$$

Если $b_2 = -b_1$ (т.е. реактивные составляющие входных проводимостей двухполюсников Π_1 и Π_2 равны по величине, но противоположны по характеру), то $b_1 + b_2 = 0$ и согласно формуле (5.7) $Y_{\text{вх}} = g_1 + g_2$ — вещественная величина.

Следовательно ток и напряжение на входе двухполюсника (см. рис. 5.5, а) совпадают по фазе. Это состояние называется **резонанс токов**.

Таким образом, причина резонанса токов — взаимная компенсация реактивных составляющих комплексных входных проводимостей параллельных частей схемы.

Пример 5.2. Дано: в цепи (рис. 5.6) $R = 100$ Ом; $L = 0,1$ Гн; частота синусоидального источника на входе $\omega = 1000$ рад/с. Определить величину емкости C , при которой двухполюсник находится в состоянии резонанса.

Решение

Заданный двухполюсник можно считать результатом параллельного включения двух более простых двухполюсников: 1) ветвь RL ; 2) емкостная ветвь.

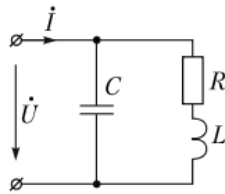


Рис. 5.6. Схема к примеру 5.2, иллюстрирующему подбор величины емкости, обеспечивающей состояние резонанса токов

Комплексная проводимость ветви RL

$$Y_1 = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{100 + j100} \cdot \frac{100 - j100}{100 - j100} =$$

$$= \frac{100}{100^2 + 100^2} - j \frac{100}{100^2 + 100^2} = \frac{1}{200} - j \frac{1}{200}.$$

Комплексная проводимость емкостной ветви $Y_2 = j\omega C$.

Комплексная проводимость заданного двухполюсника

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{200} - j \frac{1}{200} + j\omega C = \frac{1}{200} + j \left(\omega C - \frac{1}{200} \right).$$

Приравниваем нулю мнимую часть полученного выражения для $Y_{\text{вх}}$:

$$\omega C - \frac{1}{200} = 0; \quad \omega C = \frac{1}{200}.$$

При $\omega = 1000$ рад/с искомая емкость C равна

$$C = \frac{1}{200 \cdot 1000} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

5.3. Резонанс напряжений в неразветвленном RLC -контуре

5.3.1. Основные соотношения при резонансе

На рис. 5.7, *a* приведена символическая модель цепи, содержащей последовательно соединенные резистор, индуктивность и емкость. Для определенности положим, что комплексы, указанные на рисунке, являются комплексами действующего значения.

Цепь подобного вида широко применяется в инженерной практике, поэтому рассматривается особо.

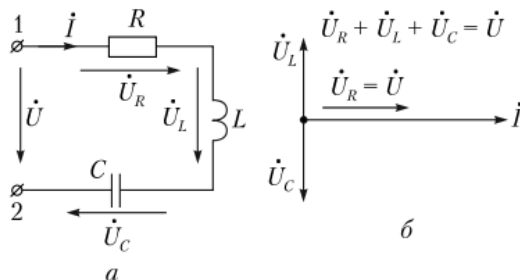


Рис. 5.7. Последовательный колебательный контур:

a — символическая модель цепи; *б* — векторная диаграмма при резонансе

По причине последовательного соединения элементов в данной цепи может наблюдаться только резонанс напряжений. Комплексное входное сопротивление схемы относительно зажимов «1», «2» (см. рис. 5.7, а) равно

$$Z_{\text{вх}} = R + j \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right].$$

Условием резонанса является равенство нулю мнимой части $Z_{\text{вх}}$, т.е.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad \text{или} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (5.8)$$

Таким образом, при резонансе равны по величине реактивные сопротивления индуктивности и емкости. При заданных параметрах L и C резонанс наступает на частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Принятым здесь обозначением для частоты резонанса ω_0 будем пользоваться в дальнейшем.

Состояние цепи (см. рис. 5.7, а) определяется одним уравнением по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = iR + j\omega L + i \left[-j \frac{1}{\omega C} \right].$$

На резонансной частоте ввиду равенства реактивных сопротивлений индуктивности и емкости (5.8) напряжения на реактивных элементах в сумме дают ноль:

$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0.$$

Следовательно, входное напряжение равно напряжению на резисторе. Этот случай изображен на векторной диаграмме (рис. 5.7, б).

Ток в контуре при резонансе обозначим \dot{I}_0 :

$$\dot{I}_0 = \dot{U}/R. \quad (5.9)$$

Тогда действующие значения напряжений на реактивных элементах L и C при резонансе U_{L0} и U_{C0} одинаковы и с учетом соотношения (5.9) равны

$$U_{L0} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L}{R} U; \quad (5.10)$$

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{1/(\omega_0 C)}{R} U. \quad (5.11)$$

Как следует из равенств (5.10) и (5.11), если сопротивления индуктивности и емкости при резонансе больше резистивного сопротивления R , то напряжения на реактивных элементах превышают входное напряжение.

Для контура с малыми потерями (R мало) величины U_L и U_C при резонансе могут во много раз превышать входное напряжение. В теоретическом случае при $R \rightarrow 0$ резонансный ток I_0 достигает бесконечно большого значения, как и напряжения на реактивных элементах.

5.3.2. Понятия характеристического сопротивления и добротности последовательного контура

Характеристическим сопротивлением последовательного RLC -контура называется сопротивление реактивного элемента при резонансе. Оно обозначается ρ и согласно определению равно

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.12)$$

Добротностью контура Q называется величина, показывающая, во сколько раз напряжение на индуктивности или емкости при резонансе превышает входное напряжение:

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}. \quad (5.13)$$

Из полученных равенств (5.12) и (5.13) следует, что характеристическое сопротивление ρ и добротность Q являются параметрами контура. От частоты источника они не зависят.

5.3.3. Частотная характеристика $I(\omega)$ последовательного контура

Частотными характеристиками называют зависимости от частоты величин, определяющих режим в цепи. Рассмотрим зависимость от частоты тока в последовательном контуре (см. рис. 5.7, а). Для комплекса тока справедливо выражение

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]}.$$

Модуль записанного комплекса есть действующее значение тока:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}. \quad (5.14)$$

Величину действующего значения напряжения U на входе считаем неизменной. Тогда соотношение (5.14) связывает ток в контуре с параметрами R , L , C и частотой.

Для удобства анализа преобразуем соотношение (5.14) так, чтобы вместо величин R , L , C фигурировали ρ , Q , I_0 (см. формулы (5.9), (5.12) и (5.13)). С этой целью преобразуем разность $\omega L - 1/(\omega C)$, домножив и поделив ее на $\sqrt{L/C}$:

$$\begin{aligned} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{\sqrt{L/C}}{\sqrt{L/C}} &= \sqrt{L/C} \left(\frac{\omega L}{\sqrt{L/C}} - \frac{1/\omega C}{\sqrt{L/C}} \right) = \\ &= \sqrt{L/C} \left(\frac{\omega}{1/\sqrt{LC}} - \frac{1/\sqrt{LC}}{\omega} \right) = \rho \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Подставляем результат (5.15) в выражение (5.14):

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \rho^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

Числитель и знаменатель последнего соотношения делим на R и получаем следующее равенство:

$$I(\omega) = \frac{U/R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Принимаем во внимание, что $U/R = I_0$, а $\rho/R = Q$, приходим к выражению

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \quad (5.16)$$

В полученном соотношении (в отличие от формулы (5.14)) в качестве параметров контура присутствуют величины ω_0 , Q и I_0 .

График частотной зависимости $I(\omega)$ по выражению (5.16) представлен на рис. 5.8 для нескольких значений добротности Q . При построении учитывалось, что, согласно (5.16) при $\omega = 0$ $I = 0$; при $\omega \rightarrow \infty$ $I \rightarrow 0$; при $\omega = \omega_0$ $I = I_0$ (на резонансной частоте зависимость (5.16) достигает максимума $I(\omega_0) = I_0$).

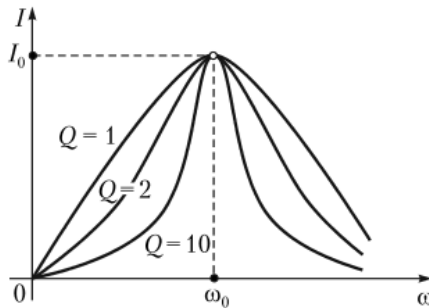


Рис. 5.8. Частотные зависимости $I(\omega)$ для последовательного колебательного контура при различных значениях добротности

Графики зависимостей $I(\omega)$ на рис. 5.8 свидетельствуют о том, что рассматриваемая цепь обладает частотно-избирательными свойствами. Избирательность проявляется сильнее при более высоких значениях добротности и состоит в следующем: чем ближе частота источника к резонансной, тем меньшим (по модулю) сопротивлением обладает цепь и тем больше ток.

Для используемых в технике «высокодобротных» контуров величина добротности Q достигает нескольких десятков и даже сотен. В таких контурах ток практически отличен от нуля в узком частотном диапазоне около резонансной частоты.

Для оценки избирательных свойств RLC -контура вводится понятие полосы пропускания.

5.3.4. Полоса пропускания

Введем понятие полосы пропускания последовательного RLC -контура, пользуясь графиком частотной зависимости (5.16), построенным на рис. 5.9 для некоторого значения добротности Q . Отметим на этом графике по оси

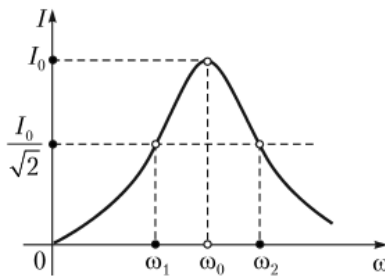


Рис. 5.9. К понятию полосы пропускания последовательного колебательного контура

тока уровень $I_0/\sqrt{2} \approx 0,707I_0$. Этому значению тока на кривой $I(\omega)$ соответствуют две частоты ω_1 и ω_2 .

Разность частот $(\omega_2 - \omega_1)$ обозначается как $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ и называется **полосой пропускания** контура, а частоты ω_1 и ω_2 — соответственно нижней и верхней граничными частотами полосы пропускания.

По определению частоты ω_1 и ω_2 в соответствии с формулой (5.16) удовлетворяют уравнению

$$\frac{I_0}{\sqrt{1+Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (5.17)$$

Решение (5.17) приводит к следующим выражениям для граничных частот:

$$\omega_1 = \omega_0 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2Q} \right); \quad \omega_2 = \omega_0 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2Q} \right).$$

Тогда для полосы пропускания $\Delta\omega$ получаем

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Таким образом, полоса пропускания последовательного RLC -контура пропорциональна резонансной частоте ω_0 и обратно-пропорциональна его добротности Q .

Если частота задана в герцах, то для полосы пропускания справедливо соотношение $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$, где $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ — полоса пропускания в герцах; $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ — резонансная частота в герцах. Например, при $f_0 = 1$ кГц = 1000 Гц и $Q = 100$ полоса пропускания $\Delta f = 10$ Гц.

5.4. Резонанс токов в параллельном колебательном контуре

5.4.1. Основные соотношения при резонансе

На рис. 5.10, а изображена символическая модель цепи, представляющей собой параллельное соединение индуктивной и емкостной ветвей. Каждая ветвь обладает резистивными потерями (R_1, R_2). В цепи заданной структуры согласно сказанному в подпараграфе 5.2.2 возможен только резонанс токов. Поэтому соотношение между параметрами двухполюсника, заданного на рис. 5.10, а, и частотой источника при резонансе получим из

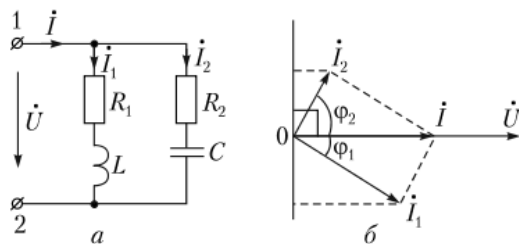


Рис. 5.10. Параллельный колебательный контур:

a – символическая модель контура; *б* – векторная диаграмма при резонансе

выражения для его комплексной входной проводимости. Для этого представим проводимости индуктивной и емкостной ветвей цепи, изображенной на рис. 5.10, *a*, в алгебраической форме записи.

Комплексная проводимость индуктивной ветви Y_1 равна

$$Y_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} \cdot \frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L} = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + j \frac{-\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = g_1 + jb_1. \quad (5.18)$$

Комплексная проводимость емкостной ветви Y_2 равна

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{R_2 - j \cdot 1/(\omega C)} = \frac{1}{R_2 - j \cdot 1/(\omega C)} \cdot \frac{R_2 + j \cdot 1/(\omega C)}{R_2 + j \cdot 1/(\omega C)} = \\ &= \frac{R_2}{R_2^2 + [1/(\omega C)]^2} + j \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + [1/(\omega C)]^2} = g_2 + jb_2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Полная комплексная входная проводимость заданного двухполюсника относительно зажимов «1», «2» равна сумме проводимостей Y_1 и Y_2 :

$$Y_{\text{вх}} = Y_1 + Y_2 = (g_1 + g_2) + j(b_1 + b_2). \quad (5.20)$$

При резонансе мнимая часть комплекса (5.20) равна нулю. Из этого условия с учетом формул (5.18) и (5.19) получаем выражение, связывающее параметры контура и частоту в состоянии резонанса:

$$b_1 + b_2 = \frac{-\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + [1/(\omega C)]^2} = 0. \quad (5.21)$$

Решая уравнение (5.21) относительно частоты, приходим к следующему результату для резонансной частоты $\omega_{\text{рез}}$:

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_1^2 - L/C}{R_2^2 - L/C}}. \quad (5.22)$$

Равенство (5.22) свидетельствует, что резонанс в параллельном контуре (см. рис. 5.10, *a*) возможен не при любых параметрах R_1 , R_2 , L , C .

Вещественный результат для $\omega_{\text{рез}}$ может быть получен только при положительном знаке подкоренного выражения в уравнении (5.22), а это возможно лишь при выполнении одной из систем неравенств

$$\begin{cases} R_1 \geq \sqrt{L/C}, \\ R_2 \geq \sqrt{L/C}, \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\begin{cases} R_1 \leq \sqrt{L/C}, \\ R_2 \leq \sqrt{L/C}. \end{cases} \quad (5.24)$$

В противном случае резонанс невозможен.

Таким образом, системы неравенств (5.23) и (5.24) являются условиями возможности существования резонанса в параллельном контуре. При их выполнении на резонансной частоте рассматриваемый двухполюсник обладает чисто вещественной проводимостью $Y_{\text{рез}}$. С учетом соотношений (5.18) и (5.19)

$$Y_{\text{рез}} = g_1 + g_2 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + [1/(\omega C)]^2}.$$

Комплексы токов в ветвях цепи (см. рис. 5.10, а) равны

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L}$$

— отстает от напряжения \dot{U} на угол $\varphi_1 = \arctg(\omega L/R_1)$;

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - j \cdot 1/(\omega C)}$$

— опережает напряжение \dot{U} на угол $\varphi_2 = \arctg \frac{1/(\omega C)}{R_2}$.

Ток на входе схемы (см. рис. 5.10, а) совпадает по фазе с входным напряжением и равен

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = \dot{U}Y_{\text{рез}}.$$

Отмеченные фазовые соотношения отражены на векторной диаграмме (рис. 5.10, б).

Выводы. Резонанс в цепи, заданной на рис. 5.10, а, возможен не при любых соотношениях ее параметров.

Резонансная частота параллельного колебательного контура зависит не только от величин L и C , но и от резистивных сопротивлений ветвей R_1 и R_2 .

Если резистивные сопротивления ветвей параллельного контура одинаковы (но не равны $\sqrt{L/C}$), т.е. $R_1 = R_2 \neq \sqrt{L/C}$, то резонансная частота совпадает с частотой резонанса в последовательном контуре с теми же L и C : $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$.

Частота $\omega_{\text{рез}}$ в этом случае не зависит от резистивных сопротивлений контура.

5.4.2. Идеальный параллельный контур (без потерь)

Двухполюсник на рис. 5.10, а при $R_1 = R_2 = 0$ принимает вид рис. 5.11, а и называется **контуром без потерь**. На практике к этому теоретическому случаю приближаются радиотехнические контуры с малыми резистивными сопротивлениями.

Комплексная входная проводимость данного двухполюсника относительно зажимов «1», «2» определяется выражением

$$Y_{\text{вх}} = Y_L + Y_C = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = -j\frac{1}{\omega L} + j\omega C = j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right].$$

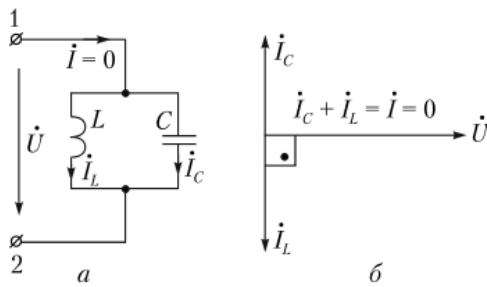


Рис. 5.11. Идеальный параллельный колебательный контур:
 а – символическая модель контура; б – векторная диаграмма при резонансе

$Y_{\text{вх}}$ – мнимая величина, поэтому условием резонанса является равенство ее нулю, т.е.

$$Y_{\text{рез}} = j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] = 0.$$

Следовательно, при резонансе проводимости индуктивной и емкостной ветвей по величине одинаковы ($\omega C = 1/(\omega L)$), а резонансная частота равна

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

К такому же результату приходим, пользуясь и общим соотношением (5.22).

Равенство нулю комплексной входной проводимости рассматриваемого двухполюсника при резонансе $Y_{\text{рез}} = 0$ означает, что идеальный параллельный контур в резонансном режиме по отношению к внешней цепи проявляет себя как обрыв. Ток \dot{I} , отбираемый двухполюсником от внешней цепи, при резонансе равен нулю: $\dot{I} = 0$. При этом токи в индуктивной и емкостной ветвях отличны от нуля: $\dot{I}_L = \dot{U}/(j\omega L)$, $\dot{I}_C = \dot{U}/[-j/(\omega C)]$. Причем комплексы \dot{I}_L и \dot{I}_C одинаковы по модулю, но противоположны по фазе. Рассмотренные соотношения представлены на векторной диаграмме (рис. 5.11, б).

Переходя от комплексов к соответствующим синусоидам, можно утверждать, что в индуктивной и емкостной ветвях идеального параллельного контура в состоянии резонанса протекают синусоидальные токи, равные по амплитуде, но противоположенные по фазе (при выбранных для них положительных направлениях). Фактически в контуре циркулирует синусоидальный ток, а ток на входе отсутствует.

Пример 5.3. Дано: на входе цепи (рис. 5.12, а) действует синусоидальный источник $u(t) = 400\sqrt{2}\sin 4000t$ В; $C = 1,25 \cdot 10^{-6}$ Ф; $L = 0,05$ Гн. Определить показания идеальных амперметров и вольтметра, измеряющих действующие значения синусоидальных величин.

Решение

Комплекс действующего значения заданного напряжения на входе: $\dot{U} = 400e^{j0}$ (В).

Комплексные сопротивления элементов:

$$Z_L = j\omega L = j4000 \cdot 0,05 = j200 \text{ Ом}; \quad Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{10^6}{4000 \cdot 1,25} = -j200 \text{ Ом}.$$

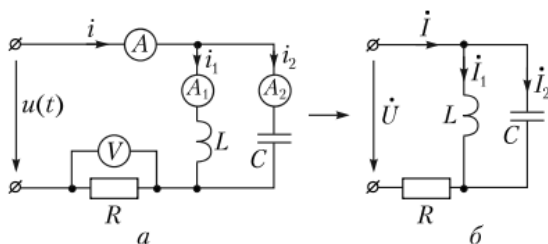


Рис. 5.12. Схема к примеру 5.3:

a – заданная цепь; *б* – ее символическая модель (идеальные измерительные приборы не показаны)

Величина R не задана, поэтому его комплексное сопротивление не записываем. Символическая модель данной цепи изображена на рис. 5.12, б. Для определенности полагаем, что все показанные на рис. 5.12, б комплексы являются комплексами действующего значения.

В соответствии с расчетом сопротивления индуктивности и емкости на частоте, задаваемой источником, по величине одинаковы: $\omega L = 1/(\omega C)$. Следовательно, параллельно включенные L и C представляют собой идеальный контур в состоянии резонанса.

Его входное сопротивление бесконечно велико. Поэтому ток на входе схемы на рис. 5.12, а \dot{I} равен нулю, напряжение на резисторе R также равно нулю. Тогда напряжение, создаваемое источником, приложено к резонансному контуру. Это позволяет токи в индуктивности и емкости найти по закону Ома:

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_L} = \frac{400e^{j0}}{j200} = -j2 \text{ (A)}; \quad \dot{i}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_C} = \frac{400e^{j0}}{-j200} = j2 \text{ (A)}.$$

Показания приборов равны модулям комплексов действующего значения: $A \rightarrow 0$, $V \rightarrow 0$, $A_1 \rightarrow 2 \text{ A}$, $A_2 \rightarrow 2 \text{ A}$.

5.4.3. Избирательные свойства параллельного колебательного контура

Двухполюсник (см. рис. 5.10, а) при достаточно малых резистивных сопротивлениях R_1 и R_2 , когда $R_1 \ll \sqrt{L/C}$, $R_2 \ll \sqrt{L/C}$, может быть использован в качестве частотно-избирательного устройства. В этом случае согласно выражению (5.22) резонансная частота приблизительно равна $\omega_{\text{рез}} \approx 1/\sqrt{LC}$.

О частотно-избирательных свойствах рассматриваемого двухполюсника можно судить по зависимости от частоты модуля его комплексной входной проводимости $|Y_{\text{вх}}(\omega)|$.

Наиболее существенным свойством этой зависимости является наличие «провала» на соответствующем графике в области резонансной частоты. Его «глубина» зависит от величины суммарных резистивных потерь в контуре $R_1 + R_2$. При $(R_1 + R_2) \rightarrow 0$, что соответствует идеальному параллельному контуру, $Y_{\text{рез}} \rightarrow 0$. Этот случай изображен на рис. 5.13, а, б.

Для параллельного контура с малыми потерями вводятся понятия характеристического сопротивления ρ и добротности Q .

Характеристическим сопротивлением параллельного колебательного контура (см. рис. 5.10, а) называют величину $\rho = \sqrt{L/C}$. Если учесть, что $\omega_{\text{рез}} \approx \sqrt{LC}$, то величина ρ , как и в последовательном контуре, определяет сопротивление индуктивности и емкости в состоянии резонанса.

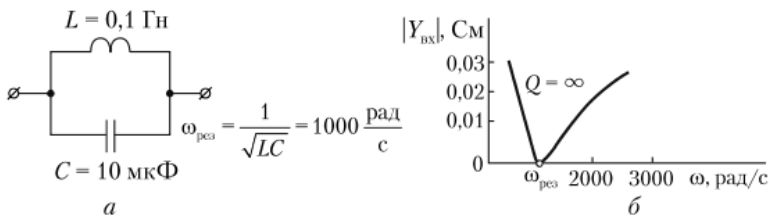


Рис. 5.13. Частотная зависимость модуля комплексной входной проводимости параллельного колебательного контура без потерь:

a — схема и параметры контура; *б* — зависимость $|Y_{\text{вх}}(\omega)|$

Добротность параллельного контура — это величина, которая характеризует соотношение между сопротивлением реактивного элемента при резонансе ρ и суммарным резистивным сопротивлением контура $R_1 + R_2$, а именно:

$$Q = \frac{\rho}{R_1 + R_2} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_1 + R_2}.$$

5.5. Сравнение избирательных свойств последовательного и параллельного колебательных контуров

Избирательные свойства последовательного (см. рис. 5.7, *a*) и параллельного (см. рис. 5.10, *a*) колебательных контуров имеют противоположный характер. На рис. 5.14 дан качественный вид частотных зависимостей входного тока $I(\omega)$ для последовательного и параллельного контуров соответственно с одинаковыми резонансными частотами и близкими добротностями.

Последовательный контур обладает способностью пропускать сигналы резонансной частоты и частот, близких к резонансной, и задерживать сигналы остальных частот (рис. 5.14, *a*). Параллельный контур задерживает резонансную и близкие к ней частоты и «прозрачен» для сигналов остальной области частот (рис. 5.14, *б*). По аналогии с полосой пропускания последовательного контура для параллельного контура в радиотехнике пользуются понятием **полосы задерживания**, или режекции. Параллельный колебательный контур с высокой добротностью называют **режектором** [4, 8].

Рассмотренные последовательный и параллельный колебательные контуры являются простейшими резонансными цепями, обладающими частотно-избирательными свойствами. С целью получения более резко выражен-

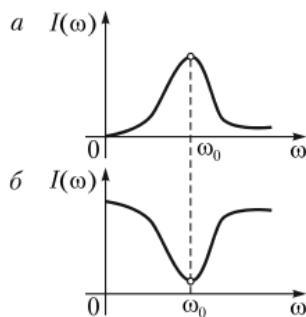


Рис. 5.14. Качественный вид частотных зависимостей входного тока $I(\omega)$ для колебательных контуров:

a — последовательного; *б* — параллельного

ных избирательных качеств используют и более сложные схемы, в частотности колебательные контуры, содержащие индуктивно связанные катушки (связанные контуры).

Контрольные вопросы и задания

1. Определите параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения пассивного двухполюсника, если на частоте $\omega = 500$ рад/с его комплексное входное сопротивление равно $Z_{\text{вх}} = 100 - j100$ Ом.

2. Какое состояние пассивного двухполюсника называется резонансом?

3. Назовите виды резонанса и условия их возникновения.

4. Каковы главные признаки структуры двухполюсника, в котором возможен: а) резонанс напряжений; б) резонанс токов? Приведите примеры.

5. Поясните, почему в схеме на рис. 5.4 может наблюдаться только резонанс напряжений, а в цепи на рис. 5.6 — только резонанс токов?

6. Как связана частота резонанса ω_0 в последовательном контуре на рис. 5.7, а с параметрами его элементов?

7. Постройте на комплексной плоскости векторы тока \dot{I} и напряжений \dot{U}_R , \dot{U}_L , \dot{U}_C в цепи, изображенной на рис. 5.7, а, на частотах: а) $\omega < \omega_0$; б) $\omega = \omega_0$; в) $\omega > \omega_0$.

8. Что понимается под характеристическим сопротивлением ρ последовательного контура? Как связано ρ с R , L , C ?

9. Дайте определение добротности последовательного резонансного контура. Запишите выражение для добротности Q через R , L , C .

10. Нарисуйте качественный график зависимости тока в контуре на рис. 5.7, а от частоты $I(\omega)$. Отметьте главные особенности данной частотной зависимости. Как влияет добротность Q на ее характер?

11. Почему зависимость $I(\omega)$, показанная на рис. 5.8, свидетельствует о частотной избирательности цепи, изображенной на рис. 5.7, а?

12. Каково влияние добротности Q на степень частотной избирательности последовательного резонансного контура?

13. Что понимается под полосой пропускания последовательного резонансного контура? Как она определяется по заданной характеристике $I(\omega)$?

14. Как определить резонансную частоту ω_0 и добротность Q цепи, показанной на рис. 5.7, а, по экспериментально полученной зависимости $I(\omega)$?

15. Поясните, почему в схеме, изображенной на рис. 5.10, а, может наблюдаться резонанс токов.

16. Объясните, пользуясь выражением (5.22), почему резонанс в цепи, изображенной на рис. 5.10, а, возможен не при всех сочетаниях величин L , C , R_1 , R_2 .

17. Назовите особенности идеального параллельного контура без потерь (см. рис. 5.11, а). Запишите выражение для $\omega_{\text{рез}}$ через L и C .

18. Для цепи, приведенной на рис. 5.11, а, постройте на комплексной плоскости диаграмму, содержащую векторы \dot{U} , \dot{I}_L , \dot{I}_C , \dot{I} на частотах: а) $\omega = \omega_{\text{рез}}$; б) $\omega < \omega_{\text{рез}}$; в) $\omega > \omega_{\text{рез}}$.

19. Чему равно комплексное входное сопротивление $Z_{\text{вх}}$ контура на рис. 5.11, а на частоте $\omega = \omega_{\text{рез}}$? Какой характер (индуктивный или емкостной) имеет $Z_{\text{вх}}$ на частотах $\omega < \omega_{\text{рез}}$ и $\omega > \omega_{\text{рез}}$?

20. Какой примерный вид имеет зависимость $I(\omega)$ для параллельного колебательного контура (см. рис. 5.10, а) при небольших резистивных потерях? В чем проявляются частотно-избирательные свойства рассматриваемой схемы?

21. Запишите выражение, которым принято оценивать величину добротности Q параллельного контура, показанного на рис. 5.10, а. Рассчитайте добротность этого контура, если $L = 10$ мГн; $C = 0,1$ мкФ; $R_1 = R_2 = 10$ Ом.

22. Сравните по частотной избирательности параллельный (см. рис. 5.7, а) и последовательный (см. рис. 5.10, а) контуры.

Глава 6

ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- особенности уравнений Кирхгофа для цепи, содержащей индуктивно связанные элементы, в общем виде и в установившемся синусоидальном режиме;
- параметры, характеризующие индуктивно связанные катушки;
- понятие вносимого сопротивления для трансформаторной схемы;

уметь

- учитывать индуктивные связи в уравнениях Кирхгофа;
- записывать основные уравнения для линейного трансформатора в синусоидальном режиме и строить их на комплексной плоскости;

владеть

- методикой определения одноименных зажимов для связанных катушек (по известной их пространственной намотке);
 - методикой решения основных уравнений при расчете режима в первичной и вторичной цепях трансформатора.
-

Связь между элементами электрической цепи может осуществляться не только путем электрического контакта, но и при помощи взаимной индукции.

Две катушки индуктивности являются *индуктивно связанными* (или магнитно связанными), если они пронизываются общим магнитным потоком. Цепи, содержащие индуктивно связанные катушки, называют *цепями с взаимной индукцией*.

Наличие индуктивной связи приводит к появлению дополнительных напряжений за счет наведенных ЭДС взаимной индукции. Эти напряжения необходимо учитывать в уравнениях по законам Кирхгофа.

Величины напряжений, обусловленных магнитной индукцией, зависят от степени индуктивной связи. В линейных цепях степень индуктивной связи характеризуется постоянными коэффициентами, которые наряду с величинами R , L , C относятся к параметрам цепи.

6.1. Параметры, характеризующие индуктивно связанные катушки

6.1.1. Понятие коэффициента взаимной индукции

На рис. 6.1, *а*, *б* изображены две катушки индуктивности, намотанные на одном сердечнике. Сердечник выполнен из материала с постоянной (не зависящей от режима) магнитной проницаемостью, например керамический. Зажимы первой катушки обозначены «а», «б», зажимы второй катушки —

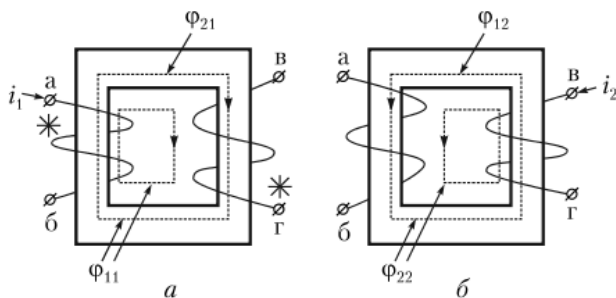


Рис. 6.1. Два режима работы индуктивно связанных катушек:

a — в цепи первой катушки протекает ток i_1 , зажимы второй катушки разомкнуты; *б* — в цепи второй катушки протекает ток i_2 , зажимы первой катушки разомкнуты

«в», «г». Числа витков первой и второй катушек равны W_1 и W_2 соответственно. Рассмотрим два режима работы данной цепи.

Режим I. Пусть в цепи первой катушки протекает ток i_1 (мгновенное значение), а зажимы второй катушки разомкнуты. Этот случай представлен на рис. 6.1, *a*. Под действием тока i_1 возникает магнитный поток Φ_{11} , который сцеплен с витками первой катушки и по направлению составляет с током i_1 правовинтовую систему.

Поток Φ_{11} называется **потокотом самоиндукции** (первой катушки). На рис. 6.1, *a* он представлен двумя силовыми линиями, одна из них замыкается по сердечнику, вторая — по воздуху (за счет неплотного прилегания катушек к сердечнику). Поток, замыкающийся по воздуху, называют **потокотом рассеяния**.

Часть магнитного потока Φ_{11} , замыкающаяся по сердечнику и пронизывающая вторую катушку, на рис. 6.1, *a* обозначена Φ_{21} .

Поток Φ_{21} называется **потокотом взаимной индукции** (второй катушки).

Произведение магнитного потока Φ , пронизывающего катушку, на число ее витков W называется **потокосцеплением** и обозначается Ψ , т.е. $\Psi = \Phi W$.

Тогда в рассматриваемом случае:

- $\Phi_{11} W_1 = \Psi_{11}$ — потокосцепление самоиндукции первой катушки;
- $\Phi_{21} W_2 = \Psi_{21}$ — потокосцепление взаимной индукции второй катушки.

Поскольку заданная цепь линейна (по условию магнитная проницаемость материала сердечника $\mu = \text{const}$), оба потокосцепления пропорциональны току, их вызывающему, т.е.

$$\Psi_{11} = L_1 i_1; \quad (6.1)$$

$$\Psi_{21} = M_{21} i_1. \quad (6.2)$$

Коэффициенты пропорциональности между потокосцеплениями и током i_1 в соотношениях (6.1) и (6.2) имеют размерность Генри (Гн) и называются: L_1 — коэффициент самоиндукции или индуктивность первой катушки; M_{21} — коэффициент взаимной индукции второй катушки относительно первой.

Для линейной цепи величины L_1 и M_{21} от тока i_1 не зависят. Это параметры цепи, определяемые ее геометрией и магнитной проницаемостью сердечника.

Режим II. Предположим, что в цепи второй катушки течет ток i_2 (рис. 6.1, *б*), а зажимы первой катушки разомкнуты.

По аналогии с режимом I принимаем следующие обозначения: Φ_{22} — поток самоиндукции второй катушки (на рис. 6.1, б изображен двумя силовыми линиями); Φ_{12} — поток взаимной индукции первой катушки (на рис. 6.1, б изображен одной силовой линией); $\Phi_{22}W_2 = \Psi_{22}$ — потокосцепление самоиндукции второй катушки; $\Phi_{12}W_1 = \Psi_{12}$ — потокосцепление взаимной индукции первой катушки.

Потокосцепления Ψ_{22} и Ψ_{12} пропорциональны вызывающему их току i_2 , т.е.

$$\Psi_{22} = L_2 i_2; \quad (6.3)$$

$$\Psi_{12} = M_{12} i_2. \quad (6.4)$$

Коэффициенты пропорциональности между потокосцеплениями и током i_2 в выражениях (6.3) и (6.4) также являются параметрами цепи: L_2 — коэффициент самоиндукции второй катушки; M_{12} — коэффициент взаимной индукции первой катушки относительно второй.

Методами теории электромагнитного поля можно доказать, что коэффициенты взаимной индукции M_{21} и M_{12} , фигурирующие в соотношениях (6.2) и (6.4), равны по величине, т.е.

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = M_{12}.$$

Поэтому коэффициент пропорциональности между потокосцеплением взаимной индукции и током, его вызывающим, обозначается M и называется **коэффициентом взаимной индукции** или **взаимной индуктивностью**.

Величина M зависит от степени индуктивной связи катушек. Чем связь выше, тем больше M .

Количественной характеристикой степени связи является коэффициент связи, определяемый соотношением между потоками самоиндукции и взаимной индукцией.

6.1.2. Коэффициент связи

Под **коэффициентом связи** двух индуктивно связанных катушек понимают величину

$$K = \sqrt{\frac{\Psi_{21}\Psi_{12}}{\Psi_{11}\Psi_{22}}}. \quad (6.5)$$

Обратим внимание, что в числителе подкоренного выражения в формуле (6.5) стоит произведение потокосцеплений взаимной индукции, а в знаменателе — произведение потокосцеплений самоиндукции двух индуктивно связанных катушек. Если в формуле (6.5) потокосцепления выразить через потоки и числа витков, приходим к следующему результату:

$$K = \sqrt{\frac{\Phi_{21}W_2\Phi_{12}W_1}{\Phi_{11}W_1\Phi_{22}W_2}} = \sqrt{\frac{\Phi_{21}\Phi_{12}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}}.$$

Так как потоки взаимной индукции являются частью соответствующих потоков самоиндукции, то $\Phi_{21} \leq \Phi_{11}$ и $\Phi_{12} \leq \Phi_{22}$. Поэтому коэффициент связи не может превышать единицы. В предельном (идеальном) случае, если две катушки в пространстве полностью совмещены, $K = 1$.

На практике возможны значения коэффициента связи, лишь близкие к единице, при этом говорят о высокой степени связи ($K \approx 1$).

С учетом соотношений (6.1)—(6.4), связывающих потокосцепления с токами в катушках i_1 и i_2 , из формулы (6.5) получаем для коэффициента связи выражение

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (6.6)$$

Так как $K \leq 1$, из равенства (6.6) следует, что коэффициент взаимной индукции M не может быть одновременно больше собственных индуктивностей катушек L_1 и L_2 .

6.1.3. Понятие одноименных зажимов

Рассмотренные параметры, коэффициент взаимной индукции M и коэффициент связи K , являются количественными характеристиками индуктивной связи. От величины M прямо зависит величина наводимого напряжения взаимной индукции. Однако не менее существенным моментом при этом является знак, или направление возникающего напряжения. Оно в свою очередь зависит от направлений намотки катушек. В связи с этим вводится понятие одноименных зажимов.

*Два зажима, принадлежащие различным индуктивно связанным катушкам, называются **одноименными**, если при одинаковых направлениях токов относительно этих зажимов потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой из катушек суммируются.*

В соответствии с данным определением проведем разметку катушек (см. рис. 6.1, *a*). Пометим звездочкой зажим «а» первой катушки и выясним, который из двух зажимов второй катушки («в» или «г»), является одноименным по отношению к «а».

Для этого направляем произвольно ток i_1 в первой катушке. Если стрелку тока ставить на внешнем проводнике (а не на катушке), то направление i_1 на рис. 6.1, *a* называется «в звездочку». В соответствии с правовинтовой системой ток i_1 выбранного направления создает магнитный поток, который пронизывает вторую катушку в направлении сверху вниз (см. рис. 6.1, *a*). Таково в данном случае направление потока взаимной индукции второй катушки.

Чтобы собственный магнитный поток второй катушки был направлен также сверху вниз, т.е. согласно с потоком взаимной индукции, ток i_2 должен быть направлен в зажим «г» (см. рис. 6.1, *a*). Поэтому на рис. 6.1, *a* зажим «г», как и «а», помечен звездочкой.

В предлагаемых к расчету схемах чаще дается не пространственная намотка катушек, а одноименные зажимы.

6.2. Напряжение взаимной индукции

Пусть в цепи, показанной на рис. 6.1, *a* (т.е. в условиях первого режима), ток, текущий в первой катушке, изменяется во времени по закону $i_1(t)$. В этом случае собственный магнитный поток Φ_{11} , сцепленный с первой катушкой, и поток взаимной индукции Φ_{21} , пронизывающий вторую катушку, будут переменными функциями времени. Между разомкнутыми зажимами второй катушки возникает разность потенциалов, обусловленная

наведением ЭДС взаимной индукции. Величина наведенной ЭДС по модулю равна

$$|e_{2M}| = \left| \frac{d\Psi_{21}(t)}{dt} \right|.$$

Так как $\Psi_{21} = Mi_1$, то

$$|e_{2M}| = \left| M \frac{di_1}{dt} \right|.$$

Аналогично в цепи, показанной на рис. 6.1, б, при изменяющемся токе $i_2(t)$ между разомкнутыми зажимами первой катушки создается разность потенциалов, равная по модулю наведенной ЭДС взаимной индукции:

$$|e_{1M}| = \left| M \frac{di_2}{dt} \right|.$$

Наведенная ЭДС взаимной индукции обуславливает разность потенциалов, называемую **напряжением взаимной индукции**.

Таким образом, в общем случае между зажимами каждой из катушек наряду с напряжением самоиндукции возникает напряжение взаимной индукции. Следует обратить внимание, что напряжение взаимной индукции определяется не собственным ее током (в отличие от напряжения самоиндукции), а «чужим» током, протекающим в катушке, связанной с ней индуктивно. Например, напряжение взаимной индукции на зажимах «а», «б» первой катушки (см. рис. 6.1, б)

$$u_{1M} = \pm M \frac{di_2}{dt}. \quad (6.7)$$

Напряжение взаимной индукции, наводимое между зажимами «в», «г» второй катушки (см. рис. 6.1, а)

$$u_{2M} = \pm M \frac{di_1}{dt}. \quad (6.8)$$

Поскольку направление наведенного напряжения взаимной индукции здесь пока не обсуждается (это сделано в следующем параграфе), в формулах (6.8) и (6.9) фигурирует знак «±».

6.3. Учет напряжения взаимной индукции в уравнениях по второму закону Кирхгофа

В цепи произвольной конфигурации (рис. 6.2) выделены две ветви (условно назовем их «первая» и «вторая»), содержащие индуктивно связанные катушки. Остальная схема на рис. 6.2 изображена прямоугольником с буквой «А», что свидетельствует о присутствии в ней не только пассивных элементов R , L , C , но и активных. Зажимы первой и второй катушек обозначены «а», «б» и «в», «г» соответственно.

Индуктивную связь между двумя катушками принято изображать кривой стрелкой с буквой «М» (см. рис. 6.2). Одноименные зажимы катушек на рис. 6.2 отмечены звездочками.

Наличие индуктивной связи не отражается на виде уравнений по первому закону Кирхгофа. Но наводимые напряжения взаимной индукции при-

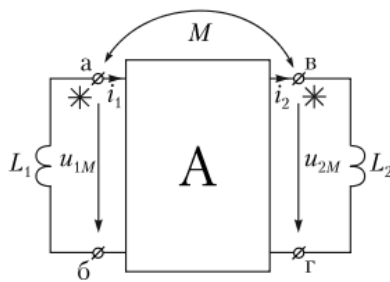


Рис. 6.2. В цепи произвольной конфигурации выделены две ветви, содержащие индуктивно связанные катушки:

стрелками показаны положительные направления токов в выделенных ветвях и напряжений взаимной индукции на катушках

нимают участие в балансе напряжений по второму закону Кирхгофа. Таким образом, в уравнениях по второму закону Кирхгофа для контуров, включающих индуктивно связанные катушки, должны фигурировать не только напряжения самоиндукции, но и напряжения взаимной индукции.

На рис. 6.2 указаны выбранные положительные направления для напряжений взаимной индукции u_{1M} и u_{2M} . Допустим, что они совпадают с направлениями обхода соответствующих контуров. Согласно сказанному в параграфе 6.2 модули напряжений взаимной индукции равны

$$|u_{1M}| = \left| M \frac{di_2}{dt} \right|; \quad |u_{2M}| = \left| M \frac{di_1}{dt} \right|.$$

Знак напряжения взаимной индукции зависит от ориентации относительно одноименных зажимов двух положительных направлений:

- направление для искомого напряжения взаимной индукции относительно помеченного зажима;
- направление для тока в катушке, индуктивно связанной, относительно одноименного зажима.

Привило знаков основано на законе электромагнитной индукции и заключается в следующем. Если положительные направления: 1) для искомого напряжения взаимной индукции (например, для u_{1M} на рис. 6.2) и 2) для тока в катушке, индуктивно связанной (т.е. для i_2 на рис. 6.2), относительно одноименных зажимов ориентированы одинаково, то напряжение взаимной индукции записывается со знаком «плюс», в противном случае — со знаком «минус».

На рис. 6.2 направление для u_{1M} (если стрелку проставлять на внешнем по отношению к катушке проводнике) выбрано «в звездочку», т.е. в зажим «а». Ток i_2 на рис. 6.2 направлен в зажим «в», тоже «в звездочку». Следовательно, для цепи на рис. 6.2

$$u_{1M} = +M \frac{di_2}{dt}. \quad (6.9)$$

Относительно знака напряжения взаимной индукции u_{2M} рассуждаем аналогично: u_{2M} на рис. 6.2 направлено в зажим «в» — «в звездочку». Ток в индуктивно связанной катушке i_1 направлен «из звездочки» (см. рис. 6.2). Тогда ввиду различной ориентации названных направлений относительно одноименных зажимов напряжение u_{2M} имеет отрицательный знак:

$$u_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (6.10)$$

Из выражений (6.9) и (6.10), связывающих мгновенные значения напряжения взаимной индукции и вызывающего его тока, следуют уравнения для комплексов, изображающих эти величины в синусоидальном режиме:

$$\dot{U}_{1M} = +j\omega M \dot{I}_2; \quad (6.11)$$

$$\dot{U}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1. \quad (6.12)$$

При записи равенств (6.11) и (6.12) учитывалось, что операциям дифференцирования синусоидальных функций времени (di_1/dt и di_2/dt) соответствует умножение комплексов на $j\omega$ (см. параграф 3.7). Комплекс $Z_M = j\omega M$, имеющий размерность сопротивления, называют **комплексным сопротивлением взаимной индукции**.

Пример 6.1. Для цепи, заданной на рис. 6.3, требуется составить полную систему независимых уравнений Кирхгофа относительно мгновенных значений токов и напряжений и для соответствующих комплексов, если предположить, что в цепи на рис. 6.3 наблюдается синусоидальный режим.

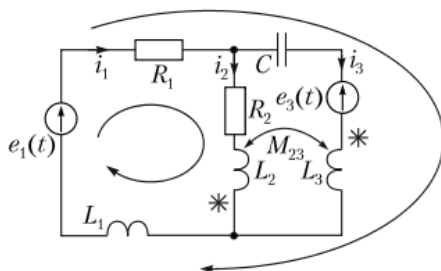


Рис. 6.3. Схема к примеру 6.1, иллюстрирующему учет индуктивных связей при составлении системы независимых уравнений Кирхгофа

Решение

Состояние заданной цепи определяется системой из трех уравнений, одно — по первому закону Кирхгофа и два — по второму. Выбор независимых контуров и направление их обхода указаны на рис. 6.3. Относительно мгновенных значений полная система независимых уравнений Кирхгофа цепи рис. 6.3 имеет вид

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ e_1(t) = i_1 R_1 + i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{23} \frac{di_3}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt}, \\ e_1(t) - e_3(t) = i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt + L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt}. \end{cases}$$

Данной системе уравнений соответствует комплексная форма

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0, \\ \dot{E}_1 = \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_2 R_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{23} \dot{I}_3 + j\omega L_1 \dot{I}_1, \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_3 = \dot{I}_1 R_1 - j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_3 + j\omega L_3 \dot{I}_3 - j\omega M_{23} \dot{I}_2 + j\omega L_1 \dot{I}_1. \end{cases}$$

6.4. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек в синусоидальном режиме

Пусть имеется неразветвленная цепь, содержащая две индуктивно связанные катушки. Заданы собственные индуктивности катушек L_1 и L_2 ; коэффициент взаимной индукции M ; сопротивления R_1 , R_2 , учитывающие резистивные потери. Источник создает синусоидальное напряжение, $\dot{U}_{\text{вх}}$ — его комплекс действующего значения.

Возможны два случая соединения связанных катушек в последовательной цепи:

- согласное включение, когда ток в катушках направлен одинаково относительно одноименных зажимов;
- встречное включение, при котором ток в катушках различным образом ориентирован относительно одноименных зажимов.

Согласное включение индуктивно связанных катушек (рис. 6.4, а). Для цепи, показанной на рис. 6.4, а, справедливо уравнение по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_{\text{вх}} = (\dot{I}R_1 + \dot{I}j\omega L_1 + \dot{I}j\omega M) + (\dot{I}R_2 + \dot{I}j\omega L_2 + \dot{I}j\omega M). \quad (6.13)$$

Уравнению (6.13) на комплексной плоскости соответствует векторная диаграмма, представленная на рис. 6.4, б. Векторы \dot{U}_1 и \dot{U}_2 на рис. 6.4, б изображают полные напряжения на каждой катушке в отдельности.

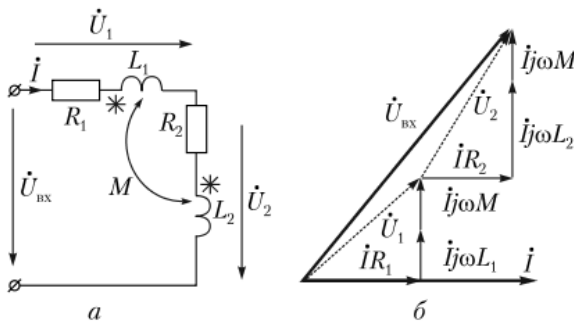


Рис. 6.4. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек, согласное включение:

а — символическая модель цепи; б — векторная диаграмма

Комплексное входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.4, а, по отношению к зажимам источника, $Z_{\text{согл}}$, в соответствии с уравнением (6.13) равно

$$Z_{\text{согл}} = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{I}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = R_{\text{согл}} + jX_{\text{согл}}, \quad (6.14)$$

где $R_{\text{согл}} = R_1 + R_2$ — резистивная составляющая комплекса $Z_{\text{согл}}$; $X_{\text{согл}} = \omega(L_1 + L_2 + 2M)$ — его реактивная составляющая.

Таким образом, наличие индуктивной связи при согласном последовательном соединении катушек приводит к увеличению реактивной составляющей полного комплексного входного сопротивления.

Встречное включение индуктивно связанных катушек (рис. 6.5, а). В уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи, показанной на рис. 6.5, а, на-

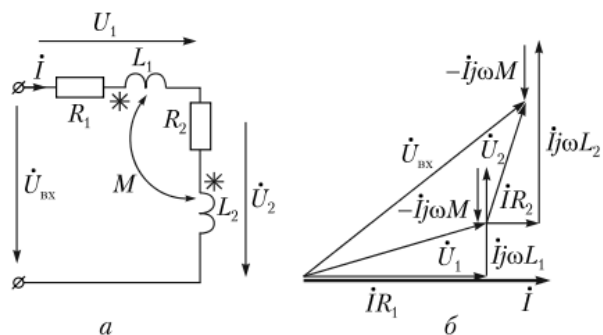


Рис. 6.5. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек, встречное включение:

a – символическая модель цепи; *б* – векторная диаграмма

пряжения взаимной индукции войдут с противоположным по отношению к напряжениям самоиндукции знаком:

$$\dot{U}_{\text{вх}} = (\dot{I}R_1 + \dot{I}j\omega L_1 - \dot{I}j\omega M) + (\dot{I}R_2 + \dot{I}j\omega L_2 - \dot{I}j\omega M).$$

Из последнего уравнения комплексное входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.5, *a* (обозначено $Z_{\text{встр}}$), равно

$$Z_{\text{встр}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = R_{\text{встр}} + jX_{\text{встр}}. \quad (6.15)$$

В выражении (6.15) приняты обозначения: $R_{\text{встр}} = R_1 + R_2$ – резистивная составляющая комплекса $Z_{\text{встр}}$; $X_{\text{встр}} = \omega(L_1 + L_2 - 2M)$ – реактивная составляющая $Z_{\text{встр}}$.

Следовательно, индуктивная связь при встречном включении ведет к уменьшению реактивной составляющей входного сопротивления цепи. При этом необходимо иметь в виду, что так как $(L_1 + L_2) \geq 2M$, то $X_{\text{встр}}$ не может быть отрицательным. Это означает индуктивный характер полного входного сопротивления последовательного соединения индуктивно связанных катушек независимо от способа включения. Это отражено на векторных диаграммах рис. 6.4, *б* и 6.5, *б*, построенных для случаев последовательного соединения индуктивно связанных катушек. На обеих диаграммах вектор тока \dot{I} отстает от вектора входного напряжения.

В соответствии с соотношениями (6.14) и (6.15) $R_{\text{встр}} = R_{\text{согл}}$; $X_{\text{встр}} < X_{\text{согл}}$. Тогда для модулей комплексных входных сопротивлений выполняется неравенство

$$|Z_{\text{встр}}| < |Z_{\text{согл}}|. \quad (6.16)$$

Соотношением (6.16) пользуются при экспериментальном определении способа включения индуктивно связанных катушек, а также для нахождения одноименных зажимов.

Пример 6.2. Определить величину коэффициента взаимной индукции M для катушек цепи, показанной на рис. 6.6, по результатам трех опытов.

Опыт I. При питании от источника постоянного напряжения $u_{\text{вх}}(t) = U_0 = 300$ В показание амперметра, измеряющего действующее значение, равно $A \rightarrow I_1 = 5$ А.

Опыт II. При синусоидальном напряжении на входе $u_{\text{вх}}(t) = 300\sqrt{2} \sin 1000t$ В амперметр показал $A \rightarrow I_{\text{II}} = \sqrt{5}$ А.

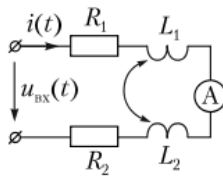


Рис. 6.6. Схема к примеру 6.2.

В примере показан расчет коэффициента взаимной индукции M по результатам трех опытов

Опыт III. При том же, что и в опыте II, напряжении, но «переброшенных» концах второй катушки амперметр показал $A \rightarrow I_{III} = 3$ А.

Решение

В опыте I, проведенном в режиме постоянного тока, индуктивности проявляют себя как короткое замыкание. По отношению к источнику цепь на рис. 6.6 обладает входным сопротивлением

$$R_{\text{вх}} = R_1 + R_2 = \frac{U_0}{I_1} = \frac{300}{5} = 60 \text{ Ом.}$$

Опыты II и III, выполненные при синусоидальном напряжении, соответствуют различным способам включения катушек. Так как в опыте III действующее значение тока больше, чем в опыте II, то можно утверждать, что в опыте II катушки включены согласно, в опыте III — встречно.

В соответствии с соотношениями (6.14) и (6.15) модули комплексных входных сопротивлений цепи, показанной на рис. 6.6, удовлетворяют соотношениям

$$|Z_{\text{вхII}}|^2 = (R_1 + R_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M)^2 = \left(\frac{U_{\text{вх}}}{I_{II}}\right)^2 = \left(\frac{300}{\sqrt{5}}\right)^2 (\text{Ом}^2);$$

$$|Z_{\text{вхIII}}|^2 = (R_1 + R_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)^2 = \left(\frac{U_{\text{вх}}}{I_{III}}\right)^2 = \left(\frac{300}{3}\right)^2 (\text{Ом}^2).$$

Для реактивных составляющих комплексов $Z_{\text{вхII}}$ и $Z_{\text{вхIII}}$ получаем

$$X_{\text{согл}} = \sqrt{|Z_{\text{вхII}}|^2 - (R_1 + R_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{300}{\sqrt{5}}\right)^2 - 60^2} = 120 (\text{Ом});$$

$$X_{\text{встр}} = \sqrt{|Z_{\text{вхIII}}|^2 - (R_1 + R_2)^2} = \sqrt{(100)^2 - 60^2} = 80 (\text{Ом}).$$

С учетом выражений $X_{\text{согл}} = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M$ и $X_{\text{встр}} = \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M$ величина сопротивления взаимной индукции равна

$$X_M = \omega M = (X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}})/4 = (120 - 80)/4 = 10 \text{ Ом,}$$

а искомый коэффициент взаимной индукции при $\omega = 1000$ рад/с равен

$$M = X_M/\omega = 10/1000 = 0,01 \text{ Гн.}$$

6.5. Линейный трансформатор в синусоидальном режиме

Простейший **трансформатор** представляет собой две катушки, намотанные на один сердечник, не имеющие гальванического контакта. Сердечник предполагаем неферромагнитным, поскольку рассматривается линейный случай.

Обычно трансформатор служит промежуточным звеном, включенным между источником электрической энергии (или электрического сигнала) и при-

емником. При этом трансформатор выполняет функции преобразования (трансформации) переменных токов и напряжений. Кроме этого, подбором параметров трансформатора в инженерной практике решают задачи согласования источника с нагрузкой с целью передачи наибольшей мощности в нагрузку.

Линейные трансформаторы применяют в различных областях электротехники, связи, радио, автоматики, приборостроения и др.

6.5.1. Основные уравнения линейного трансформатора при синусоидальном режиме и векторная диаграмма

В наиболее распространенном режиме работы трансформатора на зажимы одной катушки (ее называют первичной) подается напряжение от источника, а к зажимам другой катушки (вторичной) подключается сопротивление нагрузки.

На рис. 6.7, *a* первичная катушка трансформатора представлена собственной индуктивностью L_1 и резистивным сопротивлением R_1 . К ее зажимам (1–1') подключен источник, создающий синусоидальное напряжение; на рис. 6.7, *a* указан его комплекс действующего значения \dot{U}_1 .

Параметры вторичной катушки трансформатора на рис. 6.7, *a* обозначены L_2 и R_2 ; к ее зажимам (2–2') подсоединено сопротивление нагрузки $Z_n = R_n + jX_n$. Комплекс напряжения на нагрузке обозначен \dot{U}_2 . Индуктивная связь в цепи на рис. 6.7, *a* задана коэффициентом взаимной индукции M и одноименными зажимами.

Режим в рассматриваемой цепи подчиняется двум уравнениям по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 j\omega M; \quad (6.17)$$

$$0 = \dot{I}_2(R_1 + j\omega L_2) + \dot{I}_2(R_n + jX_n) + \dot{I}_1 j\omega M. \quad (6.18)$$

Комплексным уравнениям (6.17) и (6.18) на комплексной плоскости соответствуют два векторных многоугольника (рис. 6.10, *б*). При построении

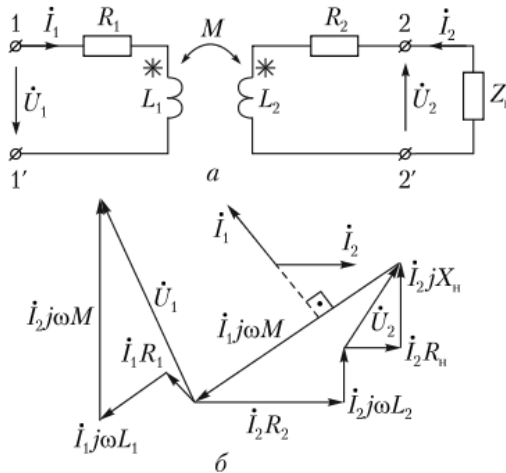


Рис. 6.7. Линейный трансформатор в синусоидальном режиме:

a — символическая модель нагруженного трансформатора; *б* — векторная диаграмма трансформатора (содержит два векторных многоугольника напряжений, иллюстрирующие выполнение второго закона Кирхгофа для первичного и вторичного контуров)

данной векторной диаграммы принимались во внимание следующие соображения.

Вектор $\dot{I}_2 j\omega M$ — напряжение взаимной индукции, наводимое на первой катушке током \dot{I}_2 , опережает его по фазе на 90° благодаря множителю j .

Вектор $\dot{I}_1 j\omega M$ — напряжения взаимной индукции на второй катушке опережает по фазе ток \dot{I}_1 на 90° .

Вектор $\dot{I}_2 jX_n$ — напряжение на реактивном сопротивлении нагрузки, построен в предположении ее индуктивного характера, т.е. $X_n > 0$.

6.5.2. Вносимое сопротивление

Для цепи, показанной на рис. 6.7, а, примем следующие обозначения:

- $R_1 + j\omega L_1 = Z_{11}$ — комплексное сопротивление изолированной первичной катушки;
- $R_2 + j\omega L_2 + R_n + jX_n = Z_{22}$ — комплексное сопротивление изолированного вторичного контура;
- $j\omega M = Z_M$ — комплексное сопротивление взаимной индукции.

Тогда уравнения (6.17) и (6.18) принимают вид

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_M; \quad (6.19)$$

$$0 = \dot{I}_2 Z_{22} + \dot{I}_1 Z_M. \quad (6.20)$$

Решаем систему уравнений (6.19), (6.20) относительно тока \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} - Z_M^2/Z_{22}}. \quad (6.21)$$

Из уравнения (6.21) следует, что входное сопротивление трансформатора (см. рис. 6.7, а) относительно зажимов источника (1—1') равно

$$Z_{\text{вх1}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{11} - \frac{Z_M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}. \quad (6.22)$$

В выражении (6.22) комплексное входное сопротивление трансформатора относительно первичных зажимов складывается из двух слагаемых:

- 1) Z_{11} — комплексное сопротивление изолированной первичной катушки, т.е. при отсутствии индуктивной связи между катушками;
- 2) $(\omega M)^2/Z_{22}$ — комплексное сопротивление, обусловленное наличием индуктивной связи и протеканием тока во вторичном контуре.

Второе слагаемое в формуле (6.22) называют **вносимым сопротивлением**, обозначают $Z_{\text{вн}}$. Итак,

$$Z_{\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}.$$

Структура выражения для вносимого сопротивления позволяет сделать следующие **выводы**.

1. Вносимое из вторичного контура трансформатора в первичный сопротивление может быть равно нулю в двух случаях:

- а) при отсутствии индуктивной связи между катушками трансформатора, когда $M = 0$;
- б) если $Z_{22} = \infty$, что означает обрыв вторичного контура и отсутствие тока I_2 ($I_2 = 0$).

2. При чисто резистивном сопротивлении Z_{22} (резонанс напряжений в изолированном вторичном контуре) вносимое сопротивление также резистивно (вещественно).

3. В общем случае комплексное сопротивление изолированного вторичного контура в показательной форме записи можно представить как $Z_{22} = |Z_{22}|e^{j\varphi_{22}}$, тогда

$$Z_{\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{|Z_{22}|} e^{-j\varphi_{22}}.$$

Следовательно, характер реактивности вносимого сопротивления противоположен характеру реактивности суммарного сопротивления изолированного вторичного контура. Другими словами, при емкостном характере Z_{22} ($\varphi_{22} < 0$) вносимое сопротивление имеет индуктивный характер, и наоборот.

4. В теоретическом случае, к которому на практике можно приближаться, $Z_{22} = 0$. Это возможно при емкостной нагрузке во вторичном контуре, обеспечивающей резонанс напряжений, и при отсутствии резистивных потерь. В этом случае $Z_{\text{вн}} = \infty$, ток в первичном контуре отсутствует ($I_1 = 0$), ток во вторичном контуре отличен от нуля ($I_2 \neq 0$).

5. Активную мощность, передаваемую из первичной цепи во вторичную и потребляемую сопротивлениями R_2 и R_n , можно трактовать как мощность, выделяемую на резистивной составляющей комплекса $Z_{\text{вн}} = R_{\text{вн}} + jX_{\text{вн}}$, чем пользуются при расчетах.

Пример 6.3. На входе цепи, показанной на рис. 6.8, действует синусоидальное напряжение $u_1(t) = 200\sqrt{2}\sin 1000t$ (В). Известны параметры: $R_1 = 200$ Ом; $L_1 = L_2 = 0,2$ Гн; $M = 0,1$ Гн; $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Определить показания приборов, измеряющих действующие значения, при замкнутом и разомкнутом ключе во вторичном контуре.

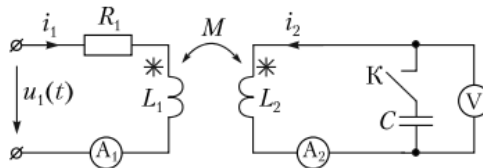


Рис. 6.8. Схема к примеру 6.3.

В примере дан расчет синусоидального режима в цепи, содержащей линейный трансформатор

Решение

Комплекс действующего значения входного напряжения $\dot{U}_1 = 200e^{j0}$ В.

Комплексные сопротивления элементов

$$Z_{R_1} = R_1 = 200 \text{ Ом}; \quad Z_{L_1} = j\omega L_1 = j1000 \cdot 0,2 = j200 \text{ Ом};$$

$$Z_{L_2} = j\omega L_2 = j200 \text{ Ом};$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{10^6}{1000 \cdot 5} = -j200 \text{ Ом};$$

$$Z_M = j\omega M = j1000 \cdot 0,1 = j100 \text{ Ом}.$$

1. Режим замкнутого ключа «К». Суммарное комплексное сопротивление вторичного контура

$$Z_{22} = Z_{L_2} + Z_C = j200 - j200 = 0.$$

Следовательно, вторичный контур в цепи на рис. 6.8 является идеальным LC -контуром без потерь в состоянии резонанса. При этом вносимое в первичный контур сопротивление

$$Z_{\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \infty.$$

Поэтому ток I_1 равен нулю, т.е. $A_1 \rightarrow 0$.

Уравнение по второму закону Кирхгофа для первичного контура

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 j\omega M$$

в рассматриваемом режиме принимает вид $\dot{U}_1 = \dot{I}_2 j\omega M$.

Из этого уравнения для модуля комплекса \dot{I}_2 получаем

$$\dot{I}_2 = \frac{U_1}{\omega M} = \frac{200}{100} = 2 \text{ (A)},$$

т.е. $A_2 \rightarrow 2 \text{ A}$.

Вольтметр при замкнутом ключе показывает действующее значение напряжения на конденсаторе:

$$U_C = I_2 \frac{1}{\omega C} = 2 \cdot 200 = 400 \text{ (В)}; \quad V \rightarrow 400 \text{ В}.$$

2. Режим разомкнутого ключа «К». При разомкнутом ключе ток во вторичном контуре $I_2 = 0$, $A_2 \rightarrow 0$. Тогда ток в первичном контуре определяется выражением

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1}.$$

Модуль этого выражения (определяющий показания амперметра) равен

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} = \frac{200}{\sqrt{200^2 + 200^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (A)}; \quad A_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A}.$$

Разность потенциалов на зажимах вольтметра при разомкнутом ключе обусловлена напряжением, наведенным первичным током. Его комплекс равен $\dot{U}_{2M} = j\omega M \dot{I}_1$. Модуль записанного комплекса

$$U_{2M} = \omega M I_1 = 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} \text{ (В)}.$$

Таким образом, при разомкнутом ключе показание вольтметра $V \rightarrow \frac{100}{\sqrt{2}} \text{ В}$.

Контрольные вопросы и задания

1. В каком случае две катушки индуктивности называют индуктивно связанными?
2. Что понимается под напряжением взаимной индукции U_M ?
3. Какие параметры характеризуют степень индуктивной связи?
4. Для двух индуктивно связанных катушек, показанных на рис. 6.1, а, известны собственные индуктивности $L_1 = L_2 = 10 \text{ мГн}$. В первой катушке протекает ток $i_1(t) = 2 \cdot 10^3 t \text{ (A)}$, а на разомкнутых зажимах второй катушки наводится постоянная разность потенциалов величиной $|u_{2M}| = 10 \text{ В}$. Определите коэффициент взаимной индукции M , а также коэффициент связи K .

5. Через катушку L_2 (см. рис. 6.1, б) протекает ток $i_2(t) = 0,1\sin 1000t$ (А). Зажимы первой катушки разомкнуты. Известны $L_1 = L_2 = 10$ мГн и коэффициент связи $K = 0,4$. Определите функцию напряжения взаимной индукции $u_{1M}(t) = (\varphi_a - \varphi_b)(t)$, наведенного на первой катушке.

6. В условиях задания 5 найдите функцию времени напряжения на второй катушке $u_2(t) = (\varphi_b - \varphi_r)(t)$.

7. Что понимается под одноименными зажимами двух индуктивно связанных катушек? Определите зажим второй катушки, одноименный с зажимом «а», в цепях на рис. 6.9 и 6.10.

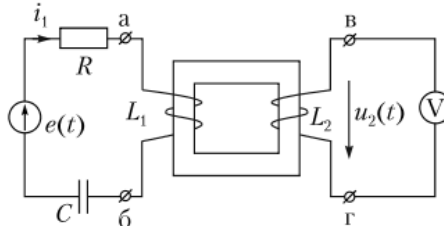


Рис. 6.9. К заданиям 7, 11

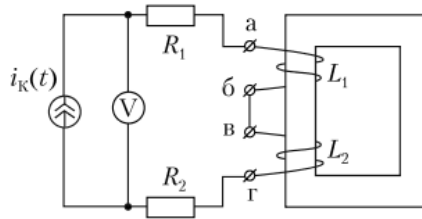


Рис. 6.10. К заданиям 7, 13, 14

8. Для цепи, показанной на рис. 6.11, запишите полную систему уравнений Кирхгофа относительно мгновенных значений токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

9. На входе цепи, показанной на рис. 6.11, действует синусоидальное напряжение $u_{вх}(t) = 200\sin 1000t$ (В); $R_1 = R_2 = 20$ Ом; $L_1 = 0,03$ Гн; $L_2 = 0,05$ Гн; $M = 0,01$ Гн; $C = 100$ мкФ. Запишите полную систему уравнений Кирхгофа относительно комплексов токов в ветвях. Пользуясь ей, найдите показания идеального амперметра, измеряющего действующее значение тока. Что покажет амперметр при воздействии на входе постоянного напряжения $u_{вх} = \text{const} = 20$ В?

10. В цепи, показанной на рис. 6.11, произошел обрыв емкостной ветви. Рассчитайте показания идеального амперметра, если $u_{вх}(t) = 10\sin 1000t$ (В); $R_1 = R_2 = 40$ Ом; $L_1 = L_2 = 0,05$ Гн; коэффициент индуктивной связи $K = 0,2$.

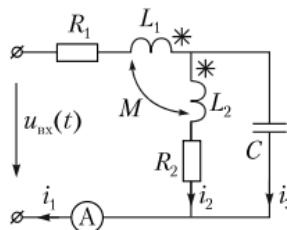


Рис. 6.11. К заданиям 8–10

11. На входе цепи, показанной на рис. 6.9, действует синусоидальный источник ЭДС $e(t) = 100\sqrt{2}\sin 1000t$ (В); $R = 20$ Ом; $L_1 = L_2 = 0,02$ Гн; $M = 0,01$ Гн; $C = 50$ мкФ. Определите показания идеального вольтметра, измеряющего действующее значение напряжения.

12. Определите комплексное входное сопротивление двух последовательно соединенных индуктивно связанных катушек с параметрами $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$; $L_1 = L_2 = 10 \text{ Гн}$; $M = 2 \text{ мГн}$. Частота синусоидального напряжения на входе $\omega = 2000 \text{ рад/с}$. Рассмотрите случаи согласного и встречного включения катушек.

13. В цепи, показанной на рис. 6.10, действует источник синусоидального тока $i_k(t) = 2 \sin 1000t \text{ (А)}$; $L_1 = L_2 = 0,01 \text{ Гн}$; $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$; $M = 5 \text{ мГн}$. Определите показания вольтметра, измеряющего действующее значение.

14. В условиях задания 13 зажимы первой катушки «а» и «б» поменяли местами. Определите показания вольтметра.

15. В цепи, показанной на рис. 6.12, действует синусоидальный источник ЭДС $e(t) = 100\sqrt{2} \sin 1000t \text{ (В)}$. Показание идеального амперметра, измеряющего действующее значение напряжения, — $0,707 \text{ А}$. Определите величины коэффициентов взаимной индукции M и связи K , если $L_1 = L_2 = 40 \text{ мГн}$; $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$.

16. Как изменится показание вольтметра в условиях предыдущего вопроса, если входной источник $e(t)$ наряду с синусоидальной будет содержать и постоянную составляющую, а именно $e(t) = 100 + 100\sqrt{2} \sin 1000t \text{ (В)}$?

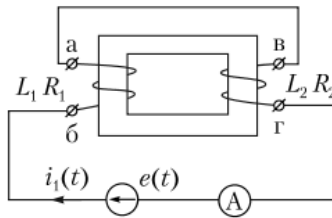


Рис. 6.12. К заданиям 15, 16

17. Пользуясь методикой подпараграфа 6.5.1, запишите уравнения по второму закону Кирхгофа для первичного и вторичного контуров трансформатора, показанного на рис. 6.8, в комплексном виде, считая ключ замкнутым. По этим уравнениям постройте соответствующие векторные диаграммы.

18. Что понимается под вносимым сопротивлением $Z_{\text{вн}}$ из вторичного контура в первичный для линейного трансформатора?

19. В каких случаях $Z_{\text{вн}} = 0$?

20. Чему равно $Z_{\text{вн}}$ в схеме на рис. 6.8 в условиях примера 6.3?

Глава 7

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ В СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- шесть форм записи основных уравнений пассивного четырехполюсника в синусоидальном режиме;
- понятия комплексного коэффициента передачи, амплитудно-частотной, фазочастотной характеристик линейного четырехполюсника, характеристических параметров симметричного четырехполюсника;

уметь

- рассчитывать коэффициенты любой из форм записи основных уравнений по заданной схеме четырехполюсника;
- получать выражения комплексного коэффициента передачи, амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик для заданного четырехполюсника и строить их графики;

владеть

- методикой качественной оценки частотно-избирательных свойств простейших LC - и RC -четырёхполюсников.

Любая цепь, имеющая две пары зажимов, называется **четырёхполюсником**. Если схема четырёхполюсника не содержит источников электрической энергии, он является пассивным и изображается в соответствии с рис. 7.1, *а*. Линейный пассивный четырёхполюсник содержит только линейные элементы R, L, C .

Благодаря наличию двух пар зажимов (на рис. 7.1 обозначенных 1–1' и 2–2'), четырёхполюсник может служить промежуточным звеном между двумя внешними двухполюсниками. Чаще всего один из внешних двухполюсников является источником электрической энергии, а второй — приемником. Независимо от конкретной структуры линейные пассивные четырёхполюсники обладают некоторыми общими свойствами, рассмотрению которых и посвящена данная глава.

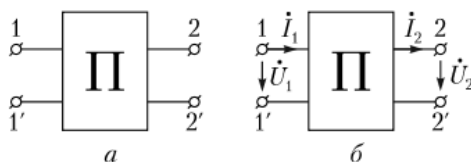


Рис. 7.1. Пассивный четырёхполюсник:

а — общее изображение; *б* — символическая модель для синусоидального режима

В установившемся синусоидальном режиме свойства четырехполюсника как промежуточного звена между двумя внешними цепями полностью определяются связью между четырьмя комплексами, изображающими синусоидальные токи и напряжения на обеих парах зажимов (рис. 7.1, б), а именно $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2$. Условимся, что это комплексы действующего значения. Для линейного пассивного четырехполюсника эти комплексы удовлетворяют системе двух алгебраических уравнений, которые называются основными уравнениями четырехполюсника.

7.1. Основные уравнения линейного пассивного четырехполюсника

В названных уравнениях два комплекса из четырех $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ выражаются через остальные. В зависимости от того, какая пара комплексов стоит в левой части основных уравнений, различают шесть форм их записи. Эти формы принято называть следующим образом [4, 8]: [A]-форма; [B]-форма; [Y]-форма; [Z]-форма; [G]-форма; [H]-форма.

Например, в уравнениях [A]-формы комплексы \dot{U}_1, \dot{I}_1 выражаются через \dot{U}_2, \dot{I}_2 :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{cases} \quad (7.1)$$

Коэффициенты A, B, C, D в уравнениях (7.1) представляют собой комплексные числа. Они являются параметрами четырехполюсника, зависящими от частоты внешнего источника. Причем коэффициенты A и D безразмерные, B имеет размерность сопротивления, C — проводимости. В уравнениях [Y]-формы комплексы \dot{I}_1, \dot{I}_2 выражены через \dot{U}_1, \dot{U}_2 :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{cases} \quad (7.2)$$

Коэффициенты $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ имеют размерности проводимости. В уравнениях четырехполюсника [Z]-формы

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2. \end{cases} \quad (7.3)$$

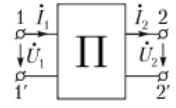

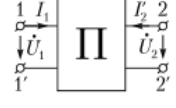
все коэффициенты имеют размерность сопротивления.

В табл. 7.1 приведены системы основных уравнений четырехполюсника для всех шести форм записи.

Если два четырехполюсника различной структуры имеют одинаковые коэффициенты, то по отношению к внешним цепям они эквивалентны. Поэтому четырехполюсник можно задавать не конкретной схемой, а его коэффициентами. Значение коэффициентов в уравнениях четырехполюсника любой формы записи зависит от выбора положительных направлений токов \dot{I}_1, \dot{I}_2 относительно напряжений \dot{U}_1, \dot{U}_2 (см. рис. 7.1, б). Поэтому задаваемая совокупность коэффициентов четырехполюсника должна дополняться информацией о принятых положительных направлениях токов относительно напряжений.

В инженерной практике для каждой формы записи основных уравнений четырехполюсника приняты определенные положительные направления

Основные уравнения линейного пассивного четырехполюсника

Форма	Уравнения	Принятые положительные направления	Уравнения связи коэффициентов четырехполюсника
[A]	$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}$		$AD - BC = 1$
[B]	$\begin{cases} \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1, \\ \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1 \end{cases}$		$B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1$
[Y]	$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$		$Y_{21} = Y_{12}$
[Z]	$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$	—//—	$Z_{21} = Z_{12}$
[H]	$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$	—//—	$H_{21} = -H_{12}$
[G]	$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_1 = G_{21}\dot{U}_2 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$	—//—	$G_{21} = -G_{12}$

токов. Они указаны на рисунках табл. 7.1. Обращаем внимание, что на рисунках табл. 7.1 для двух противоположных по направлению токов через пару зажимов 1—1' приняты обозначения \dot{I}_1 и \dot{I}'_1 . Аналогично обозначения \dot{I}_2 и \dot{I}'_2 соответствуют двум встречно направленным токам через зажимы 2—2'.

Можно показать, что из четырех коэффициентов четырехполюсника независимы только три. Например, коэффициенты [A]-формы удовлетворяют уравнению $AD - BC = 1$, а коэффициенты [Y]-формы — уравнению $Y_{21} = Y_{12}$.

Уравнения, связывающие между собой коэффициенты в основных уравнениях четырехполюсника, приведены в табл. 7.1.

Из сравнения уравнений [B]-формы с уравнениями [A]-формы видим, что при переходе от [A]-формы к [B]-форме пары зажимов 1—1' и 2—2' меняются местами. Формой [A] удобно пользоваться, когда источник подключен к зажимам 1—1', а нагрузка — к 2—2'. Если источник подключен к зажимам 2—2', а нагрузка — к 1—1', то удобнее [B]-форма. Поэтому [B]-форму иногда называют [A]-формой при обратном питании. Несложно заметить, что коэффициенты B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{22} связаны с A , B , C , D соотношениями $B_{11} = D$; $B_{12} = B$; $B_{21} = C$; $B_{22} = A$.

Тогда для [B]-формы можно записать

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 + B\dot{I}'_1, \\ \dot{I}'_2 = C\dot{U}_1 + A\dot{I}'_1. \end{cases}$$

Вывод. При перемене местами пар зажимов четырехполюсника коэффициенты A и D меняются местами. Поэтому для симметричного четырехполюсника коэффициенты A и D равны.

7.2. Расчет коэффициентов основных уравнений линейного пассивного четырехполюсника

Если известны схема и параметры элементов четырехполюсника, возможен расчет его коэффициентов. Поскольку искомые комплексные коэффициенты не зависят ни от величины напряжения питания, ни от сопротивления нагрузки, для их определения можно использовать любые три режима работы четырехполюсника. Обычно с этой целью используют режимы холостого хода (х.х.) и короткого замыкания (к.з.) внешних зажимов четырехполюсника. Данная методика показана на следующем примере.

Пример 7.1. Для четырехполюсника, изображенного на рис. 7.2, найдем коэффициенты уравнений в формах $[A]$, $[Y]$, $[Z]$.

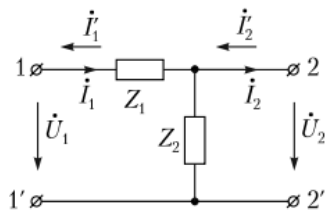


Рис. 7.2. Схема к примеру 7.1 (методика расчета коэффициентов основных уравнений четырехполюсника)

Решение

1. Расчет коэффициентов уравнений $[A]$ -формы (7.1):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{cases}$$

А. Режим х.х. зажимов 2—2' (питание со стороны зажимов 1—1'). При обрыве зажимов 2—2' ток $\dot{I}_2 = 0$. Тогда в соответствии с уравнениями (7.1) для коэффициентов A и C справедливы выражения

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}; \quad C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}.$$

Так как в этом случае через элементы Z_1 и Z_2 течет один и тот же ток \dot{I}_1 , то для напряжения на входе и выходе справедливы равенства $\dot{U}_1 = \dot{I}_1(Z_1 + Z_2)$; $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 Z_2$. С учетом этих соотношений для A и C получаем

$$A = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}; \quad C = \frac{1}{Z_2}.$$

Б. Режим короткого замыкания зажимов 2—2' (питание со стороны зажимов 1—1'). Если зажимы 2—2' в цепи, изображенной на рис. 7.2, замкнуты накоротко, потенциалы точек «2» и «2'» равны, напряжение $\dot{U}_2 = 0$. Ток через сопротивление Z_2 отсутствует; тогда согласно первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 = \dot{U}_1 / Z_1. \quad (7.4)$$

Уравнения (7.1) в данном режиме имеют вид

$$\dot{U}_1 = B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = D\dot{I}_2.$$

Отсюда комплексные коэффициенты B и D определяются соотношениями

$$B = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}; \quad D = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

С учетом (7.4) коэффициенты B и D равны

$$B = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1/Z_1} = Z_1; \quad D = 1.$$

2. Расчет коэффициентов уравнений [Y]-формы (7.2):

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{cases}$$

Для нахождения комплексов Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} , Y_{22} рекомендуется использовать режимы короткого замыкания внешних зажимов четырехполюсника.

А. Режим короткого замыкания зажимов 2–2' (при питании со стороны зажимов 1–1'). В этом случае $\dot{U}_2 = 0$ и уравнения (7.2) принимают вид

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1; \quad \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1.$$

Из первого уравнения справедливо соотношение

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1},$$

из которого четко виден физический смысл коэффициента Y_{11} — входная проводимость четырехполюсника относительно первичных зажимов при коротком замыкании вторичных зажимов. С учетом соотношения (7.4)

$$Y_{11} = \frac{\dot{U}_1/Z_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{Z_1}.$$

Коэффициент Y_{21} из второго уравнения определяется соотношением

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}.$$

При принятом для \dot{I}_2 положительном направлении ток \dot{I}_2 в цепи, изображенной на рис. 7.2, равен $\dot{I}_2 = -\dot{U}_1/Z_1$, тогда

$$Y_{21} = -\frac{1}{Z_1}.$$

Б. Режим короткого замыкания зажимов 1–1' (питание со стороны зажимов 2–2'). Так как по условию напряжение $\dot{U}_1 = 0$, то уравнения (7.2) в рассматриваемом случае таковы:

$$\dot{I}_1 = Y_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = Y_{22}\dot{U}_2.$$

Принимаем во внимание, что при коротком замыкании зажимов 1–1' цепи, изображенной на рис. 7.2, и питании со стороны зажимов 2–2' токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 определяются соотношениями

$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{U}_2}{Z_1}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)}.$$

С учетом записанных равенств для коэффициентов Y_{12} и Y_{22} получаем

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = -\frac{1}{Z_1}; \quad Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}.$$

Коэффициент Y_{22} представляет собой комплексную входную проводимость схемы четырехполюсника относительно вторичных зажимов при коротком замыкании первичных зажимов.

3. Расчет коэффициентов уравнений [Z]-формы (7.3):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2. \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} используем поочередно режимы холостого хода зажимов 2–2' и 1–1'.

А. Режим холостого хода зажимов 2–2' (питание со стороны зажимов 1–1'). В этом режиме $\dot{I}_2 = 0$. Для цепи, изображенной на рис. 7.2, в рассматриваемом случае

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_2}; \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_1 Z_2.$$

Уравнения (7.3) при $\dot{I}_2 = 0$ запишутся так:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1; \quad \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1.$$

Из первого уравнения комплексный коэффициент Z_{11} равен

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_1 + Z_2.$$

Согласно последнему, Z_{11} — входное сопротивление четырехполюсника относительно первичных зажимов при разомкнутых вторичных зажимах. Комплекс Z_{21} найдем из второго уравнения:

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 Z_2}{\dot{I}_1} = Z_2.$$

Б. Режим холостого хода зажимов 1–1' (питание со стороны зажимов 2–2'). Если источник подключен к зажимам 2–2', а зажимы 1–1' разомкнуты, имеем $\dot{I}_1 = 0$, поэтому

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2}; \quad \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2.$$

Из уравнений (7.3) для Z_{12} и Z_{22} получаем соотношения

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = Z_2; \quad Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_2.$$

Комплексный коэффициент Z_{22} представляет собой входное сопротивление четырехполюсника со стороны вторичных зажимов при разомкнутых первичных зажимах.

Можно убедиться в том, что найденные в примере коэффициенты уравнений четырехполюсника в формах [A], [Y], [Z] удовлетворяют соответствующим уравнениям связи (табл. 7.1). Методика расчета коэффициентов [H]-формы и [G]-формы аналогична.

7.3. Простейшие схемы замещения линейного пассивного четырехполюсника

Так как линейный пассивный четырехполюсник по отношению к внешним цепям, подключаемым к его зажимам 1–1' и 2–2', определяется тремя независимыми комплексными коэффициентами, его простейшая схема замещения содержит три пассивных элемента. Возможны два варианта соединения трех элементов, образующих схему замещения четырехполюсника: Т-схема (рис. 7.3, а) и П-схема (рис. 7.3, б).

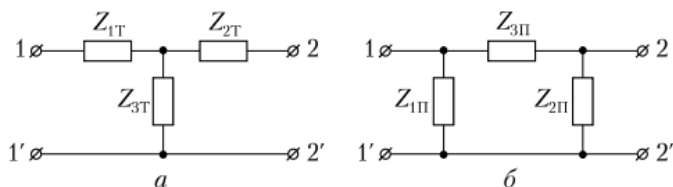


Рис. 7.3. Простейшие схемы замещения линейного пассивного четырехполюсника:
 а – Т-образная схема; б – П-образная схема

Комплексные сопротивления элементов Т-схемы обозначены $Z_{1Т}$, $Z_{2Т}$, $Z_{3Т}$. Комплексные сопротивления П-схемы обозначены $Z_{1П}$, $Z_{2П}$, $Z_{3П}$.

Критерием эквивалентности заданного четырехполюсника и его схемы замещения является равенство их коэффициентов. Поэтому переход от конкретного четырехполюсника к схеме замещения обычно проводится по его коэффициентам, известным либо из расчета, либо из эксперимента. Выражения, связывающие комплексные сопротивления четырехполюсников вида как на рис. 7.3, а, б с коэффициентами их основных уравнений, могут быть получены по методике, изложенной в параграфе 7.2.

7.4. Понятие комплексного коэффициента передачи линейной системы

Реакция линейной системы на синусоидальное воздействие в установившемся режиме представляет собой гармоническую функцию той же частоты, но со своими амплитудой и начальной фазой.

Под **комплексным коэффициентом передачи линейной системы** понимается отношение комплекса, изображающего синусоидальную реакцию, к комплексу, изображающему синусоидальное воздействие.

В дальнейшем реакцию будем называть *выходной величиной* и обозначать $X_{\text{вых}}(t)$. Воздействие будем называть *входной величиной* и обозначать $X_{\text{вх}}(t)$.

Комплексы, изображающие входную и выходную величины, в общем случае обозначим $\dot{X}_{\text{вх}}$ и $\dot{X}_{\text{вых}}$ соответственно. Согласно определению комплексный коэффициент передачи линейной системы равен отношению

$$K(j\omega) = \frac{\dot{X}_{\text{вых}}}{\dot{X}_{\text{вх}}}.$$

Так как реакция линейной системы на синусоидальное воздействие $X_{\text{вых}}(t)$ зависит от частоты, комплексный коэффициент передачи также зависит от частоты, поэтому обозначается $K(j\omega)$. В теории линейных пассивных четырехполюсников под $\dot{X}_{\text{вх}}$ и $\dot{X}_{\text{вых}}$ обычно понимают любую пару из четырех комплексов \dot{U}_1 , \dot{I}_1 , \dot{U}_2 , \dot{I}_2 (см. рис. 7.1), а комплексную функцию частоты $K(j\omega)$ иногда называют **амплитудно-фазовой характеристикой четырехполюсника**.

Комплексный коэффициент передачи четырехполюсника может быть безразмерным, иметь размерность сопротивления либо проводимости. Например (см. рис. 7.1):

$$K_U(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 \quad (7.5)$$

— комплексный коэффициент передачи по напряжению, безразмерен;

$$K_f(j\omega) = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 \quad (7.6)$$

— комплексный коэффициент передачи по току, безразмерен;

$$K_z(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 \text{ (Ом)}$$

— комплексное передаточное сопротивление;

$$K_y(j\omega) = \dot{I}_2 / \dot{U}_1 \text{ (Ом}^{-1}\text{)}$$

— комплексная передаточная проводимость.

Все перечисленные комплексные коэффициенты передачи являются функциями частоты и зависят от величины сопротивления нагрузки Z_H . В важных для практики случаях работы четырехполюсника — холостого хода и короткого замыкания ($Z_H = \infty$ и $Z_H = 0$) — $K(j\omega)$ определяется только коэффициентами четырехполюсника. Так, комплексный коэффициент передачи по напряжению $K_U(j\omega)$, определяемый выражением (7.5), в режиме холостого хода зажимов 2—2' ($\dot{I}_2 = 0$) из первого уравнения системы (7.1)

$$K_{U_{xx}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A},$$

т.е. данный комплекс $K_{U_{xx}}(j\omega)$ обратен коэффициенту A уравнений четырехполюсника в $[A]$ -форме.

Комплексный коэффициент передачи по току в режиме короткого замыкания выходных зажимов ($\dot{U}_2 = 0$) в соответствии с (7.6) и вторым уравнением системы (7.1) равен

$$K_{I_{кз}}(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{D},$$

7.5. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики линейного пассивного четырехполюсника

Амплитудно-фазовую характеристику четырехполюсника, являющуюся комплексной функцией частоты, можно представить в показательной форме записи

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}. \quad (7.7)$$

Модуль комплекса (7.7) $|K(j\omega)|$ обозначают $K(\omega)$ и называют **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)** четырехполюсника.

Аргумент комплекса (7.7) $\psi(\omega)$ называют **фазочастотной характеристикой (ФЧХ)** четырехполюсника.

Частотные зависимости $K(\omega)$ и $\psi(\omega)$ являются важными характеристиками четырехполюсника. Их вид имеет решающее значение в работе многих устройств автоматики, радиотехники и др.

Пример 7.2. Для четырехполюсников, изображенных на рис. 7.4, а и б, в режиме холостого хода зажимов 2—2' получить аналитические выражения амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик, построить их графики. Входным воздействием считать напряжение \dot{U}_1 , выходной реакцией — напряжение \dot{U}_2 .

Решение

1. Схема на рис. 7.4, а. По условию зажимы 2—2' считаем разомкнутыми; поэтому $\dot{I}_2 = 0$, $\dot{I}_C = \dot{I}_1$; для \dot{U}_1 и \dot{U}_2 справедливы равенства

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 [R + 1/(j\omega C)]; \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_1 / (j\omega C).$$

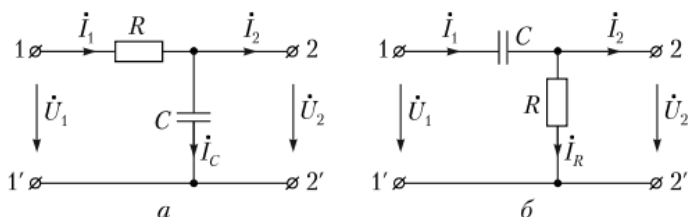


Рис. 7.4. Схемы четырехполосников к примеру 7.2 (расчет АЧХ и ФЧХ заданного четырехполосника)

С учетом записанных соотношений комплексный коэффициент передачи по напряжению цепи, изображенной на рис. 7.4, а, равен

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1/(j\omega C)}{\dot{I}_1[R + 1/(j\omega C)]} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Приводим полученный комплекс к показательной форме записи:

$$K(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j \arctg \omega RC}$$

Его модуль $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ есть искомая амплитудно-частотная характеристика, а аргумент $\psi(\omega) = -\arctg \omega RC$ — фазо-частотная характеристика заданного четырехполосника. Графики $K(\omega)$ и $\psi(\omega)$ по полученным для них выражениям построены на рис. 7.5, а.

2. Схема на рис. 7.4, б. При питании четырехполосника, представленного на рис. 7.4, б, со стороны зажимов 1—1' и холостом ходе зажимов 2—2' справедливы соотношения

$$\dot{I}_2 = 0; \quad \dot{I}_R = \dot{I}_1; \quad \dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left[\frac{1}{j\omega C} + R \right]; \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_1 R.$$

Искомый коэффициент передачи по напряжению равен

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1 R}{\dot{I}_1 [1/(j\omega C) + R]} = \frac{1}{1 - j/(\omega RC)} = \frac{1}{\sqrt{1 + [1/(\omega RC)]^2}} e^{j \arctg \frac{1}{\omega RC}}$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики цепи, изображенной на рис. 7.4, б, определяются выражениями

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + [1/(\omega RC)]^2}}; \quad \psi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}$$

Графики АЧХ и ФЧХ четырехполосника, изображенного на рис. 7.4, б, построены на рис. 7.5, б.

Вид полученных амплитудно-частотных характеристик $K(\omega)$ свидетельствует о частотно-избирательных свойствах рассмотренных четырехполосников. Схемы, заданные на рис. 7.4, являются простейшими звеньями, из которых строятся RC -фильтры. Схема на рис. 7.4, а проявляет свойства низкочастотного фильтра (пропускает низкие частоты и задерживает высокие частоты). Схема на рис. 7.4, б обладает свойствами высокочастотного фильтра (задерживает низкие частоты и пропускает высокие частоты).

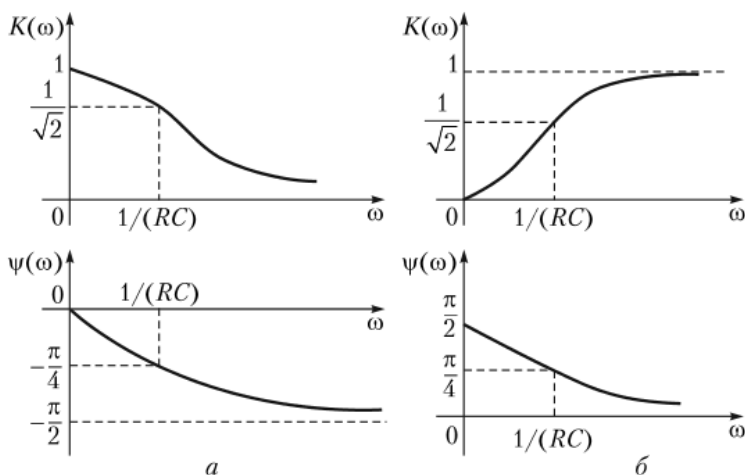


Рис. 7.5. К решению примера 7.2. Графики амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик:

a — для схемы на рис. 7.4, a ; b — для схемы на рис. 7.4, b

7.6. Симметричный четырехполюсник и его характеристические параметры

Четырехполюсник является **симметричным**, если при перемене местами его пар зажимов 1—1' и 2—2' (см. рис. 7.1) режимы во внешних цепях (источника и нагрузки) не изменяются. В отличие от несимметричного четырехполюсника, который по отношению к внешним цепям задается тремя независимыми комплексными параметрами, симметричный четырехполюсник характеризуется двумя параметрами. Коэффициенты основных уравнений симметричного четырехполюсника наряду с уравнением связи (см. табл. 7.1) удовлетворяют дополнительному условию. Для наиболее употребимых форм систем параметров эти условия следующие:

- для $[A]$ -формы $A = D$;
- для $[Y]$ -формы $Y_{11} = Y_{22}$;
- для $[Z]$ -формы $Z_{11} = Z_{22}$.

Сопротивления Т- и П-образной схем замещения симметричного четырехполюсника (см. рис. 7.3, a , b) удовлетворяют условиям $Z_{1T} = Z_{2T}$; $Z_{1П} = Z_{2П}$.

При анализе свойств четырехполюсника как фильтра вводится еще одна система параметров, называемых характеристическими. Для симметричного четырехполюсника характеристические параметры представлены двумя зависящими от частоты комплексами.

Один из них имеет размерность сопротивления, обозначается Z_C , называется характеристическим сопротивлением. Второй параметр является безразмерным комплексом, обозначается g и называется постоянной передачи (или мерой передачи).

7.6.1. Характеристическое сопротивление

Характеристическое сопротивление четырехполюсника — это параметр, равный среднему геометрическому из двух его входных сопротивлений при холостом ходе и коротком замыкании противоположных зажимов:

$$Z_C = \sqrt{Z_{1X}Z_{1K}} = \sqrt{Z_{2X}Z_{2K}}.$$

В данном равенстве приняты обозначения:

- Z_{1X} — комплексное входное сопротивление со стороны зажимов 1—1' при холостом ходе противоположных зажимов (2—2');
- Z_{1K} — комплексное входное сопротивление со стороны зажимов 1—1' при коротком замыкании зажимов 2—2';
- Z_{2X} и Z_{2K} — аналогичные величины со стороны зажимов 2—2'.

С характеристическим сопротивлением Z_C связано следующее свойство четырехполюсника (рис. 7.6): при подключении к зажимам 2—2' сопротивления нагрузки $Z_n = Z_C$, входное сопротивление со стороны зажимов 1—1' также равно Z_C , т.е.

$$\dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_C. \quad (7.8)$$

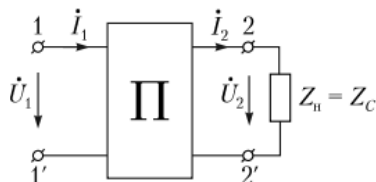


Рис. 7.6. При нагрузке симметричного четырехполюсника на характеристическое сопротивление $Z_n = Z_C$ его входное сопротивление со стороны зажимов 1—1' также равно Z_C

Таким образом, источник, подключенный к зажимам 1—1', как бы «не ощущает» наличие четырехполюсника как промежуточного звена между ним и нагрузкой.

Величину Z_C можно выразить через любую систему параметров четырехполюсника, например через коэффициенты уравнений в $[A]$ -форме $Z_C = \sqrt{B/C}$. Режим нагрузки на характеристическое сопротивление называется согласованным. Из формулы (7.8) следует важное соотношение для согласованного режима: при $Z_n = Z_C$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

7.6.2. Постоянная передачи

Постоянная передачи g — это безразмерный комплекс, определяющий соотношение между комплексами напряжений (или токов) на входе и выходе четырехполюсника в согласованном режиме, а именно: при $Z_n = Z_C$

$$g = \ln \left[\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right] = \ln \left[\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right]. \quad (7.9)$$

Из формулы (7.9) следует, что при $Z_n = Z_C$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^g. \quad (7.10)$$

В выражении (7.10) комплексную постоянную передачи g представим в алгебраической форме $g = a + jb$, а комплексы \dot{U}_1 и \dot{U}_2 — в показательной форме $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_{U1}}$; $\dot{U}_2 = U_2 e^{j\varphi_{U2}}$. Получаем следующее:

$$\frac{U_1 e^{j\varphi_{U_1}}}{U_2 e^{j\varphi_{U_2}}} = e^{a+jb}, \text{ или } \frac{U_1}{U_2} e^{j(\varphi_{U_1} - \varphi_{U_2})} = e^a e^{jb}.$$

В правой и левой частях последнего уравнения стоят комплексы, имеющие показательную форму. Из него следуют два уравнения — для модулей и аргументов:

$$\frac{U_1}{U_2} = e^a; \quad \varphi_{U_1} - \varphi_{U_2} = b. \quad (7.11)$$

Таким образом, вещественная часть комплексного параметра g определяет связь между амплитудами напряжений на входе и выходе четырехполюсника, нагруженного согласованно. Мнимая часть b постоянной передачи равна сдвигу фаз между напряжениями на входе и выходе четырехполюсника в согласованном режиме. Аналогичное утверждение справедливо и относительно токов на входе и выходе схемы на рис. 7.6.

Другими словами, величины a и b характеризуют соотношение между амплитудами и фазами сигналов на входе и выходе согласованного четырехполюсника. Их называют: a — коэффициент затухания, b — коэффициент фазы.

Параметры a и b являются функциями частоты. По характеру частотной зависимости $a(\omega)$ можно судить о способности четырехполюсника пропускать на выход сигнал, поданный на вход.

Если $a = 0$, то согласно первому уравнению (7.11) $U_1/U_2 = e^0 = 1$; $U_2 = U_1$, т.е. амплитуды напряжений на выходе и входе равны. Поданный на вход сигнал полностью проходит на выход.

Если $a \rightarrow \infty$, то справедливо уравнение $U_1/U_2 = e^\infty = \infty$, это значит, что при любом конечном напряжении на входе напряжение на выходе $U_2 = 0$; сигнал, поданный на вход, не проходит на выход.

В связи со сказанным системой характеристических параметров Z_C и $g = a + jb$ пользуются в теории частотных электрических фильтров. Функцию $g(\omega)$ обычно получают по предварительно найденной зависимости от частоты коэффициента A уравнений четырехполюсника в $[A]$ -форме с использованием соотношения $\operatorname{ch} g = A(\omega)$ [8].

7.7. Понятие о частотных электрических фильтрах

Под **электрическим фильтром** понимается четырехполюсник, который пропускает без ослабления синусоидальные сигналы, соответствующие заданному частотному диапазону, и не пропускает сигналы всех остальных частот. Диапазон частот, при которых ослабление мало, называют полосой прозрачности или полосой пропускания. Остальная область частот называется полосой задерживания или затухания.

В зависимости от пропускаемого частотного диапазона, различают фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры верхних частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ) и заграждающие фильтры (ЗФ). Заграждающие фильтры называют также режекторными.

На рис. 7.7, a представлена амплитудно-частотная характеристика идеального полосового фильтра. Ее главные особенности таковы:

- в полосе пропускания $K_U(\omega) = 1$;
- вне полосы пропускания (в области задерживания) $K_U(\omega) = 0$.

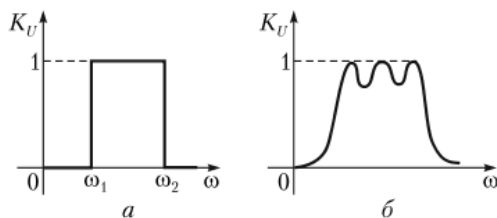


Рис. 7.7. АЧХ полосового фильтра:

a — идеального; *б* — реального

Следовательно, для АЧХ идеального фильтра характерен ее резкий спад при переходе от области прозрачности к области задерживания (затухания) фильтра.

Свойства реальных фильтров отличны от идеальных и могут лишь приближаться к ним. Один из вариантов АЧХ $K_U(\omega)$ реального полосового фильтра показан на рис. 7.7, б. При проектировании реальных фильтров обычно задаются:

а) степень неравномерности АЧХ в области прозрачности (допустимое отклонение $K_U(\omega)$ от единицы);

б) допустимое отклонение $K_U(\omega)$ от нуля в области задерживания (или степень ослабления сигнала на заданной частоте).

Следует также обратить внимание, что АЧХ реального фильтра обязательно содержит участок, не удовлетворяющий предъявленным требованиям как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания. Соответствующий частотный диапазон называется переходной областью. Чем больше крутизна АЧХ в переходной области, тем ее частотный диапазон уже и выше качество фильтрации.

Принцип работы подавляющего большинства электрических фильтров основан на зависимости от частоты сопротивлений индуктивных (ωL) и емкостных ($1/(\omega C)$) элементов. Большой класс применяемых электрических фильтров содержит только катушки индуктивности и конденсаторы, так называемые *LC*-фильтры.

7.7.1. Пассивные *LC*-фильтры

На рис. 7.8, *a, в — д* приведены схемы простейших *LC*-звеньев, обладающих свойствами ФНЧ (с частотной характеристикой, показанной на рис. 7.8, б), ФВЧ, ПФ и ЗФ соответственно. Все они принадлежат к категории *LC*-фильтров типа «*K*» [3, 4]. Для этих звеньев произведение комплексного сопротивления продольной ветви на комплексное сопротивление поперечной ветви не зависит от частоты и равно K , т.е. $Z_{\text{прод}} Z_{\text{попер}} = K$. Например, для схемы на рис. 7.8, *a* $Z_{\text{прод}} Z_{\text{попер}} = j\omega L / (j\omega C) = L/C$.

Среди наиболее известных многозвенных *LC*-фильтров можно назвать [12, 13] следующие.

1. **Фильтры Баттерворта.** Их АЧХ $K_U(\omega)$ обладает высокой степенью равномерности в полосе прозрачности. Однако вне ее $K_U(\omega)$ имеет пологий характер (рис. 7.9, *a*).

2. **Фильтры Чебышева.** Для них $K_U(\omega)$ в области прозрачности имеет колебательный характер. Параметры схемы выбирают такими, чтобы величина этих колебаний не превышала заданное значение. Здесь крутизна спа-

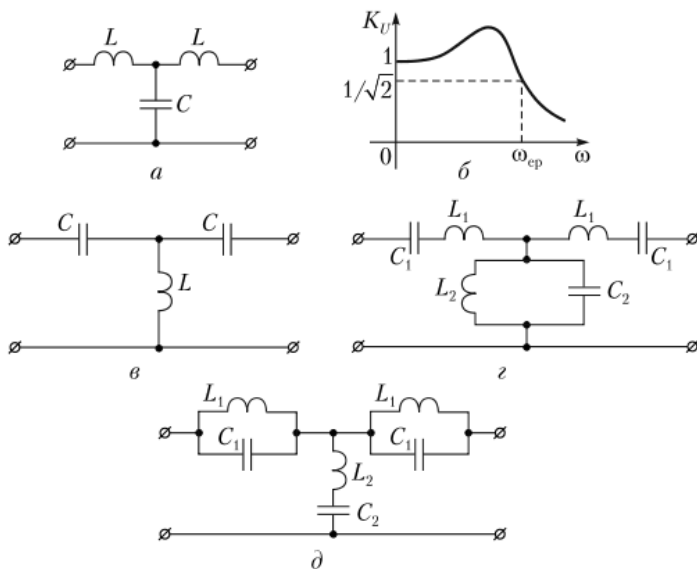


Рис. 7.8. Пассивные LC-фильтры:
a – ФНЧ и его АЧХ (*б*); *в* – ФВЧ; *z* – ПФ; *д* – ЗФ

да $K_U(\omega)$ на границе областей прозрачности и задерживания выше, чем у фильтров Баттерворта (рис. 7.9, *б*).

3. Фильтры Кауэра. Качественный вид АЧХ НЧ – фильтра Кауэра показан на рис. 7.9, *в*. У таких фильтров колебания $K_U(\omega)$ наблюдаются как в области прозрачности, так и в полосе задерживания. Их величина не должна выходить за допустимые пределы. К достоинствам фильтров Кауэра относится еще бóльшая крутизна спада АЧХ на границе полосы прозрачности по сравнению с фильтрами Чебышева.

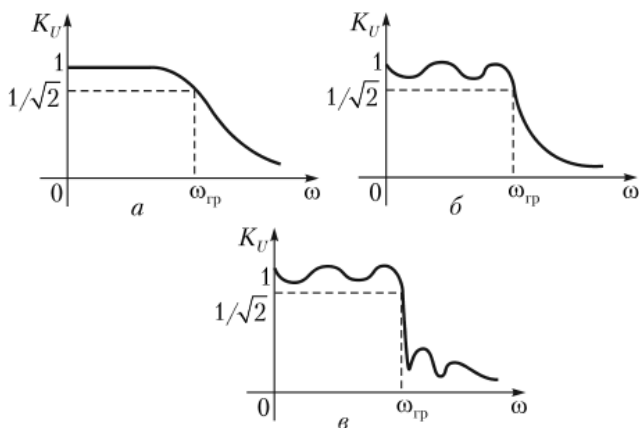


Рис. 7.9. АЧХ фильтров нижних частот:
a – Баттерворта; *б* – Чебышева; *в* – Кауэра

7.7.2. Пассивные RC-фильтры

Как известно, катушка индуктивности – элемент, трудоемкий для изготовления, к тому же громоздкий. Большие величины L получают, используя катушки на ферромагнитных сердечниках. По этой причине все боль-

шее распространение в инженерной практике получают фильтры без индуктивностей, так называемые RC -фильтры.

Благодаря наличию емкостных элементов, сопротивление которых ($1/(\omega C)$) обратно пропорционально частоте, RC -четырёхполюсники также обладают частотной избирательностью, правда, несколько менее выраженной, чем в случае применения LC -цепей.

Простейшие низкочастотные и высокочастотные RC -звенья уже рассматривались в примере 7.2, где были рассчитаны и построены графики их АЧХ (см. рис. 7.4 и 7.5).

Схемы RC -четырёхполюсников и их АЧХ, изображенные на рис. 7.10, *а*, *б*, обладают свойствами полосно-заграждающего и полосно-пропускающего фильтров.

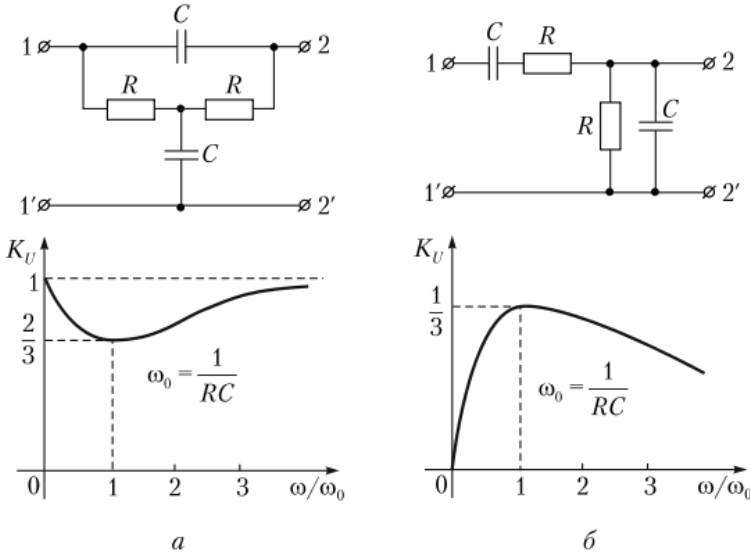


Рис. 7.10. RC -фильтры и их АЧХ:

а – полосно-заграждающий фильтр; *б* – полосно-пропускающий фильтр

Недостатком пассивных фильтров всех видов (LC и RC) является вносимое ими существенное ослабление сигнала. Отмеченный недостаток фактически устраняется, если частотно-избирательный четырехполюсник включается в цепь обратной связи операционного усилителя. Этот принцип положен в основу построения активных фильтров на операционных усилителях. Они рассмотрены во втором разделе учебника.

Контрольные вопросы и задания

1. Какую структуру принято называть линейным пассивным четырехполюсником?
2. Какие величины связывают основные уравнения линейного пассивного четырехполюсника в синусоидальном режиме? Сколько различных форм записи основных уравнений можно составить для линейного четырехполюсника?
3. Пользуясь обозначениями рис. 7.1, *б* запишите уравнения в формах $[A]$; $[Y]$; $[Z]$. От каких величин зависят четыре комплексных коэффициента этих уравнений? Каковы их размерности?
4. Сколько независимых комплексов содержит группа из четырех коэффициентов основных уравнений четырехполюсника?

5. Запишите уравнение связи для коэффициентов уравнений четырехполосника в $[A]$ -форме — A, B, C, D .

6. Параметры элементов четырехполосника (рис. 7.11) заданы следующими: $L = 0,1$ мГн; $C = 10$ мкФ; $R = 100$ Ом. Определите коэффициенты A, B, C, D на частотах: 1) $\omega = 1000$ рад/с; 2) $\omega = 500$ рад/с; 3) $\omega = 2000$ рад/с.

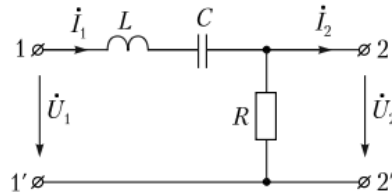


Рис. 7.11. К заданиям 6, 14

7. Дайте определение симметричному четырехполоснику.

8. Сколькими комплексными коэффициентами определяется симметричный четырехполосник?

9. Пользуясь методикой параграфа 7.2, найдите коэффициенты $[A]$ -формы для четырехполосника на рис. 7.12, а. Примите $R = 1/(\omega C) = 100$ Ом.

10. Вычислите коэффициенты Z_{11} и Z_{21} для четырехполосника на рис. 7.12, а, если $R = 20$ Ом; $C = 50$ мкФ; $\omega = 1000$ рад/с.

11. Для четырехполосника на рис. 7.12, б рассчитайте коэффициенты $[Y]$ -формы при $R = 100$ Ом.

12. Рассчитайте следующие комплексные входные сопротивления четырехполосника на рис. 7.12, а, б:

а) Z_{1X} — входное сопротивление со стороны зажимов 1—1' при холостом ходе зажимов 2—2';

б) Z_{1K} — входное сопротивление со стороны зажимов 1—1' при коротком замыкании 2—2'. Примите $R = 1/(\omega C) = 100$ Ом.

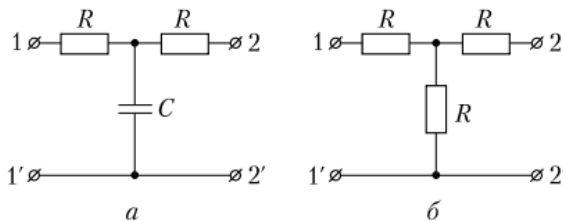


Рис. 7.12. К заданиям 9—12, 16

13. Дайте определение комплексному коэффициенту передачи $K(j\omega)$ линейного пассивного четырехполосника, а также АЧХ и ФЧХ.

14. Получите аналитическое выражение АЧХ четырехполосника, изображенного на рис. 7.11. Постройте ее график при $L = 1$ мГн; $C = 100$ мкФ; $R = 20$ Ом.

15. Что понимается под характеристическим сопротивлением симметричного четырехполосника Z_C ? Каким образом комплекс Z_C связан с входными сопротивлениями четырехполосника Z_{1X} и Z_{1K} ?

16. Найдите характеристическое сопротивление Z_C для четырехполосника на рис. 7.12, б при $R = 20\sqrt{3}$ Ом.

17. Дайте определение постоянной передачи $g = a + jb$. Как называются вещественная (a) и мнимая (b) части комплекса g ? Каков физический смысл частотных зависимостей $a(\omega)$ и $b(\omega)$?

18. В каких случаях четырехполосник является фильтром? Что понимается под полосой прозрачности и полосой затухания?

19. Что означают аббревиатуры ФНЧ; ФВЧ; ПФ; ЗФ?

20. Нарисуйте график АЧХ идеального полосового фильтра.
21. На каких физических явлениях базируется принцип работы большинства электрических фильтров?
22. Каков основной признак принадлежности четырехполюсника к классу пассивных LC -фильтров или RC -фильтров?
23. Определите величины комплексных коэффициентов передачи LC -фильтров, приведенных на рис. 7.8, $a, в$, при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$.
24. В чем главное достоинство RC -фильтров перед LC -фильтрами?
25. Нарисуйте схемы простейших: а) низкочастотного и б) высокочастотного RC -звеньев.
26. Каковы особенности АЧХ фильтров низких частот Баттерворта, Чебышева и Кауэра?
27. Каков главный недостаток пассивных LC - и RC -фильтров?

Глава 8

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- условия и причины возникновения переходных процессов;
- законы коммутации;
- понятия независимых и зависимых начальных условий;
- класс задач, решаемых классическим методом;
- порядок расчета переходных процессов классическим методом;

уметь

- рассчитывать начальные значения токов и напряжений в конкретном случае;
- записывать дифференциальные уравнения цепи в переходном режиме и их общее решение по виду корней характеристического уравнения;
- проводить оценку длительности переходного процесса для цепей первого и второго порядка по виду корней характеристического уравнения;

владеть

- методикой получения характеристического уравнения цепи и его решения;
 - методикой построения графиков переходных токов и напряжений для цепей первого и второго порядков.
-

Процессы, рассмотренные в предыдущих главах, относятся к установившимся режимам. Для таких режимов токи и напряжения являются периодическими функциями времени. Любому установившемуся режиму предшествует переходный процесс, при котором токи и напряжения изменяются во времени по непериодическим законам.

Возникают переходные процессы в результате коммутации. Под **коммутацией** понимается изменение состояния некоторого ключа (замыкание или размыкание), либо скачкообразное изменение параметра элемента цепи. Хотя процесс коммутации занимает некоторый временной интервал, обычно считают, что коммутация происходит мгновенно. Чаще всего момент коммутации совмещают с началом отсчета времени $t = 0$.

Принимаем следующие обозначения:

- $t = 0$ — момент коммутации (начало переходного процесса);
- $t = 0_-$ — момент времени, непосредственно предшествующий коммутации (принадлежит докоммутационному режиму);
- $t = 0_+$ — момент времени, непосредственно следующий за моментом коммутации (принадлежит послекоммутационному режиму).

Таким образом, моментам $t = 0_-$ и $t = 0_+$ соответствуют различные состояния ключа, а следовательно, и различные схемы.

Теоретически процесс установления нового режима длится бесконечно большой интервал времени, однако в инженерной практике введены приближенные критерии оценки длительности переходного процесса. Его быстрота зависит от соотношения между накопительными свойствами цепи (индуктивными и емкостными) и ее резистивными свойствами.

В чисто резистивной цепи (гипотетический случай) в результате коммутации процесс устанавливается мгновенно. Таким образом, причиной возникновения переходных процессов в реальной цепи следует назвать непрерывное присутствие индуктивных и емкостных элементов.

8.1. Законы коммутации

Энергии, запасенные в магнитном поле катушки индуктивности и в электрическом поле конденсатора (емкостного элемента), равны соответственно

$$w_L = Li_L^2/2; \quad w_C = Cu_C^2/2, \quad (8.1)$$

где i_L — мгновенное значение тока в индуктивности; u_C — мгновенное значение напряжения на конденсаторе.

Из физики известно, что запасенные в магнитном и электрическом полях энергии мгновенно измениться не могут, так как нереализуем источник бесконечно большой мощности: $p = dw/dt \neq \infty$. Тогда из равенств (8.1) следует невозможность скачкообразного изменения тока в индуктивности и напряжения на конденсаторе:

- **первый закон коммутации:** *ток в индуктивном элементе не может измениться скачком;*

- **второй закон коммутации:** *напряжение на емкостном элементе не может измениться скачком.*

Для момента коммутации $t = 0$ в соответствии с законами коммутации справедливы соотношения

$$i_L(0_+) = i_L(0_-); \quad u_C(0_+) = u_C(0_-). \quad (8.2)$$

Наряду с традиционными законами коммутации (8.2), из уравнений (8.1) следует невозможность скачкообразного изменения потокосцепления катушки индуктивности $\Psi = Li_L$ и заряда конденсатора $q = Cu_C$:

$$\Psi(0_+) = \Psi(0_-); \quad q(0_+) = q(0_-). \quad (8.3)$$

Соотношения (8.3) также называют первым и вторым законами коммутации. По сравнению с (8.2) они имеют более общий характер, так как справедливы и при $L \neq \text{const}$ и $C \neq \text{const}$ (в нелинейных цепях). В линейных цепях, когда $L = \text{const}$, $C = \text{const}$, из соотношений (8.3) следуют уравнения (8.2).

8.2. Независимые и зависимые начальные условия

В задачах по расчету переходных процессов в электрических цепях под начальными условиями понимают величины токов в ветвях и напряжений на участках цепи в первое мгновение после коммутации $t = 0_+$. Реже в качестве начальных условий рассматривают значения потокосцеплений катушек индуктивности и зарядов на обкладках конденсаторов при $t = 0_+$.

Величины, не допускающие скачкообразное изменение в момент коммутации, т.е. $i_L(0_+)$ и $u_C(0_+)$, относят к *независимым* начальным условиям. Они определяются непосредственно из докоммутационного режима. Все остальные токи и напряжения, которые в момент коммутации могут измениться скачком, относятся к *зависимым* начальным условиям. Они определяются из условия удовлетворения законам коммутации и законам Кирхгофа.

8.3. Основные этапы классического метода расчета переходного процесса в линейной цепи

Решение задачи по расчету переходного процесса сводится к нахождению функций времени (обычно $i(t)$ или $u(t)$), удовлетворяющих системе уравнений Кирхгофа в переходном режиме. В общем случае для линейной цепи система уравнений Кирхгофа — это система линейных неоднородных интегро-дифференциальных уравнений.

Классический метод расчета заключается в непосредственном решении системы интегро-дифференциальных уравнений Кирхгофа, составленных для послекоммутационной цепи.

Согласно теории дифференциальных уравнений решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений можно представить в виде суммы двух составляющих:

- частное решение данной системы неоднородных уравнений;
- общее решение соответствующей системы однородных уравнений.

Обсудим каждую из названных составляющих с учетом особенностей решаемых в инженерной практике задач по расчету переходных процессов в линейных цепях.

1. В подавляющем большинстве задач рассматриваемого класса переходный процесс соединяет два различных установившихся режима. Поэтому в качестве частного решения (первая составляющая искомой функции времени) удобно брать токи и напряжения нового установившегося режима. Такое частное решение называется **принужденная составляющая** и обозначается $i_{пр}(t)$, $u_{пр}(t)$. Конкретная методика нахождения принужденной составляющей зависит от вида источников, действующих в послекоммутационной цепи.

Если после коммутации в цепи действуют *постоянные источники*, принужденный режим является *стационарным*. Принужденную составляющую находим методами расчета стационарных режимов.

При *синусоидальной форме* источников, действующих в послекоммутационной схеме, для определения принужденных токов и напряжений целесообразно воспользоваться символическим методом.

2. Второе слагаемое искомой функции времени является решением системы *однородных* интегро-дифференциальных уравнений. К такой системе уравнений можно прийти, приняв в послекоммутационной цепи интенсивности источников равными нулю. Поэтому данное слагаемое не зависит от вида источников. Его называют **свободная составляющая** и обозначают $i_{св}(t)$, $u_{св}(t)$. Оно определяется только структурой послекоммутационной цепи и величинами R , L , C .

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общий вид свободной составляющей определяется количеством и видом корней характе-

ристического уравнения, соответствующего системе дифференциальных уравнений цепи. Напомним, что общий вид функции означает присутствие в ее выражении неизвестных постоянных коэффициентов, определяемых из дополнительных условий.

Таким образом, для названного класса задач, когда переходный процесс лежит между двумя установившимися режимами, классический метод расчета переходных процессов включает в себя следующие этапы:

а) представление искомой функции времени, например $i(t)$, в виде суммы двух составляющих, принужденной и свободной, т.е. $i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t)$;

б) нахождение принужденной составляющей с использованием методики расчета установившихся режимов;

в) определение общего вида свободной составляющей по корням характеристического уравнения; если исключить особые случаи, токи всех ветвей и напряжения на всех участках цепи в переходном состоянии определяются единым характеристическим уравнением;

г) расчет неизвестных постоянных из условия удовлетворения законам коммутации и законам Кирхгофа. Для выполнения этого этапа обязательно рассмотрение (или расчет) докоммутационного режима, из которого необходимо знать токи в индуктивных элементах и напряжения на емкостных элементах в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации: $i_L(0_-)$ и $u_C(0_-)$. Они называются начальными условиями.

Применение изложенной методики показано на примерах 8.1–8.3¹.

Пример 8.1. Определить зависимости от времени тока в индуктивности $i(t)$ и напряжения на индуктивности $u_L(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8.1, после замыкания ключа в момент времени $t = 0$. Заданы следующие параметры цепи: $I_K = \text{const} = 2 \text{ А}$, $E = \text{const} = 200 \text{ В}$, $R = 50 \text{ Ом}$, $L = 0,01 \text{ Гн}$.

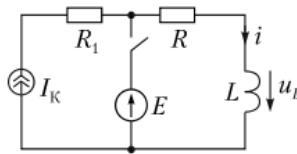


Рис. 8.1. Схема к примеру 8.1

Решение

1. До коммутации (ключ разомкнут) в заданной цепи был стационарный режим. В индуктивности протекал постоянный ток, вызываемый источником тока. Поэтому $i_L(0_-) = I_K = 2 \text{ А}$.

2. Новый установившийся режим (ключ замкнут), называемый принужденным, также является стационарным. Следовательно, индуктивность эквивалентна короткозамкнутой перемычке. Поэтому

$$i_{\text{пр}} = E/R = 4 \text{ А}; \quad u_{L\text{пр}} = 0.$$

3. После замыкания ключа на интервале $0_+ \leq t < \infty$ справедливо уравнение по второму закону Кирхгофа

$$E = Ri + Ldi/dt. \quad (8.4)$$

Таким образом, состояние заданной цепи в переходном режиме определяется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.

¹ Внимание: на схемах всех задач по расчету переходных процессов изображено докоммутационное состояние ключа.

Его решение $i(t)$ рассматриваем в виде суммы принужденной и свободной составляющих: $i(t) = i_{np} + i_{cb}(t)$, где первое слагаемое нами найдено при расчете нового установившегося режима.

Второе слагаемое является решением однородного уравнения, полученного из уравнения (8.4), если принять интенсивность источника ЭДС E равной нулю, т.е.

$$0 = Ri_{cb}(t) + Ldi_{cb}(t)/dt. \quad (8.5)$$

Общий вид функции $i_{cb}(t)$ определяется корнями характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (8.5). Для получения характеристического уравнения проводим алгебраизацию дифференциального уравнения (8.5):

$$0 = Rp^0 + Lp^1 = R + Lp.$$

Поскольку характеристическое уравнение имеет первую степень, а следовательно, один корень

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{50}{0,01} = -5000 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

искомая функция $i_{cb}(t)$ может быть представлена экспонентой вида

$$i_{cb}(t) = A_1 e^{pt},$$

где A_1 — неизвестная постоянная. Обращаем внимание на размерность корня характеристического уравнения — она обратна времени: $[p] = 1/\text{с}$. Это относится к корням характеристических уравнений для всех задач рассматриваемого класса.

4. Целью следующего расчетного этапа является определение неизвестной постоянной A_1 . Для этого выполняем следующие шаги:

а) записываем полное решение через неизвестную постоянную (т.е. в общем виде):

$$i(t) = i_{np} + i_{cb}(t) = 4 + A_1 e^{pt};$$

б) рассматриваем записанное полное решение в первый момент времени после коммутации $t = 0_+$:

$$i(0_+) = 4 + A_1;$$

в) определяем начальное значение искомой функции времени из физических соображений, привлекая законы Кирхгофа и законы коммутации. В данной задаче искомый ток протекает через индуктивность, следовательно, удовлетворяет первому закону коммутации:

$$i(0_+) = i(0_-) = 2 \text{ А.}$$

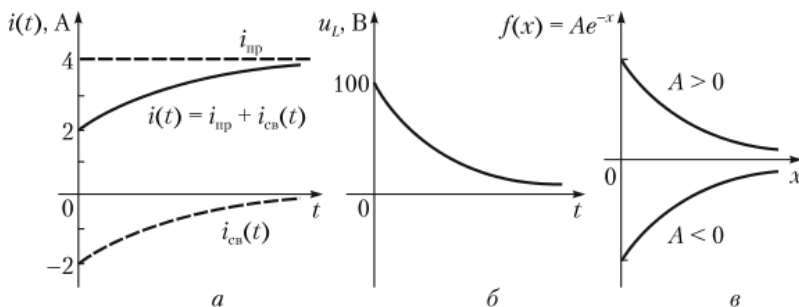


Рис. 8.2. К решению примера 8.1:

a — график зависимости тока $i(t)$ после замыкания ключа в цепи, изображенной на рис. 8.1; b — график зависимости $u_L(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8.1, после коммутации; v — графики функции $f(x) = Ae^{-x}$ при $A > 0$ и $A < 0$

Тогда из уравнения для неизвестной постоянной $i(0_+) = 4 + A_1 = 2$ получаем $A_1 = -2$. Следовательно, $i(t) = 4 - 2e^{-5000t}$ (А).

Зависимость $u_L(t)$ найдем, пользуясь соотношением $u_L = L di/dt$:

$$u_L = 0,01 \cdot (-2) \cdot (-5000)e^{-5000t} = 100 \exp(-5000t) \text{ (В)}.$$

На рис. 8.2, а, б построены графики найденных зависимостей $i(t)$ и $u_L(t)$. Графики функции $f(x) = Ae^{-x}$ при $A > 0$ и $A < 0$ на рис. 8.2, в даны для напоминания.

Пример 8.2. К цепи RL (рис. 8.3) в момент $t = 0$ подключается источник синусоидальной ЭДС $e(t) = 400\sqrt{2} \sin(1000t + 15^\circ)$ (В). Заданы $R = 100$ Ом; $L = 0,01$ Гн.

Определить функцию тока $i(t)$ после замыкания ключа.

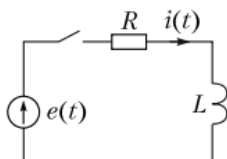


Рис. 8.3. Схема к примеру 8.2

Решение

1. По условию до коммутации в индуктивности ток не протекал, т.е. $i(0_-) = 0$.

2. В новом установившемся режиме (принужденном) имеем неразветвленный RL -контур с синусоидальным источником ЭДС. В такой цепи устанавливается синусоидальный ток. Его расчет удобно провести символическим методом:

а) комплексная амплитуда ЭДС равна $\dot{E}_m = 400\sqrt{2} e^{j15^\circ}$ В;

б) комплексные сопротивления пассивных элементов равны $Z_R = R = 100$ Ом; $Z_L = j\omega L = j1000 \cdot 0,1 = j100$ Ом;

в) комплексная амплитуда принужденного тока равна

$$\dot{i}_{mnp} = \frac{\dot{E}_m}{Z_R + Z_L} = \frac{400\sqrt{2} e^{j15^\circ}}{100 + j100} = \frac{400\sqrt{2} e^{j15^\circ}}{100\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 4e^{-j30^\circ} \text{ А};$$

г) соответствующая синусоидальная функция времени равна $i_{np}(t) = 4 \sin(1000t - 30^\circ)$ (А).

В отличие от предыдущего случая, в данном примере принужденная составляющая является функцией времени.

3. В переходном состоянии на интервале времени $0_+ \leq t < \infty$ справедливо уравнение

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}.$$

Свободная составляющая искомой функции $i_{cb}(t)$ определяется однородным уравнением

$$0 = Ri_{cb}(t) + L \frac{di_{cb}(t)}{dt}.$$

Корень его характеристического уравнения $0 = R + Lp$ равен

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{100}{0,1} = -1000 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Следовательно, функция $i_{cb}(t)$ имеет вид $i_{cb}(t) = A_1 e^{pt}$.

4. Расчет постоянной A_1 ведем по той же методике, что и в предыдущем примере:

а) полное решение имеет вид

$$i(t) = i_{np}(t) + i_{cb}(t) = 4 \sin(1000t - 30^\circ) + A_1 e^{pt};$$

б) при $t = 0_+$ из последнего уравнения получаем

$$i(0_+) = 4\sin(-30^\circ) + A_1;$$

в) искомая функция времени $i(t)$ является индуктивным током и подчиняется первому закону коммутации, т.е. $i(0_+) = i(0_-) = 0$;

г) последнее условие дает уравнение для постоянной: $i(0_+) = 4\sin(-30^\circ) + A_1 = i(0_-) = 0$, из которого находим

$$A_1 = -4\sin(-30^\circ) = 2.$$

Таким образом получаем

$$i(t) = 4\sin(1000t - 30^\circ) + 2e^{pt} \text{ (A)}.$$

На рис. 8.4 построены графики зависимости от времени найденной функции $i(t)$, а также ее составляющих, принужденной и свободной.

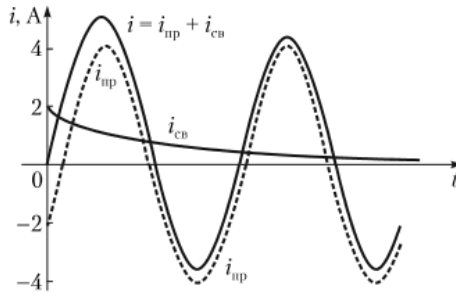


Рис. 8.4. К решению примера 8.2:

графики зависимостей тока $i(t)$, а также его принужденной и свободной составляющих в цепи, изображенной на рис. 8.3

Пример 8.3. В цепи, изображенной на рис. 8.5, при $t = 0$ происходит размыкание ключа, шунтирующего¹ источник тока. Определить временные зависимости $i_R(t)$ и $i_C(t)$ данного переходного процесса. Параметры цепи следующие: $I_K = \text{const} = 1 \text{ A}$; $E = \text{const} = 100 \text{ В}$; $R = 100 \text{ Ом}$; $C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$. Режим до коммутации считать установившимся.

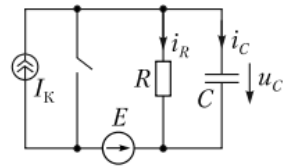


Рис. 8.5. Схема к примеру 8.3

Решение

1. До размыкания ключа элементы R , C , E были включены параллельно, поэтому при выбранном на рис. 8.5 положительном направлении для напряжения на конденсаторе

$$u_C(0_-) = -E = -100 \text{ В}.$$

2. При разомкнутом ключе по окончании переходного процесса ввиду постоянства действующих в цепи источников установится стационарный режим: $i_{Cнп} = 0$, $i_{Rнп} = I_K = 1 \text{ А}$.

3. В переходном режиме состояние цепи, изображенной на рис. 8.5, описывается системой двух уравнений, соответствующих первому и второму законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_R + i_C = I_K, \\ i_R R - u_C = 0. \end{cases}$$

¹ Термин «шунтировать» в инженерной практике применяется для обозначения процесса параллельного подключения добавочного элемента к некоторому участку цепи. Параллельно подключенная короткозамкнутая перемычка называется шунтом.

Их совместное решение с учетом соотношения $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ приводит к уравнению

$$\frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt} = I_K.$$

Это линейное, неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно напряжения на конденсаторе. Решим его. Принужденная составляющая напряжения на конденсаторе равна $u_{C\text{пр}} = i_{R\text{пр}} R = 1 \cdot 100 = 100$ В. Его свободную составляющую записываем, решая соответствующее характеристическое уравнение:

$$\frac{1}{R} + Cp = 0; \quad p = -\frac{1}{RC} = -\frac{10^6}{100 \cdot 5} = -2000 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Следовательно, искомая функция имеет вид

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = 100 + Ae^{pt}.$$

С учетом второго закона коммутации для $t = 0_+$ имеем уравнение

$$u_C(0_+) = 100 + A = u_C(0_-) = -100,$$

из которого находим $A = -200$.

Итак, напряжение на конденсаторе в переходном процессе определяется выражением

$$u_C(t) = 100 - 200e^{-2000t} \text{ (В)}.$$

По известной зависимости $u_C(t)$ ток в резисторе $i_R(t)$ находим при помощи закона Ома:

$$i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R} = 1 - 2e^{-2000t} \text{ (А)},$$

тогда

$$i_C(t) = I_K - i_R(t) = 2e^{-2000t}.$$

Графики функций $i_R(t)$ и $i_C(t)$ приведены на рис. 8.6.

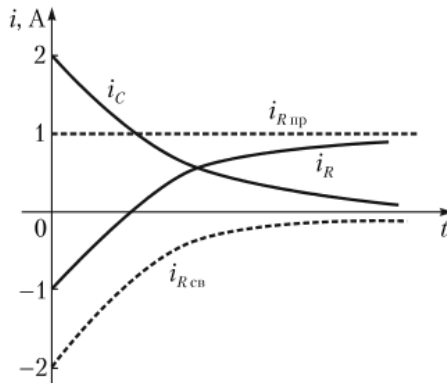


Рис. 8.6. К решению примера 8.3: графики функций $i_C(t)$ и $i_R(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8.5, после размыкания ключа

8.4. Особенности переходного процесса в цепях первого порядка

8.4.1. Вид свободной составляющей

К цепям первого порядка относятся те цепи, которые в переходном режиме описываются дифференциальным уравнением первого порядка. Этому случаю удовлетворяют цепи, содержащие наряду с резистивными элементами один накопитель энергии (либо индуктивность, либо емкость).

Дифференциальному уравнению первого порядка соответствует характеристическое уравнение первой степени, имеющее один корень. При этом свободная составляющая переходного тока или напряжения имеет вид $f_{\text{св}}(t) = Ae^{pt}$, где p — корень характеристического уравнения, представляющий собой вещественную *отрицательную* величину. Отрицательный знак p свидетельствует о *затухающем характере свободной составляющей* в линейных цепях.

Поэтому функцию $f_{\text{св}}(t)$ математически можно записать в более определенном виде $f_{\text{св}}(t) = Ae^{-|p|t}$, здесь $|p|$ — абсолютная величина, или модуль, корня характеристического уравнения цепи.

8.4.2. Понятие постоянной времени

Быстрота затухания экспоненты $e^{-|p|t}$ зависит от абсолютной величины p . Очевидно, при увеличении $|p|$ крутизна экспоненты растет, функция $Ae^{-|p|t}$ убывает быстрее. На рис. 8.7 для наглядного сравнения приведены две экспоненты $Ae^{-|p_1|t}$ и $Ae^{-|p_2|t}$ при $|p_2| > |p_1|$.

При малых величинах p функция $Ae^{-|p|t}$ убывает медленно. В предельном случае, когда $|p| \rightarrow 0$ имеем $f(t) = A = \text{const}$. Его можно трактовать как незатухающую экспоненту. Таким образом, быстрота переходного процесса в цепи первого порядка полностью определяется величиной корня ее характеристического уравнения. Однако для оценки скорости протекания переходного процесса используют величину, обратную $|p|$, которую обозначают τ . Величина τ имеет размерность времени, называется **постоянная времени** и обладает четким физическим смыслом: $\tau = 1/|p|$ — интервал времени, в течение которого свободная составляющая затухает в e раз ($e = 2,72\dots$ — основание натурального логарифма).

По графику экспоненты $f_{\text{св}}(t) = Ae^{-|p|t} = Ae^{-t/\tau}$ постоянная времени может быть определена как ее подкасательная (см. рис. 8.7).

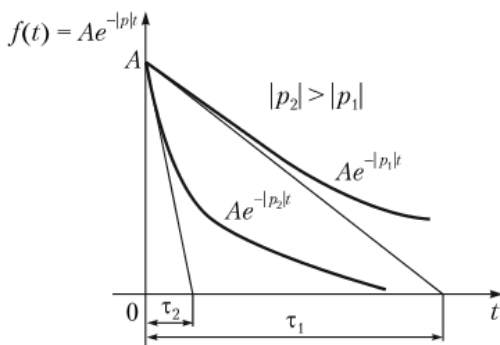


Рис. 8.7. К понятию «постоянная времени» —
Определение величины по графику экспоненты

8.4.3. Приближенная оценка длительности переходного процесса в цепи первого порядка

За время 3τ свободная составляющая убывает в e^3 раз и составляет примерно 5% от ее первоначального значения. Поэтому в инженерной практике за время переходного процесса принимают интервал времени, равный $(3 \div 5)\tau$.

Оценим длительность переходного процесса для цепи, рассмотренной в примере 8.1 (см. рис. 8.1). Корню характеристического уравнения цепи

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{50}{0,01} = -5000 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

соответствует постоянная времени $\tau = 1/|p| = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 0,2 \text{ мс}$. Следовательно, переходный процесс в цепи, изображенной на рис. 8.1, практически длится $0,6 \div 1 \text{ мс}$.

8.5. Переходный процесс в неразветвленном RLC -контуре при подключении его к источнику постоянной ЭДС

Поскольку переходный процесс в RLC -контуре (рис. 8.8) для инженерной практики имеет особое значение, проведем его анализ в общем виде. Считаем R, L, C известными, источник постоянной ЭДС E задан. Конденсатор в момент коммутации не заряжен. Коммутация происходит в момент времени $t = 0$. Решаем задачу относительно тока в контуре $i(t)$.

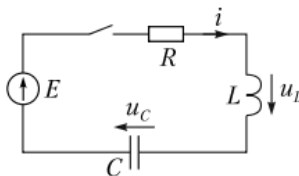


Рис. 8.8. К анализу переходного процесса в неразветвленном RLC -контуре при подключении его к источнику постоянной ЭДС

Рассматриваемый переходный процесс соединяет два установившихся режима:

- докоммутационный режим — по условию нулевой: $i(0_-) = 0$; $u_C(0_-) = 0$;
- в новом установившемся режиме (принужденном) ввиду наличия в контуре конденсатора $i_{\text{пр}} = 0$; $u_{C \text{ пр}} = E$.

8.5.1. Особенности характеристического уравнения цепи и его корней. Виды свободной составляющей

Для цепи, изображенной на рис. 8.8, в переходном режиме справедливо уравнение

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

После его дифференцирования по времени приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R di}{L dt} + \frac{i}{LC} = 0.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение второй степени

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0, \quad (8.6)$$

корни которого определяются выражением

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (8.7)$$

Согласно выражению (8.7) в зависимости от параметров цепи R, L, C возможны три вида корней характеристического уравнения (8.6). Каждому виду соответствует свое математическое выражение свободной составляющей.

1-й случай: $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, или $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Тогда $p_{1,2}$ — величины вещественные, различные, отрицательные. Соответствующая свободная составляющая может быть представлена как сумма двух экспонент

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (8.8)$$

где A_1 и A_2 — постоянные, подлежащие определению. Такой режим называется **апериодическим**.

2-й случай: $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, или $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Тогда $p_{1,2}$ — величины вещественные, равные (кратные), отрицательные: $p_1 = p_2 = p = -R/(2L)$.

При двух кратных корнях общий вид функции $i_{\text{св}}(t)$ можно представить произведением линейной функции и экспоненты

$$i_{\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt},$$

где A_1 и A_2 — неизвестные постоянные. Этот режим называется **критическим**.

3-й случай: $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, или $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Поскольку для рассматриваемого соотношения параметров подкоренное выражение в формуле (8.7) отрицательно, имеем два комплексно сопряженных корня

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{-1 \cdot \left(\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \right)} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}, \quad (8.9)$$

где приняты обозначения

$$\frac{R}{2L} = \delta; \quad \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 = \omega_{\text{св}}^2.$$

Заметим, что $\omega_{\text{св}}^2$ — заведомо положительная величина.

Двум комплексно сопряженным корням (8.9) соответствует функция $i_{\text{св}}(t)$ вида $i_{\text{св}}(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \varphi)$ — произведение экспоненты и синусоиды; A и φ — неизвестные постоянные. Режим называется **колебательным**.

8.5.2. Апериодический режим

Когда резистивное сопротивление цепи, изображенной на рис. 8.8, достаточно велико, чтобы удовлетворялось неравенство $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, переходный ток в контуре с учетом формулы (8.9) равен

$$i(t) = i_{\text{нп}} + i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Целью дальнейшего расчета является определение двух неизвестных постоянных A_1 и A_2 . Уравнения для них получаем по методике, несколько отличной от применяемой в цепях первого порядка.

1. Наряду с общим видом искомой функции записываем и общий вид ее первой производной по времени:

$$\begin{cases} i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \\ \frac{di(t)}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \end{cases}$$

2. Обе функции времени рассматриваем для первого мгновения после коммутации $t = 0_+$:

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2, \\ \frac{di}{dt}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases}$$

3. Пользуясь уравнениями Кирхгофа для послекоммутационной цепи и законами коммутации, определяем величины $i(0_+)$ и $\frac{di}{dt}(0_+)$, что дает два уравнения для постоянных A_1 и A_2 .

Применительно к цепи, изображенной на рис. 8.8, $i(0_+) = i(0_-)$, так как искомый ток протекает в индуктивности и подчиняется первому закону коммутации. Для определения $\frac{di}{dt}(0_+)$ записываем уравнение по второму закону Кирхгофа для момента $t = 0_+$:

$$E = R \cdot i(0_+) + L \frac{di}{dt}(0_+) + u_c(0_+),$$

из которого при нулевых начальных условиях, т.е. при $i(0_+) = i(0_-) = 0$ и $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0$, получаем

$$\frac{di}{dt}(0_+) = \frac{E}{L}.$$

Тогда для постоянных A_1 и A_2 имеем уравнения

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 = 0, \\ \frac{di}{dt}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{L}. \end{cases}$$

Их совместное решение дает следующий результат:

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}.$$

Для определенности примем, что в выражении (8.7) (для корней характеристического уравнения) знак «+» принадлежит корню p_1 , а знак «-» — корню p_2 . Тогда абсолютные величины p_1 и p_2 удовлетворяют неравенству $|p_1| < |p_2|$, а разность $p_1 - p_2$ положительна. Следовательно $A_1 > 0$, $A_2 < 0$.

При этом положительная экспонента $A_1 e^{p_1 t}$ затухает медленнее отрицательной экспоненты $A_2 e^{p_2 t}$. Это отражено на графике (рис. 8.9), где представлены каждая из экспонент, а также их сумма $i(t)$. Таким образом, в аperiодическом режиме искомая функция времени $i(t)$ имеет форму всплеска, начинается от нуля и стремится к нулю.

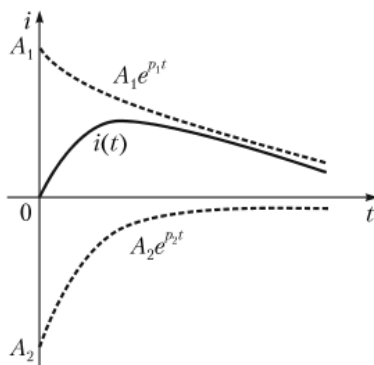


Рис. 8.9. График тока $i(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8.8, при $R > 2\sqrt{L/C}$ (апериодический режим)

8.5.3. Критический режим

Напомним, что в цепи, изображенной на рис. 8.8, переходный процесс критического вида наблюдается при соотношении параметров $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, характеристическое уравнение при этом имеет два равных корня $p_1 = p_2 = p = -R/(2L)$.

Ток в контуре $i(t)$ и его первая производная di/dt определяются выражениями

$$\begin{cases} i(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt}, \\ \frac{di(t)}{dt} = A_2 e^{pt} + (A_1 + A_2 t)pe^{pt}. \end{cases} \quad (8.10)$$

Их начальные значения, как и в предыдущем случае, равны

$$i(0_+) = i(0_-) = 0; \quad \frac{di}{dt}(0_+) = \frac{E}{L}.$$

Тогда из уравнений (8.10) при $t = 0_+$ для постоянных A_1 и A_2 получаем $A_1 = 0$ и $A_2 = E/L$. Искомая функция тока $i(t)$ имеет вид

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (8.11)$$

— это произведение линейной функции, задающей прямую, проходящую через начало координат, и экспоненты. График зависимости (8.11), построенный на рис. 8.10, сходен по виду с кривой $i(t)$ в апериодическом режиме (см. рис. 8.9).

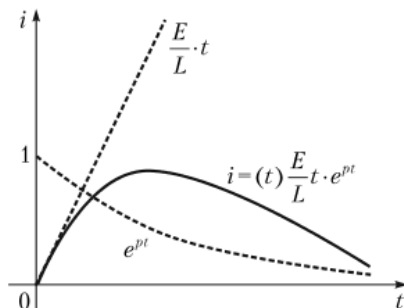


Рис. 8.10. График зависимости тока $i(t)$, возникающего в цепи, изображенной на рис. 8.8, в критическом режиме ($R = 2\sqrt{L/C}$)

8.5.4. Колебательный режим

Если в цепи, изображенной на рис. 8.8, резистивное сопротивление настолько мало, что выполняется неравенство $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, характеристическое уравнение (8.6) имеет два комплексно-сопряженных корня $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{cb}}$, где вещественная и мнимая части корней связаны с параметрами цепи выражениями (см. подпараграф 8.5.1)

$$\delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_{\text{cb}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Переходный ток контура является функцией вида

$$i(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{cb}} t + \varphi);$$

постоянные A и φ должны удовлетворять начальным условиям задачи.

При этом условии $i(0_+) = i(0_-) = 0$ равносильно равенству $A \sin \varphi = 0$, из которого следует, что $\varphi = 0$ (равенство $A = 0$ означало бы отсутствие переходного процесса, это противоречит физическому смыслу). Тогда искомую функцию $i(t)$ можно записать в более простом виде

$$i(t) = Ae^{-\delta t} \sin \omega_{\text{cb}} t.$$

Постоянную A находим из условия $\frac{di}{dt}(0_+) = \frac{E}{L}$:

$$\frac{di}{dt} = -\delta Ae^{-\delta t} \sin \omega_{\text{cb}} t + Ae^{-\delta t} \omega_{\text{cb}} \cos \omega_{\text{cb}} t \Big|_{t=0_+} = A\omega_{\text{cb}} = \frac{E}{L};$$

$$A = \frac{E}{L\omega_{\text{cb}}} = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{R}{2}\right)^2}}.$$

График функции $Ae^{-\delta t} \sin \omega_{\text{cb}} t$, представленный на рис. 8.11, является произведением синусоиды $\sin \omega_{\text{cb}} t$ и экспоненты $Ae^{-\delta t}$.

Другими словами, это синусоида, амплитуда которой затухает по экспоненциальному закону.

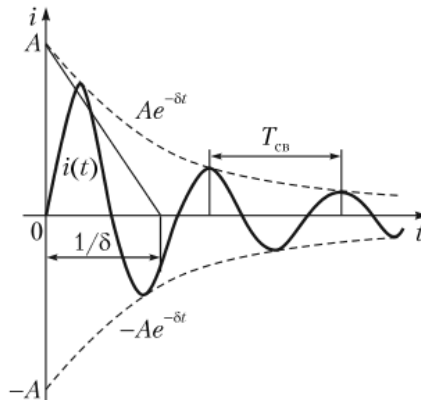


Рис. 8.11. График тока $i(t)$ для цепи, изображенной на рис. 8.8, в колебательном режиме ($R < 2\sqrt{L/C}$)

Величину $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ называют *частотой свободных колебаний*, а соответствующий ей период $T_{\text{св}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{св}}}$ — *периодом свободных колебаний* (отмечен на рис. 8.11).

Величина $\delta = R/(2L)$ определяет быстроту затухания огибающей процесса и называется *коэффициентом затухания*. С уменьшением резистивного сопротивления контура R процесс затухает медленнее, частота колебаний растет. В предельном случае при $R \rightarrow 0$, получаем незатухающий колебательный процесс с частотой $\omega_{\text{св}} = 1/\sqrt{LC}$, которую называют *собственной частотой контура*.

Параметры колебательного переходного процесса $T_{\text{св}}$ и δ могут быть определены экспериментально по осциллограмме $i(t)$, а именно:

- а) $T_{\text{св}}$ — интервал времени между двумя соседними максимумами кривой $i(t)$ (см. рис. 8.11);
- б) подкасательная к огибающей $i(t)$ (см. рис. 8.11) отсекает по оси времени отрезок $\tau = 1/\delta$, что позволяет вычислить коэффициент затухания δ .

8.6. Получение характеристического уравнения по комплексному входному сопротивлению цепи

Характеристическое уравнение цепи определяет вид свободной составляющей переходного процесса. Главный способ получения характеристического уравнения — по системе интегро-дифференциальных уравнений Кирхгофа цепи в послекоммутационном режиме.

Однако существует более короткий путь получения характеристического уравнения — без предварительной записи системы уравнений Кирхгофа. Он заключается в следующем:

- 1) предполагается, что в послекоммутационной цепи имеет место установившийся синусоидальный режим;
- 2) обрываем любую ее ветвь (за исключением ветви с источником тока) и рассматриваем схему относительно двух оборванных концов как активный двухполюсник;
- 3) принимаем интенсивности внутренних источников этого активного двухполюсника равными нулю (источники ЭДС закорачиваем, а источники тока обрываем). Приходим к пассивному двухполюснику;
- 4) записываем его комплексное входное сопротивление $Z(j\omega)$. При этом учитываем, что комплексные сопротивления элементов R, L, C равны $Z_R = R$; $Z_L = j\omega L$; $Z_C = 1/(j\omega C)$;
- 5) в выражении для $Z(j\omega)$ производим подстановку $j\omega \rightarrow p$. Полученное в результате такой подстановки выражение $Z(j\omega)|_{j\omega \rightarrow p} = Z(p)$ приравниваем к нулю. Можно показать, что все корни уравнения $Z(p) = 0$ являются корнями характеристического уравнения цепи.

Если не рассматривать особых (вырожденных) случаев, то уравнение $Z(p) = 0$ можно считать характеристическим. Например, для цепи, изображенной на рис. 8.8, после коммутации комплексное входное сопротивление равно

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Подстановка $j\omega \rightarrow p$ дает уравнение

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp} = 0, \text{ или } p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0,$$

которое совпадает с характеристическим уравнением (8.6).

Если послекоммутационная цепь является разветвленной, то в подавляющем большинстве задач рассматриваемая методика приводит к одному и тому же уравнению независимо от выбора ветви, подлежащей обрыву. Исключением является лишь ветвь с источником тока, поэтому подчеркнем еще раз: *с целью получения характеристического уравнения цепи нельзя записывать комплексное входное сопротивление относительно ветви с источником тока.*

Рассмотренный способ получения характеристического уравнения особенно удобен для разветвленных цепей. Его применение проиллюстрировано на примере 8.4.

Пример 8.4. Определить зависимости от времени тока в индуктивности $i_L(t)$ и напряжения на источнике тока $u_{a6}(t)$ после размыкания ключа в цепи, изображенной на рис. 8.12. Дано: $I_K = \text{const} = 4 \text{ А}$; $L = 10 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$; $C = 100 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$; $R = 20 \text{ Ом}$.

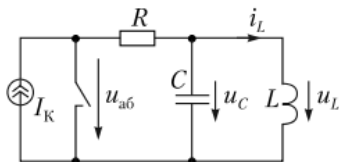


Рис. 8.12. Схема к примеру 8.4

Решение

В момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, по условию (ключ замкнут) $i_L(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = 0$.

Так как $I_K = \text{const}$, принужденный режим является стационарным: $i_{L\text{пр}} = I_K$.

Для получения характеристического уравнения записываем комплексное входное сопротивление цепи, изображенной на рис. 8.12, относительно индуктивной ветви при разомкнутом ключе (ветвь с источником тока обрывается): $Z(p) = Lp + 1/(Cp)$. Приравнявая $Z(p)$ нулю, приходим к характеристическому уравнению $p^2 + \frac{1}{LC} = 0$, его корни равны $p_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j\omega_{\text{св}} = \pm j1000 \text{ (с}^{-1}\text{)}$.

Итак, характеристическое уравнение цепи, изображенной на рис. 8.12, после размыкания ключа имеет два комплексно-сопряженных корня с нулевой вещественной частью $p_{1,2} = \pm j\omega_{\text{св}}$. Таким корням соответствует свободная составляющая вида

$$i_{L\text{св}}(t) = A \sin(\omega_{\text{св}} t + \varphi), \quad (8.12)$$

здесь A и φ — неизвестные постоянные.

С учетом выражения (8.12) полное решение для тока в индуктивности и его первая производная равны

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{L\text{пр}} + A \sin(\omega_{\text{св}} t + \varphi), \\ \frac{di_L(t)}{dt} = A \omega_{\text{св}} \cos(\omega_{\text{св}} t + \varphi). \end{cases} \quad (8.13)$$

Начальные значения записанных функций времени находим из условия удовлетворения первому и второму законам коммутации:

$$\begin{aligned} i_L(0_+) &= i_L(0_-) = 0; \\ \frac{di_L}{dt}(0_+) &= \frac{u_L(0_+)}{L} = \frac{u_C(0_+)}{L} = 0. \end{aligned}$$

Тогда из системы (8.13) при $t = 0_+$ следуют уравнения

$$\begin{cases} i_L(0_+) = I_K + A \sin \varphi = 0, \\ \frac{di_L}{dt}(0_+) = A \omega_{\text{св}} \cos \varphi = 0. \end{cases} \quad (8.14)$$

Согласно второму уравнению системы (8.14) $\cos \varphi = 0$, $\varphi = \pm 90^\circ$. Если выбрать $\varphi = +90^\circ$, то $\sin \varphi = 1$ и из первого уравнения системы (8.14) получаем $A = -I_K$. Таким образом, имеем

$$i_L(t) = I_K - I_K \sin(\omega_{\text{св}} t + 90^\circ) = 4 - 4 \cos 1000t \text{ (А)}.$$

График функции $i_L(t)$ представлен на рис. 8.13.

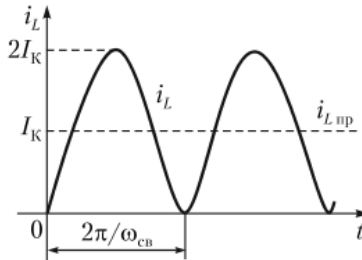


Рис. 8.13. График тока $i_L(t)$, возникающего после размыкания ключа в цепи, изображенной на рис. 8.12

Напряжение на источнике тока $u_{\text{аг}}(t)$ выражаем через напряжения на резисторе и индуктивности:

$$u_{\text{аг}}(t) = I_K R + L \frac{di_L}{dt} = 80 + 40 \sin 1000t \text{ (В)}.$$

Рассмотренный случай переходного процесса относится к идеализированным, так как его свободная составляющая не затухает. Если учесть неидеальность индуктивности или конденсатора (резистивные потери), получаем затухающий процесс. Однако это усложняет решение задачи.

8.7. Особенности переходных процессов в цепях второго порядка

8.7.1. Виды свободной составляющей

Цепи второго порядка описываются дифференциальными уравнениями второго порядка, они должны содержать не менее двух накопителей энергии (одного вида либо разнохарактерных).

Дифференциальному уравнению второго порядка соответствует квадратное характеристическое уравнение. Его корни в зависимости от структуры и параметров цепи могут быть как вещественными (отрицательными), так и комплексно-сопряженными (обязательно с отрицательной вещественной частью). Это объясняется затухающим характером процесса.

При вещественных различных корнях свободная составляющая (тока, напряжения, потокосцепления, заряда) определяется суммой двух экспонент: $f_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ (апериодический режим).

При комплексно-сопряженных корнях $p_{1,2} = -\delta \pm \omega_{\text{св}}$ наблюдается колебательный переходный процесс: $f_{\text{св}}(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \varphi)$.

Равные корни характеристического уравнения соответствуют строго определенному соотношению параметров цепи. Если оно выполняется, имеет

место режим, называемый критическим. Свободная составляющая в этом случае имеет вид $f_{\text{св}}(t) = (A_1 + A_2)e^{pt}$.

Любое отклонение параметров цепи относительно их критических значений выводит цепь из критического режима (либо в сторону апериодического режима, либо — колебательного).

8.7.2. Рекомендации по расчету постоянных интегрирования

Классический метод расчета переходных процессов в цепях второго порядка включает в себя расчет двух постоянных. Поэтому в отличие от цепей первого порядка наряду с искомой функцией времени $f(t)$ рассматривается и ее первая производная $df(t)/dt$.

Начальные значения этих функций времени $f(0_+)$ и $\frac{df}{dt}(0_+)$ определяются из физических законов: законов Кирхгофа и законов коммутации. Знание величин $f(0_+)$ и $\frac{df}{dt}(0_+)$ позволяет получить два уравнения для неизвестных постоянных. Представляются полезными следующие рекомендации.

1. Расчет первой производной индуктивного тока. Из соотношения $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, справедливого в любой момент времени, для $t = 0_+$ имеем

$$\frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L}$$

— первая производная индуктивного тока пропорциональна напряжению на индуктивности (разности потенциалов) в рассматриваемый момент времени.

При этом величина u_L чаще всего находится из условия удовлетворения второму закону Кирхгофа.

2. Расчет первой производной напряжения на конденсаторе. Из соотношения $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ получаем уравнение

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C},$$

т.е. первая производная напряжения на конденсаторе в любой момент времени пропорциональна току через конденсатор в этот же момент времени. Для $t = 0_+$ справедливо равенство

$$\frac{du_C(0_+)}{dt} = \frac{i_C(0_+)}{C}.$$

Величину $i_C(0_+)$ чаще всего находят из условия удовлетворения первому закону Кирхгофа.

8.7.3. Оценка длительности переходного процесса в цепях второго порядка

При апериодическом режиме длительность процесса оценивается по более медленной экспоненте, которая соответствует меньшему по абсолютной величине корню $|p|_{\min}$. Двадцатикратное и большее ослабление свободной составляющей (до 5% и меньше от ее первоначального значения) имеет место спустя интервал времени, равный $(3,5 \div 5)/|p|_{\min}$.

При колебательном характере процесса его длительность оценивают по величине коэффициента затухания δ . Амплитуда колебаний ослабляется не менее, чем в 20 раз, за время, равное $(3 \div 5)/\delta$.

8.8. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

Электрический сигнал, подлежащий линейному преобразованию в электрической цепи, является некоторой функцией времени $x(t)$, где под x понимается мгновенное значение тока или напряжения.

Одной из распространенных задач, решаемых электронной техникой, является построение четырехполюсника, позволяющего получить на его выходе электрический сигнал, пропорциональный производной или интегралу от сигнала, подаваемого на его вход, т.е.

$$x_{\text{вых1}}(t) = k_1 \frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt}; \quad x_{\text{вых2}}(t) = k_2 \int x_{\text{вх}}(t) dt,$$

где k_1 и k_2 — константы.

Простейшие дифференцирующая и интегрирующая цепи (звенья) содержат два элемента: резистор и накопитель энергии (емкость или индуктивность).

Обращаем внимание, что пассивные RC - и RL -звенья выполняют функции дифференцирования и интегрирования *лишь приближенно* на заданном отрезке времени, как это показано в подпараграфах 8.8.1 и 8.8.2 на примере RC -звеньев.

8.8.1. Дифференцирующее RC -звено

Покажем, что четырехполюсник, изображенный на рис. 8.14, *a*, может обладать дифференцирующими свойствами. На его зажимы 1—1' подается импульс напряжения $u_{\text{вх}}(t)$. Выходным сигналом является напряжение на резисторе $u_{\text{вых}}(t) = u_R(t)$. Зажимы 2—2' считаем разомкнутыми.

Состояние данной цепи определяется уравнением

$$u_{\text{вх}}(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) + u_C(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t). \quad (8.15)$$

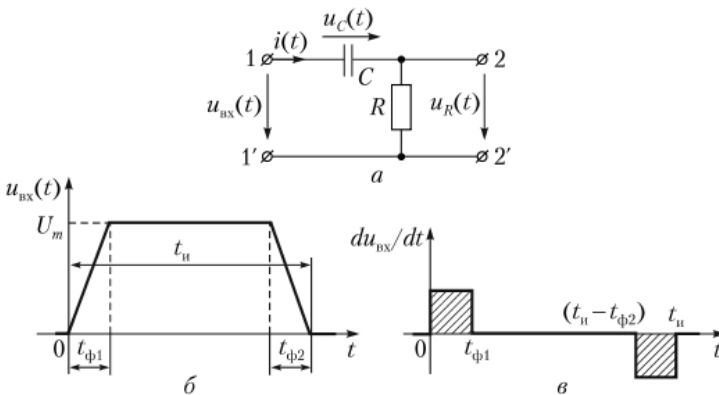


Рис. 8.14. Электрическая цепь, выполняющая функцию дифференцирования входного напряжения:

a — дифференцирующее звено; *б* — входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ в форме трапецидального импульса; *в* — график производной $du_{\text{вх}}/dt$

Если произведение RC , представляющее собой постоянную времени последовательной RC -цепи, настолько мало, что в уравнении (8.15) можно пренебречь слагаемым $RCdu_c(t)/dt$ по сравнению с $u_c(t)$, т.е.

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} \ll u_c(t),$$

то имеет место приближенное равенство $u_c(t) \approx u_{\text{вх}}(t)$. В этом случае изменение напряжения на конденсаторе почти успевает за изменением входного напряжения, а для напряжения на резисторе, равного выходному напряжению, получаем

$$u_R(t) = u_{\text{вых}}(t) = RC \frac{du_c(t)}{dt} \approx RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt}. \quad (8.16)$$

Таким образом, согласно формуле (8.16) выходное напряжение в цепи, изображенной на рис. 8.14, а, примерно равно произведению RC и производной от входного напряжения.

Соотношение (8.16) тем точнее, чем меньше величина RC . Следовательно, *стремление к более высокой точности дифференцирования путем уменьшения величины RC приводит к ослаблению выходного сигнала.*

На практике оптимальный выбор постоянной времени RC производится с учетом возможных параметров дифференцируемого сигнала. На рис. 8.14, б показан типичный случай входного сигнала $u_{\text{вх}}(t)$ в форме трапецеидального импульса с параметрами $t_{\text{и}}$ — длительность импульса; $t_{\text{ф1}}$ — длительность переднего фронта; $t_{\text{ф2}}$ — длительность заднего фронта; U_m — максимальное значение (высота на вершине).

На рис. 8.14, в приведен график соответствующей производной $du_{\text{вх}}(t)/dt$.

Для достаточно качественного дифференцирования такого импульса напряжения постоянная времени дифференцирующего звена RC должна быть в несколько раз меньше длительности его фронтов, например $RC \leq t_{\text{ф1}}/10$; $RC \leq t_{\text{ф2}}/10$.

Если ослабление выходного сигнала нежелательно, то в совокупности с дифференцирующим звеном включают усилитель.

8.8.2. Интегрирующее RC -звено

Четырехполюсник на рис. 8.15 при определенных условиях может выполнять функцию интегрирования входного напряжения, если выходным сигналом считать напряжение на конденсаторе. Покажем это.

Запишем для цепи, изображенной на рис. 8.15 (при разомкнутых зажимах 2–2'), уравнение по второму закону Кирхгофа в следующем виде:

$$u_{\text{вх}}(t) = u_R(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

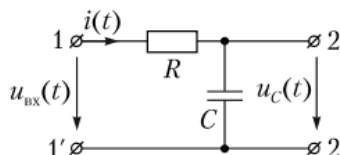


Рис. 8.15. Интегрирующее RC -звено

С учетом равенства $i(t) = u_R(t)/R$ получим выражение

$$u_{\text{вх}}(t) = u_R(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t u_R(t) dt. \quad (8.17)$$

Возьмем постоянную времени RC настолько большой, чтобы второе слагаемое в правой части формулы (8.17) было много меньше первого, т.е.

$$\frac{1}{RC} \int_0^t u_R(t) dt \ll u_R(t).$$

В этом случае напряжение на резисторе $u_R(t)$ согласно формуле (8.17) близко к входному напряжению: $u_R(t) \approx u_{\text{вх}}(t)$. Тогда для напряжения на конденсаторе справедливо приближенное соотношение

$$u_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt. \quad (8.18)$$

Итак, напряжение на конденсаторе в рассматриваемой цепи пропорционально интегралу от входного напряжения. Равенство (8.18) тем точнее, чем больше величина RC . Поскольку увеличение RC ведет к нежелательному ослаблению выходного сигнала, то на практике решается задача оптимального подбора постоянной времени RC . При этом учитывается примерная длительность интегрируемых импульсов $t_{\text{и}}$. Для получения необходимой точности интегрирования величина RC должна в несколько раз (пять, десять) превышать упомянутую длительность, например $RC \geq 5t_{\text{и}}$.

В заключение главы отметим, что классический метод расчета переходных процессов основан на классическом способе решения системы дифференциальных уравнений. К достоинствам метода относится возможность физической интерпретации отдельных слагаемых решения, что позволяет контролировать расчет. Наиболее трудоемким этапом классического метода является расчет постоянных интегрирования. Сложность данного этапа увеличивается с ростом порядка цепи и становится ощутимой для цепей третьего и более высокого порядка. В частности, для цепи третьего порядка приходится определять начальные значения самой искомой функции времени, а также ее первой и второй производных. В таких случаях начинают проявляться достоинства более формального метода расчета переходных процессов — операторного, который рассмотрен в следующей главе.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой физический процесс принято называть коммутацией?
2. Почему в результате коммутации в реальной цепи возникает переходный процесс?
3. Какой смысл в теории переходных процессов обычно вкладывается в обозначения $t = 0_-$ и $t = 0_+$?
4. Сформулируйте два закона коммутации и дайте их физическое обоснование.
5. Какой вид имеет система уравнений Кирхгофа относительно функций $i(t)$ и $u(t)$ в переходном режиме?
6. Запишите систему уравнений Кирхгофа для цепи, изображенной на рис. 8.16, в послекоммутационном режиме. Рассмотрите два случая: а) в момент $t = 0$ ключ замыкается; б) в момент $t = 0$ ключ размыкается.

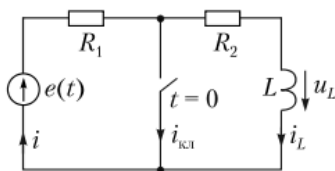


Рис. 8.16. К заданиям 6, 10, 11

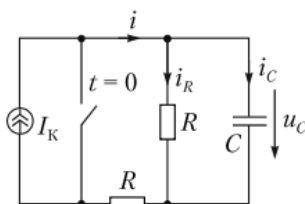


Рис. 8.17. К заданиям 7, 15, 21

7. В цепи, изображенной на рис. 8.17, в момент $t = 0$ происходит размыкание ключа. Пользуясь законами Кирхгофа, получите дифференциальное уравнение относительно напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ при $t \geq 0_+$.

8. Какой математический прием лежит в основе разбиения функций времени $i(t)$ и $u(t)$ в переходном режиме на принужденную и свободную составляющие, а именно: $i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t)$; $u(t) = u_{\text{пр}}(t) + u_{\text{св}}(t)$?

9. Что такое принужденная составляющая тока (напряжения) в переходном режиме? От чего зависит вид принужденной составляющей?

10. Какой вид будет иметь принужденная составляющая тока $i_L(t)$ после размыкания ключа в цепи, изображенной на рис. 8.16, если: а) $e(t) = E_m \sin \omega t$; б) $e(t) = E = \text{const}$?

11. Чему равна принужденная составляющая тока $i_L(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8.16, при замыкании ключа в момент $t = 0$?

12. Каковы математический и физический смысл свободной составляющей тока (напряжения), а также методика определения ее общего вида по дифференциальному уравнению послекоммутационной цепи? Проиллюстрируйте ее на примере дифференциального уравнения $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$, найдя общий вид $i_{\text{св}}(t)$.

13. Как по дифференциальному уравнению записать соответствующее характеристическое уравнение? Что понимается под алгебраизацией дифференциального уравнения?

14. Получите характеристическое уравнение по следующему дифференциальному уравнению: $0,1 \frac{d^2 i}{dt^2} + 50 \frac{di}{dt} + 4 \cdot 10^3 = 0$. Найдите корни характеристического уравнения и запишите общий вид свободной составляющей $i_{\text{св}}(t)$.

15. Пользуясь методикой параграфа 8.6, составьте характеристическое уравнение цепи, изображенной на рис. 8.17, без предварительной записи дифференциальных уравнений Кирхгофа. Рассмотрите два случая коммутации в момент времени $t = 0$: а) замыкание; б) размыкание.

16. По какому критерию определяется порядок цепи? Запишите вид свободной составляющей тока (напряжения) для цепи первого порядка.

17. Запишите возможные виды свободной составляющей тока и напряжения в цепи второго порядка.

18. Каким законом необходимо удовлетворять при расчете неизвестных постоянных (коэффициентов), присутствующих в выражениях свободных составляющих?

19. Пользуясь классическим методом, найдите функцию $i_L(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8.16, после размыкания ключа в момент $t = 0$. Параметры цепи: $e(t) = E = \text{const} = 40$ В; $R_1 = R_2 = 80$ Ом; $L = 0,08$ Гн. Постройте график найденной функции. Чему равно напряжение на индуктивности в первое мгновение после коммутации ($t = 0_+$)?

20. Как оценивается длительность переходного процесса в цепях первого порядка? Что понимается под постоянной времени τ ? В условиях задания 19 определите величину τ и оцените длительность переходного процесса.

21. Найдите функции $i_C(t)$ и $i_R(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8.17, после замыкания ключа (при $t = 0$). Какова длительность этого переходного процесса, если $I_K = 2$ А, $R = 100$ Ом, $C = 0,01$ мкФ?

22. Для цепи, изображенной на рис. 8.8, заданы $L = 10$ мГн и $C = 0,01$ мкФ. Определите диапазон изменения сопротивления резистора R , чтобы переходной процесс носил: а) колебательный; б) апериодический характер.

23. Как оценивается длительность переходного процесса в цепях второго порядка?

24. Каков характер переходного процесса в цепи, изображенной на рис. 8.8, при $L = 40$ мГн; $C = 1$ нФ; $R = 50$ Ом? Чему примерно равно время его установления?

25. Приведите примеры простейших пассивных четырехполюсников, выполняющих функции дифференцирования и интегрирования.

26. Поясните, почему для дифференцирующей цепи, изображенной на рис. 8.14, повышение точности дифференцирования путем уменьшения произведения RC приводит к ослаблению выходного сигнала.

27. В какой зависимости (прямой или обратной) находится величина RC интегрирующей цепи, изображенной на рис. 8.15, с погрешностью интегрирования?

Глава 9

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- формулы прямого и обратного преобразования Лапласа и класс задач, решаемых операторным методом;
- операторные схемы замещения резистора, индуктивности и емкости;
- уравнения Кирхгофа для изображений;
- порядок расчета переходных процессов операторным методом;
- понятие передаточной функции линейной цепи;

уметь

- переходить от заданной цепи в переходном режиме к ее операторной модели;
- осуществлять обратный переход от найденных изображений к оригиналам на основе таблиц соответствия;
- рассчитывать передаточную функцию для заданной цепи;

владеть

- методикой расчета операторной схемы замещения для цепей первого и второго порядков с целью получения изображений переходных токов и напряжений.
-

9.1. Прямое и обратное преобразования Лапласа

В основе операторного метода расчета переходных процессов в линейных цепях лежит предложенный математиками еще в середине XIX в. операторный, или символический, метод решения линейных дифференциальных уравнений. Его применение для электротехнических задач и дальнейшее развитие этого направления относится к концу XIX и началу XX вв. Идея операторного метода состоит в переносе решения из временной области в область функций комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$. Другими словами, от функции времени $f(t)$ переходят по определенному правилу к функции комплексного оператора $p - F(p)$. Функцию $f(t)$ называют **оригиналом**, $F(p)$ — **изображением**. Целесообразность этого перехода объясняется существенным упрощением операций с изображениями по сравнению с операциями над оригиналами, а именно: дифференцированию и интегрированию во временной области соответствуют алгебраические действия в области изображений.

Таким свойством обладает операторное преобразование Лапласа. Оно имеет вид

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (9.1)$$

Выражение (9.1), позволяющее по заданной функции времени $f(t)$ (т.е. оригиналу) найти ее изображение $F(p)$, называется **прямым преобразованием Лапласа**, а сама функция $F(p)$ называется **изображением по Лапласу**.

По известному изображению $F(p)$ его оригинал может быть найден по формуле обратного преобразования Лапласа. Однако в инженерной практике формулой обратного преобразования Лапласа чаще всего не пользуются. При решении электротехнических задач операторным методом переход к оригиналу осуществляется при помощи таблиц соответствия оригиналов и изображений. Таблицы, приводимые в справочниках и во многих фундаментальных учебниках по электротехнике [4, 5], содержат изображения для достаточно большого числа функций времени, наиболее типичных для задач рассматриваемого класса. В табл. 9.1 включены изображения функций, особенно часто встречающихся при расчете переходных процессов.

Таблица 9.1

Изображения некоторых функций

$f(t)$	$F(p)$
$A = \text{const}$	A/p
$Ae^{-\alpha t} (A = \text{const}; \alpha = \text{const})$	$A/(p + \alpha)$
t	$1/p^2$
$te^{-\alpha t}$	$1/(p + \alpha)^2$
$\sin \omega t$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	$p/(p^2 + \omega^2)$
$(1/\alpha) \cdot (1 - e^{-\alpha t})$	$1/[p(p + \alpha)]$

9.1.1. Изображения производной и интеграла

Допустим, что функция $F(p)$ является изображением по Лапласу функции времени $f(t)$, т.е.

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p).$$

Согласно формуле (9.1) изображение производной $df(t)/dt$ связано с изображением дифференцируемой функции $F(p)$ соотношением

$$\frac{df(t)}{dt} \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0), \quad (9.2)$$

где $f(0)$ — значение функции $f(t)$ в момент начала отсчета $t = 0$ (начальное значение). При нулевых начальных условиях, когда $f(0) = 0$, имеем

$$\frac{df(t)}{dt} \stackrel{\cdot}{=} pF(p),$$

т.е. в последнем случае дифференцированию во временной области соответствует умножение на p в области изображений.

Из формулы (9.1) несложно получить выражение, связывающее изображение интеграла от функции $f(t)$ в пределах $0-t$ с изображением интегрируемой функции $F(p)$:

$$\int_0^t f(t)dt \stackrel{\cdot}{=} \frac{F(p)}{p}. \quad (9.3)$$

Таким образом, операциям дифференцирования и интегрирования во временной области соответствуют алгебраические операции в области изображений. Умножение на p (при нулевых начальных условиях) есть изображение операции дифференцирования, а деление на p — операции интегрирования по времени.

9.2. Связь между изображениями тока и напряжения в элементах R, L, C . Их операторные схемы замещения

Резистор. Как известно, во временной области напряжение и ток в резисторе (рис. 9.1, *a*) связаны между собой законом Ома: $u_R(t) = Ri(t)$. Подвергая обе части этого уравнения операторному преобразованию Лапласа (9.1), получаем выражение

$$U_R(p) = RI_R(p), \quad (9.4)$$

где $U_R(p), I_R(p)$ — изображения функций $u_R(t)$ и $i_R(t)$ соответственно.

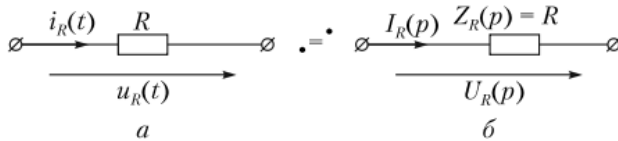


Рис. 9.1. Операторная схема замещения резистора:

a — резистор с током $i_R(t)$ и напряжением $u_R(t) = Ri_R(t)$; *б* — его операторная модель

Этот результат можно трактовать как закон Ома для изображений. Он позволяет построить так называемую операторную схему замещения резистора (рис. 9.1, *б*). Иногда ее называют операторной моделью. На рис. 9.1, *б* наглядно представлено соотношение (9.4) между изображениями напряжения и тока в данном элементе.

Отношение изображений напряжения $U_R(p)$ и тока $I_R(p)$ можно рассматривать как операторное сопротивление элемента. На рис. 9.1, *б* оно обозначено $Z_R(p)$, его величина совпадает с сопротивлением резистора R :

$$Z_R(p) = \frac{U_R(p)}{I_R(p)} = R.$$

Индуктивность. Мгновенные значения напряжения и тока в индуктивности (рис. 9.2, *a*) связаны уравнением $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$. Применяем к обеим частям этого уравнения операторное преобразование Лапласа. Если для изображений функций $u_L(t)$ и $i_L(t)$ принять обозначения $u_L(t) \stackrel{\cdot}{=} U_L(p)$; $i_L(t) \stackrel{\cdot}{=} I_L(p)$, то согласно формуле (9.2) получаем уравнение

$$U_L(p) = L(pI_L(p) - i_L(0_+)) = LpI_L(p) - Li_L(0_+). \quad (9.5)$$

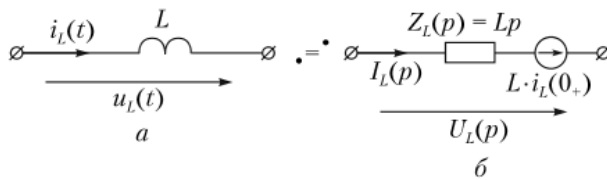


Рис. 9.2. Операторная схема замещения индуктивности:

a — индуктивность с током $i_L(t)$ и напряжением $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$;
 b — ее последовательная операторная модель

Применительно к задачам по расчету переходных процессов в выражении (9.5) для определенности фигурирует послекоммутационное начальное значение функции $i_L(t)$, а именно $i_L(0_+)$.

Соотношение (9.5) представляет собой связь между изображениями напряжения и тока в индуктивности. Его алгебраический вид позволяет построить операторную модель индуктивности. Поскольку изображение напряжения $U_L(p)$ в соотношении (9.5) содержит два слагаемых, операторная модель индуктивности включает в себя два последовательных участка:

1) слагаемое $LpI_L(p)$, пропорциональное изображению тока $I_L(p)$, смоделировано в схеме на рис. 9.2, б элементом с операторным сопротивлением $Z_L(p) = Lp$;

2) слагаемое $Li_L(0_+)$, не зависящее от изображения тока, можно считать напряжением на некотором операторном источнике ЭДС $Li_L(0_+)$. Его направление (см. рис. 9.2, б) обеспечивает отрицательный знак данного слагаемого в выражении (9.5).

Итак, операторная схема замещения индуктивности (см. рис. 9.2, б) содержит в общем случае два элемента — пассивный элемент с операторным сопротивлением $Z_L(p) = Lp$ и источник ЭДС $Li_L(0_+)$, направленный по току $i_L(t)$. Последний обусловлен ненулевыми начальными условиями. При нулевых начальных условиях операторная модель индуктивности представляет собой один элемент с операторным сопротивлением $Z_L(p) = Lp$.

Емкость. Для идеального емкостного элемента (конденсатора без резистивных потерь) справедливо соотношение между мгновенными значениями напряжения $u_c(t)$ и тока $i_c(t)$ (рис. 9.3, а)

$$u_c(t) = u_c(0_+) + \frac{1}{C} \int_{0_+}^t i_c(t) dt. \quad (9.6)$$

Здесь $u_c(0_+)$ — начальное значение напряжения на конденсаторе.

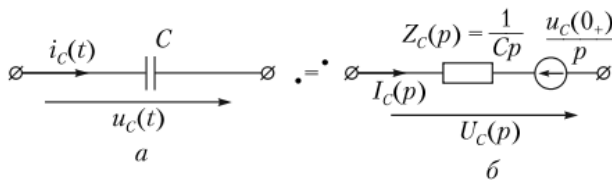


Рис. 9.3. Операторная схема замещения емкостного элемента:

a — емкость с током $i_c(t)$ и напряжением $u_c(t)$; b — последовательная операторная схема замещения емкости

Применяя к обеим частям соотношения (9.6) прямое преобразование Лапласа, приходим с учетом формулы (9.3) к уравнению

$$U_c(p) = \frac{u_c(0_+)}{p} + \frac{1}{Cp} I_c(p), \quad (9.7)$$

где $U_c(p), I_c(p)$ – изображения функций $u_c(t), i_c(t)$ соответственно.

Алгебраический вид соотношения (9.7) позволяет построить операторную схему замещения емкостного элемента (рис. 9.3, б). Она включает два последовательных участка соответственно двум слагаемым в формуле (9.7):

1) выражение $\frac{1}{Cp} I_c(p)$, пропорциональное изображению тока $I_c(p)$,

представлено на рис. 9.3, б пассивным элементом с операторным сопротивлением $Z_c(p) = 1/(Cp)$;

2) независящему от изображения тока слагаемому в выражении (9.7) $u_c(0_+)/p$ соответствует операторный источник ЭДС; его направление (встречно току) обусловлено положительным знаком рассматриваемого слагаемого.

При нулевых начальных условиях источник ЭДС в схеме замещения (см. рис. 9.3, б) отсутствует, емкость изображается одним элементом с операторным сопротивлением $Z_c(p) = 1/(Cp)$.

9.3. Законы Кирхгофа для изображений

В уравнениях Кирхгофа для переходного режима фигурируют функции времени (токов, напряжений, ЭДС):

$$\begin{cases} \sum i(t) = 0 & \text{– в узле электрической цепи,} \\ \sum e(t) = \sum u(t) & \text{– в замкнутом контуре.} \end{cases} \quad (9.8)$$

Подвергая обе части уравнений (9.8) операторному преобразованию Лапласа, приходим к уравнениям относительно изображений токов $I(p)$, напряжений $U(p)$ и ЭДС $E(p)$:

$$\begin{cases} \sum I(p) = 0 & \text{– в узле электрической цепи,} \\ \sum E(p) = \sum U(p) & \text{– в замкнутом контуре.} \end{cases} \quad (9.9)$$

Таким образом, согласно уравнениям (9.9):

- алгебраическая сумма изображений токов в узле электрической цепи равна нулю;

- алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в замкнутом контуре электрической цепи, равна алгебраической сумме изображений напряжений на всех остальных элементах контура.

Эти формулировки называют **первым и вторым законами Кирхгофа для изображений**. Важно отметить, что система уравнений Кирхгофа в операторной форме (9.9) представляет собой систему *алгебраических уравнений*, в отличие от системы (9.8), которая является системой *интегро-дифференциальных уравнений*.

9.4. Порядок расчета переходных процессов операторным методом

Операторный способ нахождения зависимостей от времени токов в ветвях и напряжений на участках линейной электрической цепи в переходном режиме включает в себя выполнение следующих шагов.

1. *Расчет докоммутиционного режима* с целью определения токов в катушках индуктивности и напряжений на конденсаторах в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, т.е. $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$.

2. *Построение операторной модели послекоммутиционной цепи.* Структура модели повторяет структуру заданной цепи после коммутации. Все элементы модели являются отражением элементов исходной схемы.

Источникам ЭДС и тока реальной цепи соответствуют операторные ЭДС и источники тока. Их интенсивности равны изображениям по Лапласу интенсивностей источников заданной схемы.

Пассивные элементы R , L , C в операторной модели представляются их операторными схемами замещения, рассмотренными в параграфе 9.2.

3. *Расчет операторной модели.* Целью такого расчета является нахождение изображений требуемых в задаче величин (токов, напряжений). Главным способом выполнения данного расчетного этапа являются составление системы уравнений Кирхгофа для операторной схемы и ее решение. Причем алгебраическая форма операторных уравнений Кирхгофа позволяет применять к операторным моделям методы контурных токов, узловых потенциалов, эквивалентного генератора. Можно при этом пользоваться всеми преобразованиями, которые справедливы при алгебраической форме уравнений Кирхгофа.

4. *Переход от найденного изображения к оригиналу.* Хотя данный переход формально возможен при помощи формулы обратного преобразования Лапласа [4], этим путем чаще всего не пользуются. Обычно переход к оригиналу осуществляется по таблицам соответствия изображений и оригиналов. Они приводятся в математических справочниках, а также во многих фундаментальных учебниках, рассматривающих применение операторного метода для решения электротехнических задач. Поэтому найденное изображение предварительно приводят к сумме изображений табличного вида, например при помощи теоремы разложения (параграф 9.5).

Рассмотрим применение данной методики на конкретных задачах по расчету переходных процессов.

Пример 9.1. Для цепи, изображенной на рис. 9.4, *a*, заданы параметры: $E = \text{const} = 250$ В; $I_K = \text{const} = 4$ А; $R_1 = 125$ Ом; $R = 100$ Ом; $L = 0,04$ Гн. В исходном состоянии ключ замкнут; режим установившийся. Определить функции времени токов в индуктивности $i_L(t)$ и в резисторе $i_R(t)$ после размыкания ключа (при $t = 0$).

Решение

1. Рассматриваем режим до коммутации, т.е. при замкнутом ключе, с целью нахождения тока в индуктивности непосредственно перед размыканием ключа $i_L(0_-)$. По условию задачи в установившемся режиме до коммутации через резистор R ток не протекал, поскольку он был шунтирован индуктивностью (L — короткое замыкание). Поэтому

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) = -\frac{E}{R_1} = -2 \text{ А.}$$

Отрицательный знак $i_L(0_-)$ вызван выбранным для него на рис. 9.4, *a* направлением.

2. Строим операторную модель цепи, изображенной на рис. 9.4, *a*, руководствуясь правилами, сформулированными в начале параграфа 9.4. Согласно этим

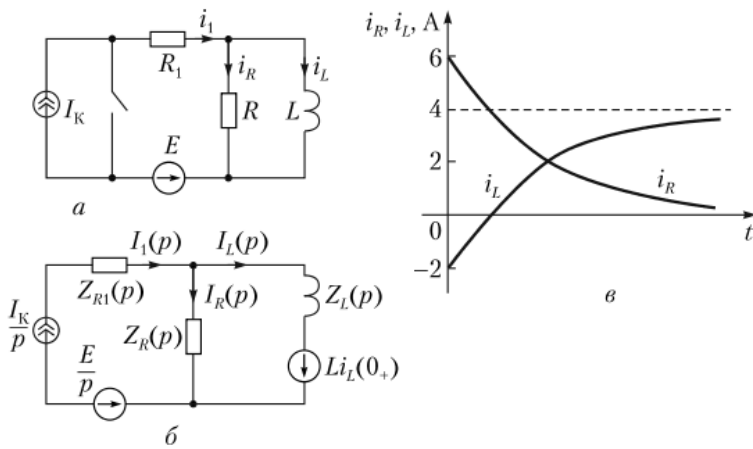


Рис. 9.4. К примеру 9.1:

a — заданная цепь; *б* — ее операторная модель; *в* — графики временных зависимостей $i_R(t)$ и $i_L(t)$

правилам в операторной модели, приведенной на рис. 9.4, *б*, ключ разомкнут, источники постоянного тока I_K и постоянной ЭДС E представлены операторными источниками I_K/p и E/p , резисторам R_1 и R соответствуют элементы с операторными сопротивлениями $Z_{R_1}(p) = R_1$ и $Z_R(p) = R$, индуктивность изображается двумя последовательными элементами — пассивным элементом с операторным сопротивлением $Z_L(p) = Lp$ и источником ЭДС $Li_L(0_+) = Li_L(0_-)$.

3. Расчет операторной схемы (рис. 9.4, *б*) проведем по законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа

$$I_L(p) + I_R(p) = I_K/p.$$

По второму закону Кирхгофа для контура без источника тока

$$I_L(p)Lp - I_R(p)R = Li_L(0_+).$$

Из записанных уравнений для изображений искомых токов получаем

$$I_R(p) = \frac{I_K - i_L(0_+)}{p + R/L} = \frac{6}{p + 2500};$$

$$I_L(p) = \frac{I_K}{p} - I_R(p) = \frac{4}{p} - \frac{6}{p + 2500}.$$

4. Изображениям $I_R(p)$ и $I_L(p)$ согласно табл. 9.1 соответствуют функции времени

$$i_R(t) = 6e^{-2500t} \text{ (A)}; \quad i_L(t) = 4 - 6e^{-2500t} \text{ (A)}.$$

Графики найденных зависимостей построены на рис. 9.4, *в*.

Пример 9.2. При замыкании ключа в цепи, изображенной на рис. 9.5, *а*, в момент времени $t = 0$ к конденсатору $C_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф, заряженному до напряжения $u_{C_1}(0_-) = 500$ В, подключается незаряженный конденсатор $C_2 = 8 \cdot 10^{-6}$ Ф с последовательным резистором $R = 250$ Ом.

Требуется получить зависимости от времени напряжений на конденсаторах $u_{C_1}(t)$ и $u_{C_2}(t)$ в переходном режиме, а также оценить длительность переходного процесса. Каким станет напряжение на конденсаторах по окончании переходного процесса?

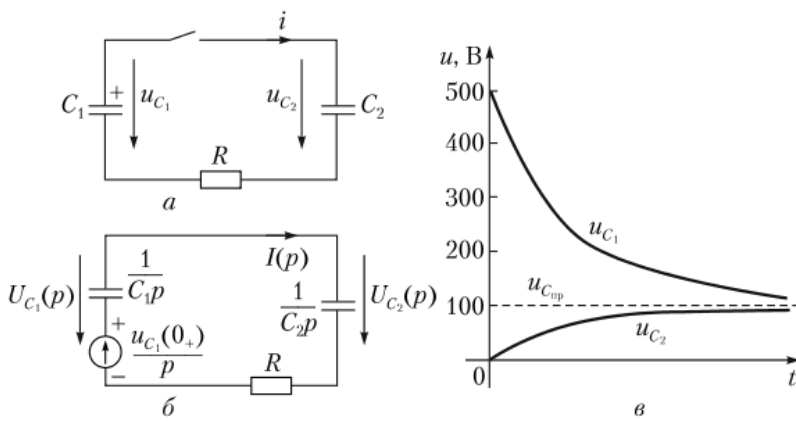


Рис. 9.5. К примеру 9.2:

a – заданная цепь; b – операторная схема замещения; $в$ – графики функции $u_{c_1}(t)$ и $u_{c_2}(t)$

Решение

1. По условию непосредственно перед замыканием ключа напряжения на конденсаторах равны $u_{c_1}(0_-) = 500$ В, $u_{c_2}(0_-) = 0$.

2. Операторная модель цепи, представленной на рис. 9.5, a , приведена на рис. 9.5, b . Она содержит один операторный источник ЭДС, обусловленный начальным значением напряжения на конденсаторе C_1 , интенсивностью $\frac{u_{c_1}(0_+)}{p} = \frac{u_{c_1}(0_-)}{p}$, и три пассивных элемента с операторными сопротивлениями $Z_{C_1}(p) = \frac{1}{C_1 p}$, $Z_{C_2}(p) = \frac{1}{C_2 p}$, $Z_R(p) = R$.

3. Расчет операторной схемы, изображенной на рис. 9.5, b , начинаем с нахождения изображения тока $I(p)$ по закону Ома:

$$I(p) = \frac{u_{c_1}(0_+)/p}{R + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p}} = \frac{u_{c_1}(0_+) \frac{1}{R}}{p + \frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2}} = \frac{2}{p + 2500}.$$

Изображения напряжений на конденсаторах $U_{C_1}(p)$ и $U_{C_2}(p)$ записываем по найденному изображению тока с учетом их положительных направлений, указанных на рис. 9.5, b :

$$U_{C_1}(p) = \frac{u_{c_1}(0_+)}{p} - I(p) \frac{1}{C_1 p} = \frac{500}{p} - \frac{2}{p + 2500} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^{-6} p} = \frac{500}{p} - \frac{10^6}{p(p + 2500)};$$

$$U_{C_2}(p) = I(p) \frac{1}{C_2 p} = \frac{2}{p + 2500} \cdot \frac{1}{8 \cdot 10^{-6} p} = 250 \cdot 10^3 \frac{1}{p(p + 2500)}.$$

4. Зависимости $u_{c_1}(t)$ и $u_{c_2}(t)$ получаем по полученным операторным выражениям, обращаясь к табл. 9.1. Учитываем, что операторное выражение A/p изображает постоянную во времени функцию $A = \text{const}$, а операторное выражение $\frac{1}{p(p + \alpha)}$ – функцию $\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$. Следовательно:

$$u_{c_1}(t) = 500 - \frac{10^6}{2500}(1 - e^{-2500t}) = 100 + 400e^{-2500t} \text{ (В)};$$

$$u_{c_2}(t) = 250 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2500} (1 - e^{-2500t}) = 100(1 - e^{-2500t}) \text{ (В)}.$$

Графики зависимостей $u_{c_1}(t)$ и $u_{c_2}(t)$ представлены на рис. 9.5, в. Обе кривые асимптотически стремятся к горизонтальной прямой, отсекающей по оси напряжений отрезок, равный 100 В. Следовательно, установившиеся (принужденные) напряжения на конденсаторах (при $t \rightarrow \infty$) одинаковы и равны 100 В: $u_{c_{1np}} = u_{c_{2np}} = u_{c_{np}} = 100 \text{ В}$.

Этот результат может быть получен без расчета переходного процесса по закону сохранения заряда. Так как данная цепь не содержит источников, суммарный заряд на обкладках конденсаторов, соединенных гальванически, остается без изменений, а именно:

$$C_1 u_{c_1}(0_-) = C_1 u_{c_{1np}} + C_2 u_{c_{2np}} = (C_1 + C_2) u_{c_{np}}.$$

Из этого уравнения находим установившееся напряжение на конденсаторах:

$$u_{c_{np}} = \frac{C_1 u_{c_1}(0_-)}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^6}{(2 + 8) \cdot 10^6} \cdot 500 = 100 \text{ В}.$$

Несмотря на наличие двух накопителей энергии C_1 и C_2 , переходный процесс в рассматриваемой цепи имеет первый порядок. Поэтому его длительность оценивается по показателю экспоненты, фигурирующей в найденных функциях времени: e^{-2500t} . Такой экспоненте соответствует постоянная времени $\tau = \frac{1}{2500} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 0,4 \text{ мс}$ (см. подпараграфы 8.4.2 и 8.4.3). Если за время переходного процесса взять интервал времени 3τ , то его длительность составляет $3 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 1,2 \text{ мс}$.

9.5. Теорема разложения

Поскольку система операторных уравнений Кирхгофа для линейной цепи является системой алгебраических уравнений, ее решение относительно изображений токов ветвей и напряжений на участках имеет вид отношения двух алгебраических многочленов:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}. \quad (9.10)$$

Для того чтобы при переходе от операторного выражения (9.10) к оригиналу воспользоваться таблицами соответствия, необходимо представить его в виде суммы слагаемых табличного вида. Эту задачу решает теорема разложения [4]. Приведем вариант формул теоремы разложения для случая отсутствия кратных корней у многочлена $F_2(p)$, стоящего в знаменателе формулы (9.10). Он соответствует подавляющему большинству задач по расчету переходных процессов в линейных электрических цепях [4].

Поскольку $F_2(p)$ является многочленом n -й степени, его корни обозначаем $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$. Если величины p_1, p_2, \dots, p_n различны, то выражение (9.10) можно представить следующей суммой:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}. \quad (9.11)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$ в сумме (9.11) вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}, \quad (9.12)$$

где $F_1(p_k)$ — значение многочлена $F_1(p)$, стоящего в числителе формулы (9.10), при $p = p_k$; $F_2'(p_k) = dF_2(p)/dp|_{p=p_k}$ — значение первой производной по переменной величине p от многочлена $F_2(p)$ при $p = p_k$.

Каждому слагаемому вида $\frac{A_k}{p - p_k}$ изображения (9.11) во временной области соответствует экспонента $A_k e^{p_k t}$. Поэтому в рассматриваемом случае изображению $F_1(p)/F_2(p)$ соответствует оригинал, представляющий собой сумму экспонент:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \cdot = \cdot \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (9.13)$$

Среди различных корней p_1, p_2, \dots, p_n может быть один нулевой корень, а также пары комплексно-сопряженных корней. Поэтому формула (9.13) годится для широкого класса задач по расчету переходных процессов. Формула разложения для случая кратных корней многочлена $F_2(p)$ ввиду своей громоздкости здесь не приводится.

Пример 9.3. В цепи, изображенной на рис. 9.6, а, в момент $t = 0$ параллельно ветви $R_2 L$ подключается заряженный до напряжения $u_c(0_-) = 20$ В конденсатор. Параметры цепи заданы следующими: $E = \text{const} = 60$ В; $R_1 = 400$ Ом; $R_2 = 800$ Ом; $L = 0,2$ Гн; $C = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Определить законы изменения напряжения на конденсаторе $u_c(t)$ и тока $i_3(t)$ в переходном режиме.

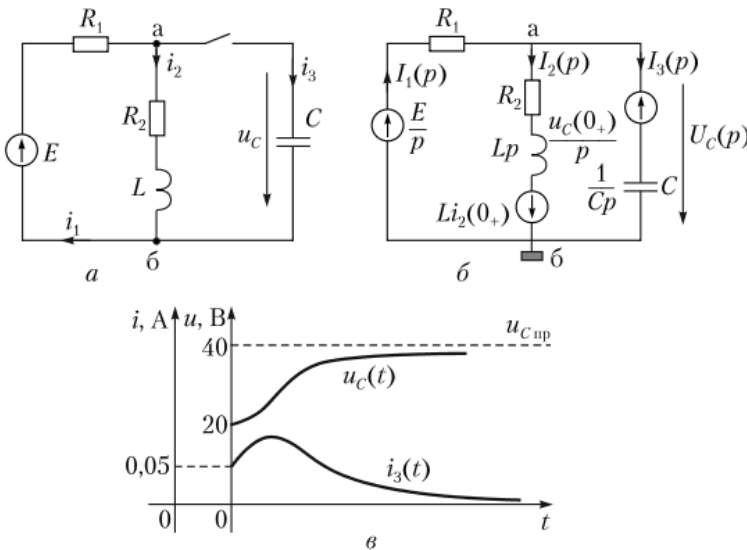


Рис. 9.6. К примеру 9.3:

а — заданная цепь; б — операторная модель после замыкания ключа; в — графики зависимостей $u_c(t)$ и $i_3(t)$

Решение

1. Согласно с условиями задачи до коммутации через индуктивность протекал постоянный ток, поэтому

$$i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{60}{1200} = 0,05 \text{ A}; \quad u_c(0_-) = 20 \text{ V}.$$

2. Операторная схема замещения цепи, изображенной на рис. 9.6, а, представлена на рис. 9.6, б. Она содержит три операторных источника ЭДС. Кроме ЭДС E/p , изображающей источник постоянной ЭДС E , на рис. 9.6, б присутствуют две операторные ЭДС за счет ненулевых начальных значений тока в индуктивности и напряжения на конденсаторе, а именно:

$$Li_2(0_+) = Li_2(0_-) \quad \text{и} \quad \frac{u_c(0_+)}{p} = \frac{u_c(0_-)}{p}.$$

3. Расчет операторной модели, изображенной на рис. 9.6, б, проведем относительно изображения напряжения на конденсаторе $U_c(p)$. Оно равно разности операторных потенциалов точек «а» и «б» схемы на рис. 9.6, б:

$$U_c(p) = \varphi_a(p) - \varphi_b(p) = U_{a6}(p).$$

Изображение $U_{a6}(p)$ для цепи, представленной на рис. 9.6, б, удобно определить методом узловых потенциалов. Принимаем операторный потенциал узла «б» $\varphi_b(p)$ равным нулю, тогда для узла «а» по методу узловых потенциалов можем записать уравнение

$$\varphi_a(p)(Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p)) = \frac{E}{p}Y_1(p) - Li_2(0_+)Y_2(p) + \frac{u_c(0_+)}{p}Y_3(p). \quad (9.14)$$

В уравнении (9.14) операторные проводимости ветвей $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, $Y_3(p)$ обратны их операторным сопротивлениям:

$$Y_1(p) = \frac{1}{R_1}; \quad Y_2(p) = \frac{1}{R_2 + Lp}; \quad Y_3(p) = Cp.$$

Из уравнения (9.14) выражаем операторный потенциал узла «а» $\varphi_a(p)$. Он равен искомому изображению $U_{a6}(p)$:

$$\varphi_a(p) = U_{a6}(p) = \frac{\frac{E}{p} \frac{1}{R_1} - \frac{Li_2(0_+)}{R_2 + Lp} + \frac{u_c(0_+)}{p} Cp}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + Lp} + Cp}.$$

После подстановки числовых значений параметров для $U_{a6}(p)$ получаем

$$U_{a6}(p) = \frac{4 \cdot 10^{-3} p^2 + 24p + 48 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^{-3} p^3 + p^2 + 1200p}. \quad (9.15)$$

4. Переход от изображения (9.15) к оригиналу проведем с помощью теоремы разложения, поскольку оно представляет собой отношение двух алгебраических многочленов:

$$U_{a6}(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где $F_1(p) = 4 \cdot 10^{-3} p^2 + 24p + 48 \cdot 10^3$; $F_2(p) = 0,2 \cdot 10^{-3} p^3 + p^2 + 1200p$.

Предварительно решаем уравнение $F_2(p) = 0$, находим его корни: $p_0 = 0$; $p_1 = -2000$; $p_2 = -3000$.

Таким образом, мы имеем дело со случаем различных корней многочлена знаменателя в изображении вида (9.10) и можем воспользоваться формулой (9.11) теоремы разложения.

Поскольку уравнение $F_2(p)$ имеет три корня, оригинал изображения (9.15) содержит три слагаемых. В соответствии с формулой (9.11)

$$u_{a6}(t) = \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} e^{p_0 t} + \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t}. \quad (9.16)$$

С целью получения численного результата для $u_{a6}(t)$ выполняем следующие расчеты:

$$\begin{aligned} F_1(0) &= 48 \cdot 10^3; \\ F_1(p_1) &= 4 \cdot 10^{-3} \cdot (-2000)^2 + 24 \cdot (-2000) + 48 \cdot 10^3 = 16 \cdot 10^3; \\ F_1(p_2) &= 4 \cdot 10^{-3} \cdot (-3000)^2 + 24 \cdot (-3000) + 48 \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^3; \\ F_2'(p_1) &= 0,6 \cdot 10^{-3} p^2 + 2p + 1200; \quad F_2'(0) = 1200; \\ F_2'(p_1) &= 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot (-2000)^2 + 2 \cdot (-2000) + 1200 = -400; \\ F_2'(p_2) &= 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot (-3000)^2 + 2 \cdot (-3000) + 1200 = 600. \end{aligned}$$

Найденные числовые величины подставляем в выражение (9.16):

$$u_{a6}(t) = \frac{48 \cdot 10^3}{1200} + \frac{16 \cdot 10^3}{-400} e^{-2000t} + \frac{12 \cdot 10^3}{600} e^{-3000t}.$$

Таким образом, для искомым функций времени получаем

$$\begin{aligned} u_c(t) &= 40 - 40e^{-2000t} + 20e^{-3000t} \text{ (В);} \\ i_3(t) &= \frac{Cdu_c(t)}{dt} = 0,2e^{-2000t} - 0,15e^{-3000t} \text{ (А).} \end{aligned}$$

Качественные графики функции $u_c(t)$ и $i_3(t)$ по полученным выражениям приведены на рис. 9.6, в.

9.6. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных пассивных цепях при произвольных (непериодических) воздействиях

Применение преобразования Лапласа к переходным процессам, возникающим в линейных цепях при произвольных воздействиях, в подавляющем большинстве практических случаев позволяет алгебраизировать процесс решения. Степень сложности расчетов операторным методом зависит от вида входного воздействия, а также от свойств реагирующей цепи. В области изображений по Лапласу свойства линейной пассивной цепи с позиции ее реакции на внешнее воздействие полностью определяются ее передаточной функцией $K(p)$.

9.6.1. Понятие передаточной функции пассивной цепи $K(p)$ и рекомендации по ее нахождению

Рассмотрим случай, когда к зажимам линейного пассивного двухполюсника подключен внешний источник, задающий либо напряжение на входе двухполюсника $u_{\text{вх}}(t)$, либо ток $i_{\text{вх}}(t)$. Сохраняем прежнее общее обозначение для заданного внешнего воздействия — $x_{\text{вх}}(t)$.

Соответствующую реакцию (ток одной из ветвей пассивного двухполюсника или напряжения на каком-либо его участке) обозначаем $x_{\text{вых}}(t)$.

Под **передаточной функцией пассивной цепи** понимается отношение изображения по Лапласу выходной величины (реакции) $x_{\text{вых}}(t)$ к изображению внешнего воздействия $x_{\text{вх}}(t)$ при нулевых начальных условиях.

Если обозначить изображения функций $x_{\text{вх}}(t)$ и $x_{\text{вых}}(t)$ соответственно $X_{\text{вх}}(p)$ и $X_{\text{вых}}(p)$, то согласно определению

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p). \quad (9.17)$$

Поскольку изображения $X_{\text{вх}}(p)$ и $X_{\text{вых}}(p)$ сохраняют размерности оригиналов, то размерность передаточной функции равна отношению размерностей выходной и входной величин. Поэтому $K(p)$ может иметь размерность сопротивления (Ом), проводимости ($1/\text{Ом} = \text{См}$) и быть безразмерной.

Методика расчета функции $K(p)$. По заданной схеме пассивного двухполюсника функция $K(p)$ определяется по его операторной модели (с нулевыми начальными условиями). Возможны два расчетных пути.

1. Предполагают известным изображение входного воздействия $X_{\text{вх}}(p)$; затем, пользуясь уравнениями Кирхгофа, находят изображение реакции $X_{\text{вых}}(p)$. При этом ввиду алгебраической формы операторных уравнений Кирхгофа можно пользоваться методами контурных токов, узловых потенциалов, эквивалентного генератора и т.п.

2. Возможен обратный порядок расчета, предполагающий известным изображение реакции $X_{\text{вых}}(p)$. Соответствующее изображение внешнего воздействия $X_{\text{вх}}(p)$ определяют, применяя законы Ома и Кирхгофа.

Оба способа расчета проиллюстрированы в следующих примерах.

Пример 9.4. Определить передаточную функцию цепи, изображенной на рис. 9.7, а, считая входной величиной напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, а выходной величиной — ток в индуктивности $i_2(t)$.

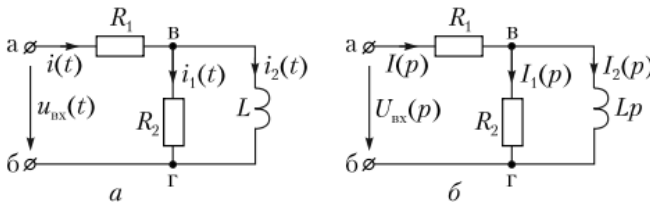


Рис. 9.7. К примеру 9.4 по расчету передаточной функции $K(p)$ пассивной цепи:

а — заданная цепь; б — операторная модель при нулевых начальных условиях

Решение

На рис. 9.7, б показана операторная модель заданного двухполюсника при нулевых начальных условиях. Считая известным изображение входного напряжения $U_{\text{вх}}(p)$, найдем изображение тока в индуктивном элементе $I_2(p)$.

Операторное входное сопротивление заданного двухполюсника относительно зажимов «а», «б» равно

$$Z_{\text{аб}}(p) = R_1(p) + \frac{R_2 L p}{R_2 + L p} = \frac{R_1 R_2 + R_1 L p + R_2 L p}{R_2 + L p}.$$

Пользуясь законом Ома, находим изображение тока на входе двухполюсника:

$$I(p) = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{Z_{\text{аб}}(p)}.$$

Напряжение $U_{вб}(p)$ на параллельном участке (R_2, L) определяем по току $I(p)$ и его сопротивлению:

$$Z_{вб}(p) = \frac{R_2 L p}{R_2 + L p};$$

$$U_{вб}(p) = I(p) Z_{вб}(p) = U_{вх}(p) \frac{Z_{вб}(p)}{Z_{вб}(p)} = U_{вх}(p) \frac{R_2 L p}{R_1 R_2 + R_1 L p + R_2 L p}.$$

Найденному напряжению $U_{вб}(p)$ соответствует изображение тока в индуктивной ветви

$$I_2(p) = \frac{U_{вб}(p)}{L p}, \text{ или } I_2(p) = \frac{U_{вх}(p) R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) L p}.$$

Искомая передаточная функция $K(p)$ равна отношению изображения тока $I_2(p)$ к изображению входного напряжения $U_{вх}(p)$, т.е.

$$K(p) = \frac{R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) L p} \text{ (A/B)}.$$

Она имеет размерность проводимости.

Пример 9.5. Получить в общем виде выражение передаточной функции $K(p)$ цепи, изображенной на рис. 9.8, а, при условии что воздействующим сигналом является ток на входе двухполюсника $i_{вх}(t)$. Выходной реакцией принять напряжение на конденсаторе $u_c(t)$.

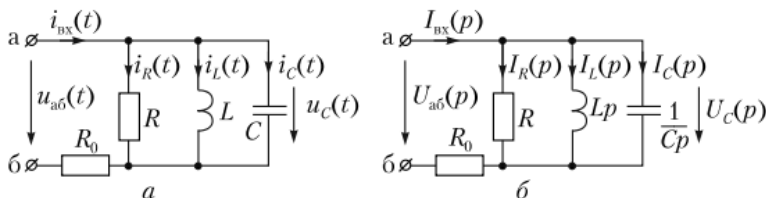


Рис. 9.8. К примеру 9.5. Расчет передаточной функции $K(p) = U_c(p)/I_{вх}(p)$:

а – заданная цепь; б – операторная модель при нулевых начальных условиях

Решение

Предположим изображение реакции $U_c(p)$ известным. Пользуясь операторной схемой (рис. 9.8, б), найдем соответствующее изображение входного тока $I_{вх}(p)$. Для этого записываем изображения токов в параллельных ветвях, выражая их через $U_c(p)$:

$$I_C(p) = U_C(p) C p; \quad I_L(p) = \frac{U_C(p)}{L p}; \quad I_R(p) = \frac{U_C(p)}{R}.$$

Далее определяем изображение тока во входной ветви двухполюсника по первому закону Кирхгофа:

$$I_{вх}(p) = U_C(p) \cdot \left[C p + \frac{1}{L p} + \frac{1}{R} \right].$$

Для искомой передаточной функции из последнего соотношения получаем выражение

$$K(p) = \frac{U_C(p)}{I_{вх}(p)} = \frac{1}{C p + 1/(L p) + 1/R} \text{ (Ом)}.$$

Функция $K(p)$ в рассмотренном случае имеет размерность сопротивления. Обратим внимание, что от величины R_0 функция $K(p)$ не зависит.

9.6.2. Основные этапы операторного метода расчета переходных процессов при произвольных внешних воздействиях

Из определения передаточной функции (9.17) следует соотношение

$$X_{\text{вых}}(p) = X_{\text{вх}}(p)K(p), \quad (9.18)$$

согласно которому *изображение реакции пассивной цепи равно произведению изображения внешнего воздействия на передаточную функцию цепи*. Оно позволяет по заданной передаточной функции цепи $K(p)$ и изображению входного сигнала $X_{\text{вх}}(p)$ найти изображение соответствующей реакции $X_{\text{вых}}(p)$. Соотношение (9.18) лежит в основе операторного метода расчета переходных процессов в линейных пассивных цепях при произвольных воздействиях. Назовем его главные этапы:

- нахождение изображения входного воздействия $X_{\text{вх}}(p)$;
- определение передаточной функции цепи $K(p)$;
- расчет изображения реакции $X_{\text{вых}}(p) = X_{\text{вх}}(p)K(p)$;
- переход от найденного изображения $X_{\text{вых}}(p)$ к оригиналу $x_{\text{вых}}(t)$.

9.6.3. Рекомендации по определению изображения входного воздействия $X_{\text{вх}}(p)$. Применение теоремы запаздывания

Переход от функции времени $x_{\text{вх}}(t)$ к изображению $X_{\text{вх}}(p)$ может выполняться по формуле прямого преобразования Лапласа: $X_{\text{вх}}(p) = \int_0^{\infty} x_{\text{вх}}(t)e^{-pt} dt$.

Но если заданная функция $x_{\text{вх}}(t)$ позволяет представить ее суммой слагаемых табличного вида, то пользуются таблицами соответствия оригиналов и изображений. В тех случаях, когда составляющие, на которые разлагается функция $x_{\text{вх}}(t)$, по форме подобны, но сдвинуты во времени, при переходе к изображению удобно воспользоваться теоремой запаздывания.

Приводим эту теорему без доказательства, хотя его несложно получить как одно из свойств прямого преобразования Лапласа.

Теорема запаздывания. Допустим, что функции времени $f(t)$ соответствует изображение по Лапласу $F(p)$. Тогда функция $f(t - t_0)$ имеет изображение $F(p)e^{-pt_0}$, т.е. справедливы следующие два соответствия:

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p); \quad f(t - t_0) \stackrel{\cdot}{=} F(p)e^{-pt_0}.$$

Другими словами, запаздыванию во временной области на время t_0 соответствует умножение на e^{-pt_0} . Покажем применение этой теоремы при нахождении изображений для функций времени, наиболее часто встречающихся в решаемых задачах.

9.6.4. Изображение ступенчатой функции

На рис. 9.9, а показана функция $x_{\text{вх}}(t)$, представляющая собой последовательность трех ступеней величиной: 1) $x(0)$ (при $t = 0$); 2) Δx_1 (при $t = t_1$); 3) Δx_2 (при $t = t_2$).

Поскольку изображение единичной ступени, возникающей в момент $t = 0$ (функции Хевисайда $1(t)$), равно $1/p$, то заданной ступенчатой функции $x_{\text{вх}}(t)$ соответствует изображение

$$X_{\text{вх}}(p) = x(0)\frac{1}{p} + \Delta x_1\frac{1}{p}e^{-pt_1} + \Delta x_2\frac{1}{p}e^{-pt_2}.$$

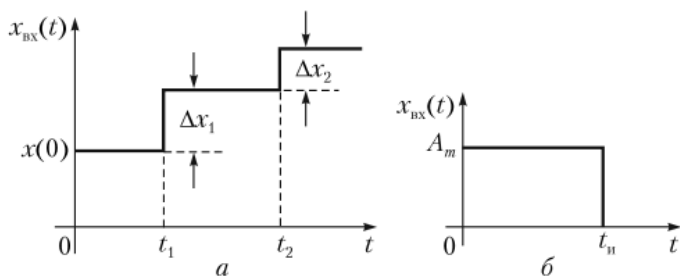


Рис. 9.9. К определению изображения ступенчатой функции:
а — общий случай ступенчатого воздействия; *б* — прямоугольный импульс — частный случай ступенчатого воздействия

В частном случае — для прямоугольного импульса величиной A_m и длительностью t_n (рис. 9.6, *б*) — изображение содержит два слагаемых:

$$X_{\text{вх}}(p) = A_m \frac{1}{p} - A_m \frac{1}{p} e^{-pt_n}.$$

9.6.5. Изображение экспоненциального импульса длительностью t_n

Рассмотрим функцию, равную нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ определяемую следующим образом:

$$x_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & \text{при } 0 < t < t_n, \\ 0 & \text{при } t > t_n. \end{cases}$$

Ее график построен на рис. 9.10, *а*. Функцию такого вида можно считать совокупностью двух экспонент:

$$x_{\text{вх}}(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

При $t < 0$ обе функции равны нулю, а при $t > 0$ удовлетворяют условиям

$$f_1(t) = Ae^{-at} \text{ при } 0 < t < \infty;$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < t_n, \\ -Be^{-a(t-t_n)} & \text{при } t_n < t < \infty, \end{cases}$$

где $B = Ae^{-at_n}$.

Их графики построены на рис. 9.10, *б*.

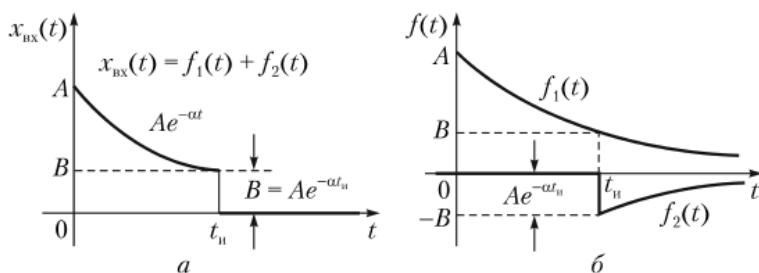


Рис. 9.10. К расчету изображения импульса, имеющего на вершине экспоненциальную форму:

а — импульс $x_{\text{вх}}(t)$; *б* — представление заданного импульса в виде двух экспонент $f_1(t)$ и $f_2(t)$, сдвинутых по времени

Запишем изображения по Лапласу функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, используя теорему запаздывания:

$$f_1(t) = \frac{A}{p + \alpha}; \quad f_2(t) = \frac{-B}{p + \alpha} e^{-pt_n} = \frac{-Ae^{-\alpha t_n}}{p + \alpha} e^{-pt_n}.$$

Тогда изображение заданной функции $x_{\text{вх}}(t)$ равно сумме записанных изображений, т.е.

$$X_{\text{вх}}(p) = \frac{A}{p + \alpha} - \frac{Ae^{-\alpha t_n}}{p + \alpha} e^{-pt_n}.$$

Пример 9.6. На вход пассивного четырехполюсника (рис. 9.11, а), нагруженного на резистивное сопротивление $R_{\text{н}}$, подается импульс тока $i_{\text{вх}}(t)$ длительностью $t_{\text{н}} = 0,25$ мс, имеющий на вершине экспоненциальную форму (рис. 9.11, б) $i_{\text{вх}}(t) = I_0 e^{-\alpha t} = 5e^{-2000t}$ (А).

Определить напряжение на нагрузке $u_{\text{н}}(t)$, если $R_{\text{н}} = 800$ Ом, $L = 0,2$ Гн.

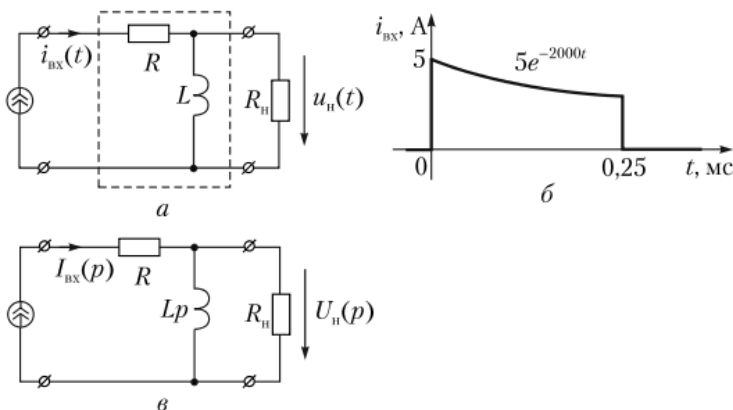


Рис. 9.11. Расчет реакции пассивной цепи на экспоненциальный импульс тока $i_{\text{вх}}(t)$: а – заданная цепь; б – входное воздействие $i_{\text{вх}}(t)$; в – операторная модель для нахождения передаточной функции $K(p)$

Решение

1. Изображение входного воздействия $i_{\text{вх}}(t) = I_{\text{вх}}(p)$.

Согласно сказанному в начале подпараграфа изображение заданного импульса равно:

- на вершине импульса, при $0 < t < t_{\text{н}}$

$$I_{\text{вх}}(p) = \frac{I_0}{p + \alpha} = \frac{5}{p + 2000}; \quad (9.19)$$

- по окончании воздействия, при $t_{\text{н}} < t < \infty$

$$I_{\text{вх}}(p) = \frac{I_0}{p + \alpha} - \frac{I_0 e^{-\alpha t_n}}{p + \alpha} e^{-pt_n} = \frac{5}{p + 2000} - \frac{5e^{-0.5}}{p + 2000} e^{-pt_n}. \quad (9.20)$$

2. Расчет передаточной функции $K(p)$.

На рис. 9.11, в построена операторная модель заданной цепи при нулевых начальных условиях. В рассматриваемом случае входного воздействия передаточная функция является отношением изображений напряжения на нагрузке $U_{\text{н}}(p)$ и тока входной ветви $I_{\text{вх}}(p)$, т.е.

$$K(p) = \frac{U_{\text{н}}(p)}{I_{\text{вх}}(p)}.$$

Учитываем, что $U_{\text{н}}(p)$ связано с $I_{\text{вх}}(p)$ законом Ома:

$$U_{\text{н}}(p) = I_{\text{вх}}(p) \frac{R_{\text{н}} L p}{R_{\text{н}} + L p},$$

поэтому искомая передаточная функция равна

$$K(p) = \frac{R_{\text{н}} L p}{R_{\text{н}} + L p} = R_{\text{н}} \frac{p}{p + R_{\text{н}}/L} = 800 \frac{p}{p + 4000}. \quad (9.21)$$

Она имеет размерность сопротивления.

3. Изображение выходного напряжения находим по формуле

$$U_{\text{н}}(p) = I_{\text{вх}}(p) K(p).$$

На временном интервале $0 < t < t_{\text{н}}$ $I_{\text{вх}}(p)$ определяется выражением (9.19), поэтому с учетом формулы (9.21) для $U_{\text{н}}(p)$ справедливо равенство

$$U_{\text{н}}(p) = \frac{5}{p + 2000} \cdot \frac{800p}{p + 4000} = \frac{4 \cdot 10^3 p}{(p + 2000)(p + 4000)}. \quad (9.22)$$

На временном интервале $t_{\text{н}} < t < \infty$ изображение входного воздействия имеет вид (9.20), умножая его на (9.21), получаем

$$\begin{aligned} U_{\text{н}}(p) &= \left[\frac{5}{p + 2000} - \frac{5e^{-0.5} e^{-pt_{\text{н}}}}{p + 2000} \right] \cdot \frac{800p}{p + 4000} = \\ &= \frac{4 \cdot 10^3 p}{(p + 2000)(p + 4000)} - \frac{4 \cdot 10^3 \cdot e^{-0.5} p}{(p + 2000)(p + 4000)} e^{-pt_{\text{н}}}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

4. Переход от изображения $U_{\text{н}}(p)$ к оригиналу $u_{\text{н}}(t)$.

В таблицах соответствия дается оригинал следующего изображения:

$$\frac{p}{(p + a)(p + b)} = \frac{1}{b - a} \cdot (be^{-bt} - ae^{-at}). \quad (9.24)$$

Изображения (9.22) и (9.23) по виду сходны с (9.24), что позволяет записать искомые реакции:

- на интервале $0 < t < t_{\text{н}}$

$$u_{\text{н}}(t) = 4 \cdot 10^3 \cdot (2e^{-4000t} - 1e^{-2000t}) \text{ В};$$

- на интервале $t_{\text{н}} < t < \infty$

$$\begin{aligned} u_{\text{н}}(t) &= 4 \cdot 10^3 \cdot (2e^{-4000t} - 1e^{-2000t}) - \\ &- 4 \cdot 10^3 e^{-0.5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^3} \cdot (4000e^{-4000(t-t_{\text{н}})} - 2000e^{-2000(t-t_{\text{н}})}) = \\ &= 4 \cdot 10^3 \cdot (2e^{-4000t} - 1e^{-2000t} - 2e^{-0.5} \cdot e^{-4000t} + 1e^{-2000t}) = \\ &= 4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot (1 - e^{-0.5}) e^{-4000t} \approx -5,2 \cdot 10^3 e^{-4000t} \text{ (В)}. \end{aligned}$$

9.7. Связь передаточной функции $K(p)$ и комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$

Поскольку операторные сопротивления индуктивного и емкостного элементов $Z_L(p) = Lp$ и $Z_C(p) = 1/(Cp)$ при подстановке $p \rightarrow j\omega$ переходят в их комплексные сопротивления, то операторная схема замещения цепи при нулевых начальных условиях совпадает с ее символической моделью. По этой причине передаточная функция цепи $K(p)$ при замене p на $j\omega$ превращается в комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$.

Вывод. Передаточная функция пассивной цепи $K(p)$ (определяющая ее свойства в переходном режиме) и комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$ (характеризующий эту же цепь в установившемся синусоидальном режиме) связаны весьма простым выражением: $K(j\omega) = K(p)|_{p=j\omega}$.

9.8. Сравнение операторного метода расчета переходных процессов с классическим

Операторный метод, наряду с классическим, относится к главным методам расчета переходных процессов. Рассмотренные в гл. 8 и 9 примеры позволяют провести сравнение классического и операторного методов и сделать некоторые выводы по целесообразности их применения в конкретных задачах.

1. Операторный метод позволяет находить реакцию линейной пассивной цепи на сложное воздействие, пользуясь только алгебраическими действиями.

2. Самой трудоемкой частью расчета является заключительный этап — переход от изображения искомой величины к оригиналу.

3. Если найденное изображение не принадлежит к табличному виду, наиболее общим приемом перехода к оригиналу служит применение теоремы разложения. Некоторая утомительность вычисления слагаемых в формуле разложения (особенно в случае кратных корней) относится к недостаткам данного способа решения.

4. Достоинства операторного метода перед классическим начинают проявляться в случае цепей третьего и более высоких порядков. Для цепи n -го порядка расчет переходного процесса классическим методом обязательно включает вычисление начальных значений $(n - 1)$ производных искомой функции времени. Операторный метод таких вычислений не содержит.

5. Достоинством операторного метода является также то, что алгебраические уравнения относительно изображений записываются по операторной модели послекоммутиционной цепи и нет необходимости в составлении системы ее интегро-дифференциальных уравнений (для временной области). Переход же от заданной цепи к операторной модели достаточно прост.

Если порядок цепи не выше второго, то классический и операторный методы примерно равноценны.

Контрольные вопросы и задания

1. Какова основная цель перехода от функций времени $i(t)$ и $u(t)$ к их изображениям по Лапласу $I(p)$ и $U(p)$ при расчете переходных процессов?

2. Запишите формулу прямого преобразования Лапласа для функции $f(t)$.

3. Каковы изображения по Лапласу для функций: а) $u(t) = U_0 = \text{const}$; б) $u(t) = U_0 e^{-\alpha t}$.

4. Как связаны изображение производной функции $i(t)$, т.е. di/dt , а также ее интеграла $\int_0^t i(t)dt$ с изображением самой функции $I(p)$?

5. Нарисуйте операторные модели пассивных элементов R , L , C при ненулевых начальных условиях.

6. Какой вид имеет система уравнений относительно изображений по Лапласу функций токов и напряжений для линейной цепи в переходном режиме?

7. Назовите основные этапы операторного расчета переходного процесса в линейной цепи.

8. На основании рекомендованного в примере 9.1 порядка определите функцию $u_L(t)$ в цепи, изображенной на рис. 9.4, при замыкании ключа в момент $t = 0$. При расчете операторной модели целесообразно применить метод узловых потенциалов.

9. С помощью операторного метода определите функцию $i_L(t)$ после замыкания ключа в цепи, изображенной на рис. 9.12, при следующих условиях: $e(t) = 50\sin 1000t$ В; $R_1 = R_2 = 50$ Ом; $L = 10$ мГн. Постройте график $i_L(t)$. Каково напряжение на индуктивности в первое мгновение после коммутации, т.е. $u_L(0_+)$?

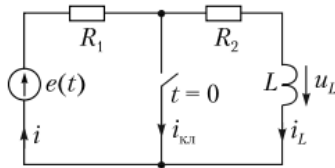


Рис. 9.12. К заданиям 9, 12, 13

10. Найдите функции $u_C(t)$, $i_C(t)$, $i_R(t)$ и постройте их графики при замыкании ключа в цепи, изображенной на рис. 9.13. Примите $I_K = 0,2$ А; $R = 200$ Ом; $C = 100$ нФ. Постройте графики функций $u_C(t)$, $i_C(t)$, $i_R(t)$.

11. Получите операторную модель цепи, изображенной на рис. 9.13, при размыкании ключа в момент $t = 0$. Пользуясь ей, найдите функцию $i_C(t)$ и постройте ее график (в условиях предыдущего вопроса).

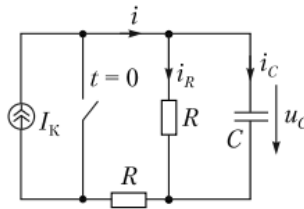


Рис. 9.13. К заданиям 10, 11

12. Определите операторным методом функцию $u_L(t)$ цепи, изображенной на рис. 9.12, при размыкании ключа, если $e(t) = \text{const} = 20$ В; $R_1 = R_2 = 50$ Ом; $L = 20$ мГн.

13. В условиях предыдущего вопроса определите функцию тока через ключ $i_{\text{ксл}}(t)$ цепи, изображенной на рис. 9.12, при его замыкании в момент $t = 0$. Решите задачу классическим и операторным методами.

14. В каких случаях расчета переходных процессов операторным способом применяется теорема разложения?

15. Пользуясь методикой примера 9.3 и соотношением (9.12), найдите оригинал изображения

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{15p + 2 \cdot 10^4}{p^2 + 3000p + 2 \cdot 10^6}.$$

16. Дайте определение передаточной функции $K(p)$. Найдите $K(p) = U_2(p)/U_1(p)$ для четырехполюсников, изображенных на рис. 9.14, а–в, где $U_1(p)$ и $U_2(p)$ — изображения напряжений на зажимах 1–1' и 2–2' соответственно.

17. Изложите методику применения операторного метода для расчета переходного процесса в пассивной цепи при произвольных воздействиях. Запишите уравнение, связывающее изображение реакции $X_{\text{вых}}(p)$ и воздействия $X_{\text{вх}}(p)$.

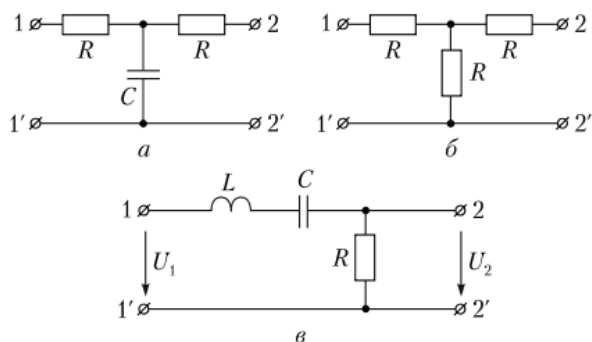


Рис. 9.14. К заданию 15

18. В каких случаях при нахождении изображения входного воздействия $X_{\text{вх}}(p)$ пользуются теоремой запаздывания? Запишите математическое выражение этой теоремы.

19. Пользуясь теоремой запаздывания, запишите изображение функции $u(t)$, заданной графиком на рис. 9.15.

20. На вход четырехполюсника (рис. 9.16) подается напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, заданное графиком на рис. 9.15. Известна передаточная функция четырехполюсника $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p) = 10/(p + 2000)$. Запишите реакцию $u_{\text{вых}}(t)$ при $t \geq 2$ мс. Каково мгновенное значение напряжения на выходе цепи, изображенной на рис. 9.16, в момент 0,5 мс?

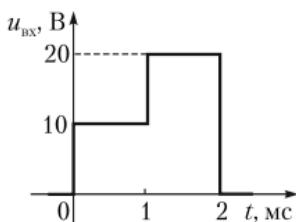


Рис. 9.15. К заданиям 19, 20

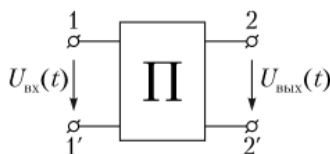


Рис. 9.16. К заданию 20

21. Определите АЧХ и ФЧХ четырехполюсника по его передаточной функции $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p) = 10/(p + 2000)$.

Глава 10

ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЦЕПИ ЛИНЕЙНОГО ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА ЕГО ВХОДЕ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- принцип наложения и основную идею его применения при расчете переходных процессов в случае непериодического воздействия на входе пассивной цепи;
- два варианта подхода (временной и частотный) при разложении непериодического воздействия на элементарные составляющие;
- порядок расчета переходных процессов методами интеграла Дюамеля и спектральным методом;

уметь

- находить переходную реакцию по формуле Дюамеля для простейших случаев импульсных воздействий;
- рассчитывать амплитудный и фазовый спектры непериодических сигналов по известным изображениям по Лапласу;

владеть

- методикой расчета переходной и импульсной характеристик по передаточной функции.
-

10.1. Постановка задачи и принципы подхода к ее решению

В данной главе рассматривается методика нахождения токов в ветвях и напряжений на участках пассивного двухполюсника (рис. 10.1, *a*), когда внешним источником на его входе создается либо напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, либо ток $i_{\text{вх}}(t)$, изменяющиеся по некоторому произвольному закону. Единственным требованием к функциям $u_{\text{вх}}(t)$ и $i_{\text{вх}}(t)$ является их принадлежность к классу аналитических или кусочно-аналитических функций (заданы аналитическими выражениями на каждом конечном интервале и имеют разрывы только первого рода).

Таким образом, внешнее воздействие задается одной из функций $u_{\text{вх}}(t)$ или $i_{\text{вх}}(t)$. Обозначаем его $x_{\text{вх}}(t)$. Считаем, что функция $x_{\text{вх}}(t)$ равна нулю при $t < 0$ и задана при $t > 0$ (рис. 10.1, *б*). Кроме того, предполагаем, что в цепи пассивного двухполюсника при $t < 0$ токи в индуктивностях не протекали, конденсаторы были не заряжены (начальные условия нулевые). Для ис-

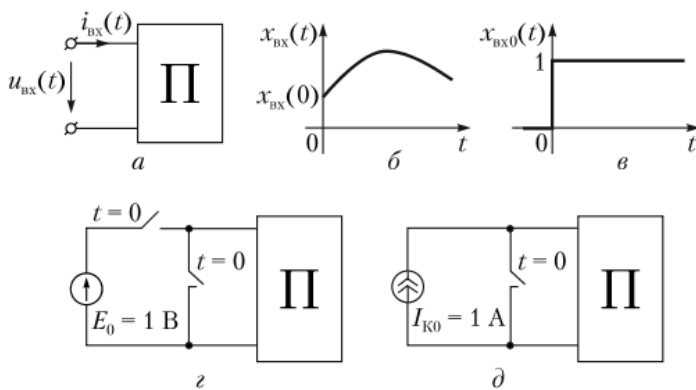


Рис. 10.1. Постановка задачи:

a — пассивный двухполюсник при произвольном воздействии; *б* — график внешнего воздействия, изменяющегося во времени по непрерывному закону $x_{\text{вх}}(t)$; *в* — график внешнего воздействия в виде единичного скачка при $t = 0$; *г* — схемная реализация единичного скачка напряжения на входе пассивного двухполюсника; *д* — схемная реализация единичного скачка тока на входе пассивного двухполюсника

комой реакции (ток какой-либо ветви пассивной схемы или напряжение на одном из ее участков) также введем общее обозначение — $x_{\text{вых}}(t)$.

Расчет переходного процесса в заданных условиях может быть проведен с использованием принципа наложения, справедливого лишь в линейных цепях. Общая формулировка принципа наложения такова: *реакция линейной электрической цепи на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий отдельно*. Применение этого принципа при решении задач рассматриваемого класса независимо от вида входного воздействия ($i_{\text{вх}}(t)$ или $u_{\text{вх}}(t)$) включает следующие шаги:

- представление воздействия $x_{\text{вх}}(t)$ в виде совокупности однотипных элементарных составляющих;
- вычисление частичной реакции на каждую из составляющих в отдельности;
- наложение частичных реакций.

При этом к виду элементарных составляющих, на которые разлагается заданная функция $x_{\text{вх}}(t)$, предъявляется единственное требование: простота нахождения частичной реакции.

В инженерной практике нашли применение **два варианта разложения** входного сигнала на однотипные составляющие:

1) представление $x_{\text{вх}}(t)$ в виде последовательности скачков (бесконечно малых или же конечной величины), сдвинутых друг относительно друга во времени;

2) разложение $x_{\text{вх}}(t)$ на синусоидальные составляющие различной частоты (гармоники).

В первом случае результирующая реакция $x_{\text{вых}}(t)$ вычисляется по формуле интеграла Дюамеля, а во втором — спектральным методом с использованием ряда или интеграла Фурье.

В данной главе рассмотрены оба варианта подхода к решению поставленной задачи. Соответствующие расчетные методики проиллюстрированы в приведенных примерах.

10.2. Ступенчатое представление импульсного входного воздействия

Когда сложное входное воздействие представляется как последовательность элементарных ступеней, возникает необходимость в нахождении реакции (или отклика) на каждую из таких ступеней.

Поскольку все частичные реакции на ступенчатые воздействия подобны, то целесообразно найти реакцию заданной цепи на единичную ступень, происходящую в момент времени $t = 0$. Обозначим такое воздействие $x_{\text{вх}0}(t)$. Его график, изображенный на рис. 10.1, *в*, очевидно совпадает с функцией Хевисайда $1(t)$ (ее называют иногда единичной функцией).

Как единичный скачок напряжения, так и единичный скачок тока на входе пассивного двухполюсника можно реализовать путем подключения к нему идеальных постоянных источников ЭДС и тока. Схемные реализации (рис. 10.1, *з*, *д*) позволяют при нахождении реакции на единичное воздействие применять методику, которая используется в случае подключения к цепи постоянных источников.

10.2.1. Понятие переходной характеристики цепи $h(t)$ (переходной функции)

Под переходной характеристикой пассивной цепи понимается функция времени, численно равная ее переходной реакции $x_{\text{вых}0}(t)$ на воздействие вида $x_{\text{вх}0}(t) = 1(t)$ при нулевых начальных условиях. Размерность $h(t)$ равна отношению размерности выходной величины к размерности входной величины. Поскольку обе функции времени $x_{\text{вх}0}(t)$ и $x_{\text{вых}0}(t)$ в рассматриваемых задачах имеют размерности вольт или ампер, то $h(t)$ может иметь размерности проводимости, сопротивления и быть безразмерной.

Функция $h(t)$ определяется структурой и параметрами цепи и является одной из важнейших ее характеристик. Реакция заданной цепи на скачкообразное воздействие любой величины $\Delta x_{\text{вх}}$ получается умножением $h(t)$ на $\Delta x_{\text{вх}}$:

$$\Delta x_{\text{вых}}(t) = \Delta x_{\text{вх}} h(t).$$

Если скачок величиной $\Delta x_{\text{вх}}$ происходит в момент времени $t = t_0$, т.е. запаздывает на время t_0 , реакция на него запаздывает на такое же время и равна

$$\Delta x_{\text{вх}} h(t - t_0).$$

Пример 10.1. Определить переходную функцию $h(t)$ цепи, изображенной на рис. 10.2, *а*, считая входной величиной напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, а выходной величиной — ток $i(t)$. Принять $R = 10$ Ом; $C = 200 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Решение

Рассчитываем переходный процесс при подключении данной цепи к источнику ЭДС $E_0 = 1$ В в момент времени $t = 0$, как показано на рис. 10.2, *б*. Если начальные условия предполагать нулевыми (конденсатор не заряжен), то ключа, параллельного входным зажимам «а», «б» (как на рис. 10.1, *з*) можно не изображать. Решение проводим относительно тока $i_0(t)$ операторным методом. Согласно операторной модели (рис. 10.2, *в*) изображение тока $i_0(t)$, обозначенное $I_0(p)$, равно

$$I_0(p) = \frac{E_0/p}{R + (1/Cp)} = \frac{E_0/R}{p + (1/RC)} = \frac{0,1}{p + 500}.$$

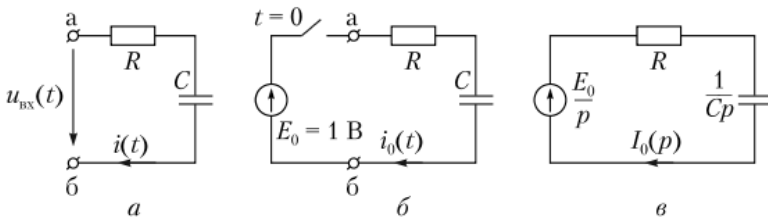


Рис. 10.2. К примеру 10.1, иллюстрирующему расчет переходной функции $h(t)$:
a — заданная цепь; *б* — схема, реализующая единичный скачок напряжения на входе заданной цепи; *в* — операторная модель после замыкания ключа

Переходя к оригиналу, для функции $i_0(t)$ получаем $i_0(t) = 0,1e^{-500t}$ (А). Поскольку в рассматриваемом случае размерность входного воздействия — вольт, размерность выходной реакции — ампер, то функция $h(t)$ имеет размерность А/В, т.е. проводимости. Переходную функцию такого вида называют переходной проводимостью. Ее принято обозначать $g(t)$.

Таким образом, искомая переходная характеристика цепи, заданной на рис. 10.2, *a*, согласно определению равна $h(t) = g(t) = 0,1e^{-500t}$ (А/В).

10.2.2. Расчет реакции линейной цепи на ступенчатое воздействие

На рис. 10.3, *a* показан график напряжения ступенчатой формы, представляющего собой совокупность трех ступеней величиной: 1) $u(0)$ при $t = 0$; 2) Δu_1 при $t = t_1$; 3) Δu_2 при $t = t_2$.

Напряжение такой формы можно получить в схеме, содержащей три источника постоянной ЭДС интенсивностью $u(0)$, Δu_1 , Δu_2 в совокупности с ключами (рис. 10.3, *б*):

- ключи K_1 и K_2 коммутируют одновременно при $t = 0$;
- ключи K_3 и K_4 — при $t = t_1$;
- ключи K_5 и K_6 — при $t = t_2$.

Обращаем внимание, что ключи K_1 , K_3 , K_5 замыкаются, а K_2 , K_4 , K_6 — размыкаются.

Схему, подобную изображенной на рис. 10.3, *б*, можно построить при любом числе ступеней.

Таким образом, воздействие напряжения ступенчатой формы можно считать результатом нескольких сдвинутых по времени подключений источников постоянной ЭДС. Аналогичный вывод справедлив, когда входное воздействие имеет размерность тока.

Режим в линейной цепи, в том числе и переходный, может быть найден по принципу наложения. При ступенчатом воздействии в соответствии

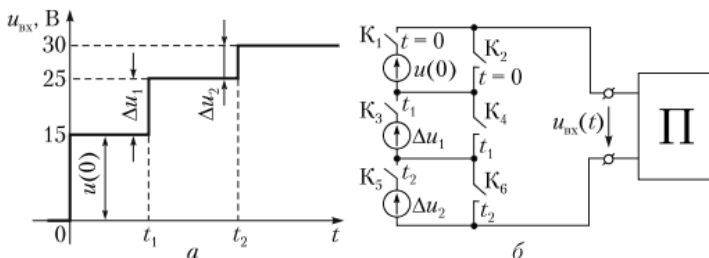


Рис. 10.3. К расчету реакции линейной цепи на ступенчатое воздействие:
a — пример напряжения ступенчатой формы; *б* — схемная реализация ступенчатого напряжения на входе пассивного двухполюсника

с принципом наложения достаточно рассчитать переходные процессы, вызываемые каждой из ступеней входного воздействия, а затем произвести их суммирование (наложение). Это особенно несложно, если известна переходная функция цепи $h(t)$.

Для иллюстрации найдем функцию тока в цепи, изображенной на рис. 10.2, *a*, из примера 10.1 при подаче на ее вход ступенчатого напряжения, заданного на рис. 10.3, *a*, при $t > t_2$ (после того как произошел скачок Δu_2).

По условию, заданное входное напряжение при $t > t_2$ состоит из трех ступеней. Поэтому соответствующая реакция содержит три слагаемых. Запишем их, пользуясь найденной в примере 10.1 переходной функцией данной цепи $h(t) = g(t) = 0,1e^{-500t}$:

$$\begin{aligned} i(t) &= u(0)g(t) + \Delta u_1 g(t - t_1) + \Delta u_2 g(t - t_2) = \\ &= 15 \cdot 0,1e^{-500t} + 10 \cdot 0,1e^{-500(t-t_1)} + 5 \cdot 0,1e^{-500(t-t_2)} \text{ (А)}. \end{aligned}$$

Записанное для $i(t)$ выражение справедливо только при $t > t_2$ (после воздействия третьего скачка).

На интервале $0 < t < t_1$ функция $i(t)$ есть отклик только на первый скачок: $i(t) = u(0)g(t)$.

На интервале $t_1 < t < t_2$ $i(t) = u(0)g(t) + \Delta u_1 g(t - t_1)$ — реакция на два скачка напряжения $u(0)$ и Δu_1 .

10.3. Применение интеграла Дюамеля при расчете реакции линейной цепи на непрерывное и кусочно-непрерывное воздействие

10.3.1. Расчет реакции линейной цепи на непрерывное воздействие

Рассмотрим случай, когда на входе линейного пассивного двухполюсника начиная с момента времени $t = 0$ создается напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, изменяющееся по некоторому непрерывному закону (рис. 10.4, *б*). Для определенности решим задачу по расчету тока в одной из ветвей двухполюсника, например на его входе ($i(t)$ на рис. 10.4, *а*). Соответствующую переходную функцию $h(t) = g(t)$ считаем известной.

Воспользуемся разработанным в математике приемом: заменим непрерывную кривую $u_{\text{вх}}(t)$ ступенчатой, как показано на рис. 10.4, *б*. Если число ступеней стремится к бесконечности, а временной интервал между ними стремится к нулю, ступенчатая кривая совпадает с непрерывной.

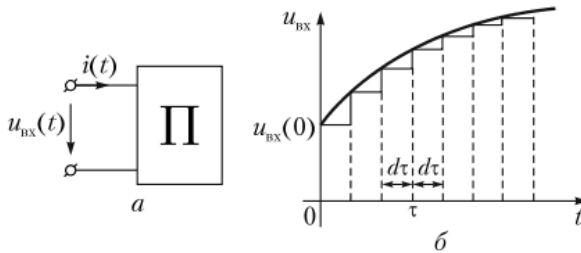


Рис. 10.4. К методике расчета переходного процесса в пассивной цепи при непрерывно изменяющемся воздействии:

a — общее изображение пассивного двухполюсника, на входе которого внешним источником задается напряжение $u_{\text{вх}}(t)$; *б* — непрерывно изменяющееся входное напряжение можно приближенно заменить ступенчатой кривой

Введем следующие обозначения:

- τ — момент возникновения элементарной ступени;
- $d\tau$ — интервал времени между двумя соседними ступенями;
- $u'_{\text{вх}}(\tau)$ — производная по времени от функции входного напряжения при $t = \tau$ (равна тангенсу угла наклона касательной к функции $u_{\text{вх}}(t)$ при $t = \tau$).

В принятых обозначениях произведение $u'_{\text{вх}}(\tau)d\tau$ — величина элементарного скачка.

Реакция рассматриваемой пассивной цепи на такое элементарное воздействие при известной переходной характеристике $h(t)$ может быть записана в виде

$$u'_{\text{вх}}(\tau) \cdot d\tau \cdot h(t - \tau), \quad (10.1)$$

где учтено, что элементарный скачок происходит в момент $t = \tau$, следовательно, и реакция запаздывает на время τ относительно начала отсчета времени. Просуммируем элементарные реакции вида (10.1) на все воздействия, которые имели место вплоть до рассматриваемого момента времени t , т.е. для всех τ , не превышающих t . За исключением реакции на первоначальный скачок $u_{\text{вх}}(0)$ такая сумма определяется интегральным выражением, а именно

$$i(t) = u_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t u'_{\text{вх}}(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (10.2)$$

Полученное выражение (10.2) принято называть **интегралом Дюамеля**.

Следует обратить внимание, что в подынтегральную функцию (10.2) время t входит в качестве параметра. Само интегрирование ведется по переменной τ . В математике подобная операция называется сверткой двух функций $u_{\text{вх}}(t)$ и $h(t)$.

Формула (10.2) распространяется на общий случай расчета реакции пассивной цепи $x_{\text{вых}}(t)$ на произвольное, непрерывно изменяющееся воздействие $x_{\text{вх}}(t)$, а именно

$$x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t x'_{\text{вх}}(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (10.3)$$

Пример 10.2. На вход RL -цепи (рис. 10.5, а) подается экспоненциальный импульс напряжения $u_{\text{вх}}(t) = 40e^{-1000t}$ (В) (рис. 10.5, б). Определить закон изменения напряжения на индуктивности $u_L(t)$, если $R = 100$ Ом; $L = 50 \cdot 10^{-3}$ Гн.

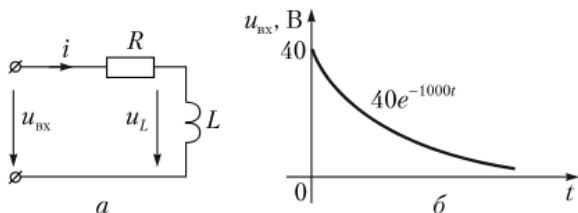


Рис. 10.5. К примеру 10.2 (расчет переходного процесса в последовательной RL -цепи при подаче на ее вход экспоненциального напряжения):

а — заданная цепь; б — график $u_{\text{вх}}(t)$

Решение

1. Расчет переходной характеристики заданной цепи ведем по схеме, изображенной на рис. 10.6, а, операторным методом. Пользуемся операторной моделью, представленной на рис. 10.6, б, согласно которой изображение напряжения на индуктивности равно

$$U_L(p) = \frac{E_0/p}{R + Lp} Lp = \frac{E_0}{p + R/L} = \frac{1}{p + 2000}.$$

Оригинал полученного изображения $u_{L0}(t) = 1e^{-2000t}$ (В).

Искомая переходная характеристика численно совпадает с найденной функцией $u_{L0}(t)$. Ее размерность равна отношению размерности самой функции $u_{L0}(t)$ (В) к размерности входного воздействия E_0 (В). Следовательно, функция $h(t)$ безразмерна: $h(t) = 1e^{-2000t}$.

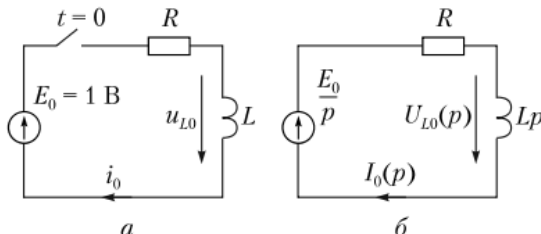


Рис. 10.6. К решению примера 10.2. Расчет переходной функции цепи, изображенной на рис. 10.5, а:

а — схема, обеспечивающая единичный скачок напряжения на входе;
б — ее операторная модель

2. Реакция на заданное экспоненциальное воздействие находится по формуле интеграла Дюамеля (10.2).

Вычислим каждое из слагаемых, входящих в (10.2).

По условию $u_{\text{вх}}(0) = 40$ В — скачок конечной величины при $t = 0$. Поэтому первое слагаемое в (10.2) равно

$$u_{\text{вх}}(0)h(t) = 40 \cdot 1 \cdot e^{-2000t}.$$

Для вычисления интегрального слагаемого в соотношении (10.2) предварительно найдем функцию $u'_{\text{вх}}(\tau)$ путем дифференцирования по времени заданного входного напряжения:

$$u'_{\text{вх}}(\tau) = \left. \frac{du_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} \right|_{t-\tau} = -1000 \cdot 40 e^{-1000\tau} \Big|_{t-\tau} = -4 \cdot 10^4 e^{-1000\tau}.$$

Тогда с учетом найденной величины $u'_{\text{вх}}(\tau)$, а также численного выражения функции $h(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t u'_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)d\tau &= \int_0^t (-4 \cdot 10^4 e^{-1000\tau}) \cdot e^{-2000(t-\tau)} d\tau = \\ &= -4 \cdot 10^4 e^{-2000t} \int_0^t e^{1000\tau} d\tau = \frac{-4 \cdot 10^4}{1000} e^{-2000t} \cdot e^{1000\tau} \Big|_0^t = \\ &= -40 e^{-2000t} \cdot (e^{1000t} - 1) = -40 e^{-1000t} + 40 e^{-2000t}. \end{aligned}$$

Выражение для напряжения на индуктивности получаем, суммируя результаты расчетов:

$$u_L(t) = 40 e^{-2000t} - 40 e^{-1000t} + 40 e^{-2000t} = 80 e^{-2000t} - 40 e^{1000t} \text{ (В)}.$$

На рис. 10.7 построен график найденной функции времени $u_L(t)$.

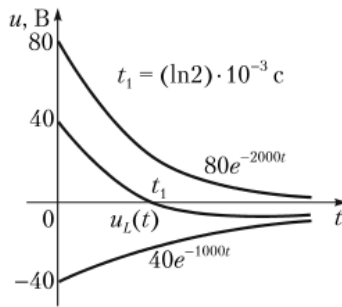


Рис. 10.7. К решению примера 10.2. График зависимости $u_L(t)$

10.3.2. Расчет реакции линейной цепи на кусочно-непрерывное воздействие

Допустим, что напряжение, подаваемое на вход линейного пассивного двухполюсника, на отдельных временных интервалах изменяется по *различным* непрерывным законам. На границах интервалов непрерывности функция $u_{\text{вх}}(t)$ претерпевает скачки. Например, напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, показанное на графике рис. 10.8, задано непрерывными функциями на трех отрезках

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{при } 0 < t < t_1, \\ u_2(t) & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Реакция (отклик) на такое воздействие записывается по формуле интеграла Дюамеля (10.2) для каждого интервала непрерывности отдельно.

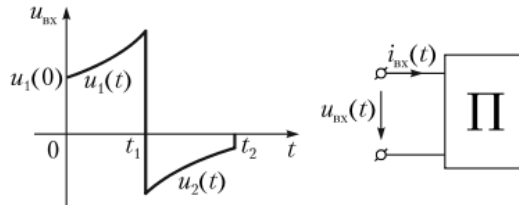


Рис. 10.8. Пример напряжения на входе пассивного двухполюсника, изменяющегося во времени по кусочно-непрерывному закону

Предположим, что искомой величиной является ток $i(t)$ некоторой ветви пассивного двухполюсника. Соответствующую переходную характеристику $h(t)$ считаем известной.

1. На временном интервале $0 < t < t_1$ ток $i(t)$ в соответствии с формулой (10.2) содержит два слагаемых:

- $u_1(0)h(t)$ — отклик на первоначальный скачок входного напряжения конечной величины $u_1(0)$;

- $\int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau$ — суммарная реакция на элементарные скачки, которые произошли не позднее рассматриваемого момента t (не превышающего t_1).

Таким образом, при $0 < t < t_1$

$$i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (10.4)$$

2. На временном интервале $t_1 < t < t_2$ функция $i(t)$ включает четыре слагаемых:

- $u(0)h(t)$ — повторяет первое слагаемое формулы (10.4);
- $\int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t - \tau)d\tau$ — отличается от второго слагаемого формулы (10.4)

верхним пределом $\tau = t_1$;

• $(u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t - t_1)$ — отклик на конечный скачок входного напряжения при $t = t_1$;

• $\int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t - \tau)d\tau$ — суммарный отклик на элементарные скачки входного напряжения, которые воздействовали начиная с t_1 до рассматриваемого момента времени t (не превышающего t_2).

Итак, при $t_1 < t < t_2$:

$$i(t) = u(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t - \tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t - t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (10.5)$$

3. На временном интервале $t_2 < t < \infty$ искомая зависимость $i(t)$ содержит пять слагаемых; из них первые три повторяют соответствующие слагаемые предыдущей реакции (10.5).

Четвертое слагаемое имеет вид $\int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t - \tau)d\tau$ — отличается от последнего интеграла формулы (10.5) верхним пределом $\tau = t_2$.

Пятое слагаемое $-u_2(t_2)h(t - t_2)$ является откликом на конечный скачок входного воздействия величиной $(0 - u_2(t_2))$ в момент $t = t_2$. Следовательно, при $t > t_2$

$$i(t) = u(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t - \tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t - t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t - \tau)d\tau - u_2(t_2)h(t - t_2).$$

10.4. Импульсная характеристика и ее применение для расчета переходных процессов при сложных воздействиях

Поведение пассивной цепи в свободном режиме при условии, что в ней предварительно обеспечен некоторый энергетический запас (заряжены конденсаторы и созданы начальные значения токов в индуктивностях), является полноценной характеристикой ее свойств.

Практически энергетический запас в цепи может быть получен путем воздействия на нее кратковременного прямоугольного импульса $u_{\text{вх}}(t)$ или тока $i_{\text{вх}}(t)$, обладающего достаточной энергией.

10.4.1. Функция Дирака (δ-функция)

Функцию Дирака обозначают $\delta(t)$ и часто называют δ-функцией. Ее математическое определение таково:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (10.6)$$

Как и функция Хевисайда $1(t)$, δ -функция относится к специальным математическим функциям и также используется в качестве типового воздействия на пассивную цепь.

Согласно определению δ -функция представляет собой прямоугольный импульс нулевой длительности, бесконечно-большой высоты и площадью, равной единице. К функции вида (10.6) можно прийти предельным переходом от реального прямоугольного импульса длительностью $t_{\text{и}}$, высотой A_m , удовлетворяющими условию $A_m t_{\text{и}} = 1$. Если устремить $t_{\text{и}}$ к нулю, сохраняя его площадь равной единице, то высота импульса A_m становится бесконечно большой.

Если воспользоваться ранее введенными понятиями моментов времени $t = 0_-$ и $t = 0_+$, то можно считать, что момент времени $t = 0_-$ непосредственно предшествует всплеску δ -функции, а $t = 0_+$ непосредственно следует за мгновением всплеска. Момент времени $t = 0$, когда δ -функция принимает бесконечно большое значение, лежит между $t = 0_-$ и $t = 0_+$.

Тогда для интеграла в системе (10.6) справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{t=0_-}^{t=0_+} \delta(t) dt = 1.$$

Функция Дирака $\delta(t)$ может рассматриваться как производная по времени от функции Хевисайда $1(t)$:

$$\delta(t) = d1(t)/dt. \quad (10.7)$$

Если учесть, что $t = 0_-$ предшествует единичному скачку функции $1(t)$, а $t = 0_+$ соответствует ее послескачковому значению, то дифференцирование в формуле (10.7) ведется на временном интервале от $t = 0_-$ до $t = \infty$.

10.4.2. Понятие импульсной характеристики

Импульсной характеристикой пассивной цепи называется функция времени, численно равная ее переходной реакции на воздействие вида $x_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$ при нулевых начальных условиях. Размерность импульсной характеристики равна отношению размерности выходной величины к размерности входной величины.

Кроме общего обозначения $h_{\delta}(t)$ для импульсной характеристики применяют следующие обозначения: $g_{\delta}(t)$ — импульсная переходная проводимость; $Z_{\delta}(t)$ — импульсное переходное сопротивление.

Отметим главные особенности реакции пассивной цепи на воздействие $x_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$.

Благодаря бесконечно большой высоте импульса $\delta(t)$ в течение первого мгновения $t = 0$ в реагирующей цепи создается некоторый энергетический запас (конденсаторы успевают зарядиться, в индуктивностях появляется отличный от нуля ток).

По окончании δ -импульса, т.е. при $t > 0_+$, реагирующая цепь находится в свободном режиме.

Поэтому *за исключением первого мгновения $t = 0$ импульсная характеристика является свободной реакцией цепи.*

10.4.3. Связь импульсной характеристики $h_{\delta}(t)$ с переходной функцией $h(t)$

Напомним, что обе функции времени $h(t)$ и $h_{\delta}(t)$ численно равны переходным реакциям пассивной цепи: $h(t)$ — на воздействие $x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$; $h_{\delta}(t)$ — на воздействие $x_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$. На временном интервале $0_- < t < \infty$ $h_{\delta}(t)$ и $h(t)$ связаны соотношением

$$h_{\delta}(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Если переходная функция $h(t)$ в начальный момент времени $t = 0$ претерпевает скачок, т.е. отлична от нуля при $t = 0$, то импульсная характеристика $h_{\delta}(t)$ при $t = 0$ имеет всплеск вида $\delta(t)$. В этом случае имеем уравнение

$$h_{\delta}(t) = h(0_+) \delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}, \quad (10.8)$$

где дифференцирование ведется начиная с мгновения $t = 0_+$. В случае, когда начальное значение $h(t)$ равно нулю, импульсная характеристика $h_{\delta}(t)$ не содержит δ -функции.

Соотношение (10.8) позволяет рассчитать импульсную характеристику пассивной цепи по предварительно найденной (или заданной) переходной функции.

Пример 10.3. Определить импульсную характеристику последовательной RC -цепи (рис. 10.9, а). Входным воздействием считать напряжение $u_{\text{вх}}(t)$. В качестве реакции принять: а) напряжение на конденсаторе $u_c(t)$; б) ток в цепи $i(t)$.

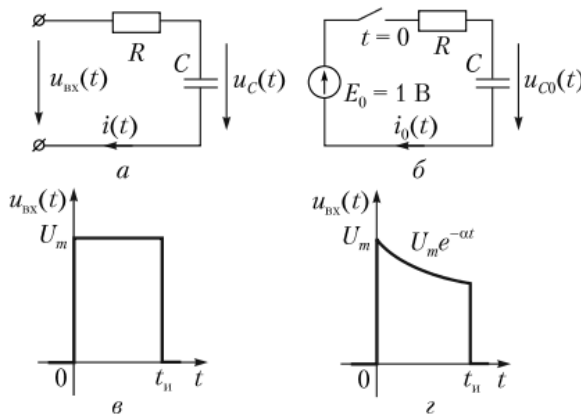


Рис. 10.9. К примерам 10.3, 10.4 и 10.5:

а — заданная пассивная цепь; б — схема для расчета переходных функций; в — график входного напряжения для примера 10.4; з — график входного воздействия для примера 10.5

Решение

1. Расчет переходных характеристик.

Обозначим переходные характеристики: для случая (а) $h_1(t)$; для случая (б) $h_2(t)$.

Обе функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ характеризуют один и тот же переходный процесс, возникающий при подключении заданной цепи к источнику постоянной ЭДС $E = 1$ В, т.е. при единичном скачке входного напряжения (рис. 10.9, б).

После замыкания ключа в цепи, изображенной на рис. 10.9, б, напряжение на конденсаторе $u_{c0}(t)$ и ток $i_0(t)$ определяются выражениями

$$u_{c0}(t) = E_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \text{ (В);}$$

$$i_0(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ (А).}$$

Переходные функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ численно равны найденным функциям $u_{c0}(t)$ и $i_0(t)$ соответственно: $h_1(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$ (безразмерна); $h_2(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ (А/В).

2. Расчет импульсных характеристик.

Случай а) ($x_{\text{вых}}(t) = u_c(t)$). Импульсную характеристику для этого случая обозначаем $h_{\delta 1}(t)$. Ее находим по переходной функции $h_1(t)$, пользуясь соотношением (10.8), так как $h_1(0) = 0$:

$$h_{\delta 1}(t) = \frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Случай б) ($x_{\text{вых}}(t) = i(t)$). Импульсную характеристику $h_{\delta 2}(t)$ получаем по переходной функции $h_2(t)$ из соотношения (10.8). Так как начальное значение $h_2(t)$ отлично от нуля, то функция $h_{\delta 2}(t)$ в первое мгновение ($t = 0$) имеет δ -образный всплеск:

$$h_{\delta 2}(t) = h_2(0)\delta(t) + \frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

10.4.4. Разновидность интеграла Дюамеля, содержащая импульсную характеристику

По известной импульсной характеристике пассивной цепи можно рассчитать ее реакцию $x_{\text{вых}}(t)$ на произвольное воздействие $x_{\text{вх}}(t)$. При этом пользуются одной из разновидностей интеграла свертки, в которой фигурирует импульсная характеристика $h_{\delta}(t) = dh(t)/dt$:

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_0^t x_{\text{вх}}(\tau) h_{\delta}(t - \tau) d\tau. \quad (10.9)$$

В отличие от интеграла Дюамеля (10.3) где входное воздействие представлено его производной $x'_{\text{вх}}(\tau)$, в формуле (10.9) присутствует сама функция $x_{\text{вх}}(t)$ при $t = \tau$.

Применение формулы (10.9) показано в следующем примере.

Пример 10.4. Определить напряжение на конденсаторе $u_c(t)$ в цепи, изображенной на рис. 10.9, а, при подаче на ее вход прямоугольного импульса напряжения (рис. 10.9, в) высотой $U_m = 10$ В, длительностью $t_{\text{и}} = 2$ мс. Принять $R = 200$ Ом, $C = 10 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Решение

Воспользуемся импульсной характеристикой, найденной для заданной цепи в примере 10.3 (случай а):

$$h_{\delta 1}(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = 500 e^{-500t}.$$

Из формулы (10.9) следует, что искомое напряжение на конденсаторе при $t > t_{\text{и}}$ равно

$$u_C(t) = \int_0^{t_n} U_m h_{\delta 1}(t - \tau) d\tau = \int_0^{t_n} 10 \cdot 500 e^{-500(t-\tau)} d\tau = 5 \cdot 10^3 e^{-500t} \cdot \int_0^{t_n} e^{500\tau} d\tau =$$

$$= \left[5 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{500} e^{-500t} \right] e^{500\tau} \Big|_0^{t_n} = 10 e^{-500t} (e^{500t_n} - 1) = 10 e^{-500t} (e^1 - 1) \approx 17,3 e^{-500t} \text{ (В)}.$$

Следует принять во внимание, что полученный результат справедлив при $t > t_n$.

Пример 10.5. В условиях примера 10.4 определить напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, если входное напряжение имеет форму экспоненциального импульса (рис. 10.9, з):

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > t_n, \\ 10 e^{-250t} & \text{при } 0 < t < t_n, \end{cases}$$

где $t_n = 2 \cdot 10^{-3}$ с.

Решение

При заданном входном воздействии по формуле (10.9) реакция на весь импульс ($t > t_n$) имеет вид

$$u_C(t) = \int_0^{t_n} u_{\text{вх}}(\tau) h_{\delta}(t - \tau) d\tau = \int_0^{t_n} 10 e^{-250\tau} \cdot 500 e^{-500(t-\tau)} d\tau = 5 \cdot 10^3 e^{-500t} \cdot \int_0^{t_n} e^{-250\tau} \cdot e^{500\tau} d\tau =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^3}{250} e^{-500t} \cdot e^{250\tau} \Big|_0^{t_n} = 20 e^{-500t} (e^{0,5} - 1) \approx 13,2 e^{-500t} \text{ (В)}.$$

Найденная функция $u_C(t)$ справедлива при $t > t_n$ и является свободной реакцией рассматриваемой цепи на заданное импульсное воздействие. Она определяется свойствами реагирующей цепи и энергетическим запасом, созданным внешним воздействием, но не содержит составляющей вида Ae^{-250t} , обусловленной входным экспоненциальным импульсом.

На временном интервале $0 < t < t_n$ функция $u_C(t)$ включает две экспоненциальных составляющих вида $A_1 e^{-500t}$ и $A_2 e^{-250t}$. В этом можно убедиться, если верхним пределом в формуле (10.9) взять текущее время $t < t_n$.

10.4.5. Изображения по Лапласу переходной $h(t)$ и импульсной $h_{\delta}(t)$ характеристик. Их связь с передаточной функцией $K(p)$

Переходная и импульсная характеристики определяют свойства пассивной цепи во временной области и численно равны ее откликам: $h(t)$ — на воздействие $x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$, $h_{\delta}(t)$ — на воздействие $x_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$.

Обозначим изображения по Лапласу:

$$1(t) \stackrel{.}{=} 1(p); \quad \delta(t) \stackrel{.}{=} \delta(p); \quad h(t) \stackrel{.}{=} h(p); \quad h_{\delta}(t) \stackrel{.}{=} h_{\delta}(p).$$

Тогда из соотношения $X_{\text{вых}}(p) = X_{\text{вх}}(p)K(p)$ следуют равенства

$$h(p) = 1(p)K(p); \quad h_{\delta}(p) = \delta(p)K(p). \quad (10.10)$$

Как известно, изображения функции Хевисайда $1(t)$ и функции Дирака $\delta(t)$ равны

$$1(t) \stackrel{.}{=} 1/p; \quad \delta(t) \stackrel{.}{=} 1.$$

Тогда из соотношений (10.10) получаем

$$h(p) = K(p)/p; \quad h_{\delta}(p) = K(p). \quad (10.11)$$

Таким образом:

1) переходная характеристика $h(t)$ является оригиналом от изображения $K(p)/p$:

$$h(t) \stackrel{*}{=} K(p)/p; \quad (10.12)$$

2) импульсная характеристика $h_{\delta}(t)$ есть оригинал от передаточной функции $K(p)$:

$$h_{\delta}(t) \stackrel{*}{=} K(p). \quad (10.13)$$

На соотношениях (10.12) и (10.13) основан очень простой и весьма распространенный способ расчета переходной и импульсной характеристик пассивной цепи по известной передаточной функции.

Пример 10.6. Получить переходную и импульсную характеристики цепи по ее передаточной функции

$$K(p) = \frac{10}{p + 2000}. \quad (10.14)$$

Решение

Расчет переходной характеристики $h(t)$. Согласно (10.11) и (10.14) изображение функции $h(t)$ равно

$$\frac{K(p)}{p} = \frac{10}{p(p + 2000)}.$$

Его оригинал находим по таблице соответствия (см. табл. 9.1):

$$h(t) = \frac{1}{200}(1 - e^{-2000t}).$$

Импульсная характеристика $h_{\delta}(t)$ является оригиналом изображения (10.14):

$$h_{\delta}(t) \stackrel{*}{=} K(p) = 10/(p + 2000).$$

Следовательно, $h_{\delta}(t) = 10e^{-2000t}$.

10.5. Спектральный метод расчета переходных процессов

Спектральный метод является аналогом рассмотренного в параграфе 3.8 метода расчета периодических несинусоидальных режимов. Метод основан на представлении входного воздействия в виде совокупности синусоидальных составляющих.

10.5.1. Вещественная и комплексная формы ряда Фурье для периодической функции времени

Периодическая функция $f(t)$ с периодом T , удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена следующей суммой:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (10.15)$$

где A_0 — постоянная составляющая; A_{km} — амплитуда k -й гармоники; $\omega = 2\pi/T$ — частота основной гармонической составляющей; ψ_k — начальная фаза синусоидальной составляющей с частотой $k\omega$.

Отметим особенности гармонического разложения (10.15).

1. Все слагаемые суммы (10.15) являются синусоидальными функциями времени с частотой, кратной основной частоте $\omega = 2\pi/T$, определяемой периодом T функции $f(t)$; другими словами, периодическая функция времени имеет дискретный спектр.

2. Постоянная составляющая A_0 и амплитуды синусоидальных слагаемых являются конечными величинами.

Каждой из синусоидальных составляющих в сумме (10.15) соответствует вращающийся вектор на комплексной плоскости:

$$A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \rightarrow \dot{A}_{km} e^{jk\omega t},$$

где $\dot{A}_{km} = A_{km} e^{j\psi_k}$ — комплексная амплитуда k -й гармоники (неподвижный вектор): $e^{jk\omega t}$ — вращающийся множитель. Связь между синусоидальной функцией времени $A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ и изображающим ее вращающимся вектором подчиняется соотношению

$$A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = \text{Jm}\{\dot{A}_{km} e^{jk\omega t}\}, \quad (10.16)$$

в котором $\text{Jm}\{\}$ — знак операции взятия мнимой части комплекса. С учетом равенства (10.16) ряд (10.15) принимает вид

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Jm}\{\dot{A}_{km} e^{jk\omega t}\}. \quad (10.17)$$

Если формально рассмотреть область отрицательных частот, соответствующих $k = -1, -2, -3, \dots$, то из формулы (10.17) можно исключить операцию взятия мнимой части комплекса, а именно

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \dot{A}_{km} e^{jk\omega t}, \quad (10.18)$$

где k принимает значения всех целых чисел за исключением нуля.

Выражение (10.18) принято называть **комплексной формой ряда Фурье**.

10.5.2. Спектральное представление непериодического сигнала.

Понятие спектральной плотности

Непериодическая функция времени, удовлетворяющая условиям Дирихле и ограниченная неравенством $f(t) < Me^{\alpha t}$, где $M > 0$, $\alpha > 0$, также может быть представлена совокупностью гармонических составляющих. В отличие от разложения периодической функции она включает в себя гармоники всех частот от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Поэтому две соседние составляющие отличаются по частоте на бесконечно малую величину, что свидетельствует о непрерывном характере спектра.

Амплитуды отдельных синусоидальных составляющих в спектре непериодического сигнала во всем диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ являются бесконечно-малыми величинами. Однако их весовое участие различно и определяется комплексной функцией частоты $F(j\omega)$, называемой **спектральной плотностью**. Она связана с функцией $f(t)$ соотношением

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (10.19)$$

которое называется **прямым преобразованием Фурье** или **интегралом Фурье**.

Произведение $F(j\omega)d\omega$ представляет бесконечно малую комплексную амплитуду гармоник частотой ω в спектральном разложении функции $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.20)$$

Выражение (10.20) называется **обратным преобразованием Фурье**. Его можно рассматривать как предельный случай (при $T \rightarrow \infty$) ряда Фурье (10.18). Назовем главные особенности спектрального представления непериодической функции:

- непериодическая функция времени $f(t)$ обладает непрерывным спектром;
- отдельные гармонические составляющие бесконечно малы;
- весовое участие гармоник частотой ω определяется комплексной функцией спектральной плотности $F(j\omega)$, которая связана с функцией $f(t)$ преобразованием Фурье.

10.5.3. Понятие амплитудного и фазового спектров сигнала

Запишем комплексную функцию спектральной плотности $F(j\omega)$ в показательной форме:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\psi(\omega)},$$

где $|F(j\omega)|$ — модуль комплекса $F(j\omega)$, или амплитудный спектр сигнала; его обычно обозначают $F(\omega)$; $\psi(\omega)$ — аргумент комплекса $F(j\omega)$, или фазовый спектр сигнала.

Поскольку между функцией времени и ее спектральной плотностью существует однозначная связь, определяемая прямым (10.19) и обратным (10.20) преобразованиями Фурье, то сигнал может быть задан не только временной зависимостью, но и его амплитудным и фазовым спектрами.

10.5.4. Связь преобразования Фурье с прямым преобразованием Лапласа

Рассмотрим случай функции времени $f(t)$, равной нулю при $t < 0$. Для такой функции формула прямого преобразования Фурье (10.19) имеет вид

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (10.21)$$

Подстановка $j\omega \rightarrow p$ превращает формулу (10.21) в прямое преобразование Лапласа:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{j\omega \rightarrow p} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p).$$

Полученный результат позволяет для функции времени, равной нулю при $t < 0$, находить ее спектральную плотность $F(j\omega)$ по известному преобразованию Лапласа:

$$f(t) \stackrel{*}{=} F(p) \Big|_{p \rightarrow j\omega} = F(j\omega).$$

Это особенно удобно в тех случаях, когда изображение функции $f(t)$ по Лапласу определяется по таблицам соответствия.

Обратная задача (нахождение функции времени $f(t)$ по ее спектральной плотности $F(j\omega)$) также может быть решена через преобразование Лапласа:

$$F(j\omega)|_{j\omega \rightarrow p} = F(p) \stackrel{*}{=} f(t).$$

Пример 10.7 (спектр экспоненциального импульса). Найдем амплитудный и фазовый спектры сигнала (рис. 10.10, *a*), аналитически определяемого следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ Ae^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

где A и α — положительные вещественные числа.

Решение

Записываем изображение по Лапласу функции $f(t)$, учитывая ее табличный вид:

$$F(p) = A/(p + \alpha).$$

В этом изображении производим подстановку $p \rightarrow j\omega$; получаем комплексную функцию спектральной плотности

$$F(j\omega) = A/(j\omega + \alpha).$$

Полученное комплексное выражение приводим к показательной форме записи, воспользовавшись соотношением

$$\alpha + j\omega = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} e^{j \arctg \frac{\omega}{\alpha}}.$$

Получаем

$$F(j\omega) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\alpha}}.$$

Согласно этому равенству для амплитудного и фазового спектров заданной функции справедливы выражения

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}; \quad \psi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\alpha}.$$

Графики зависимостей $F(\omega)$ и $\psi(\omega)$ приведены на рис. 10.10, *б* и *в* соответственно.

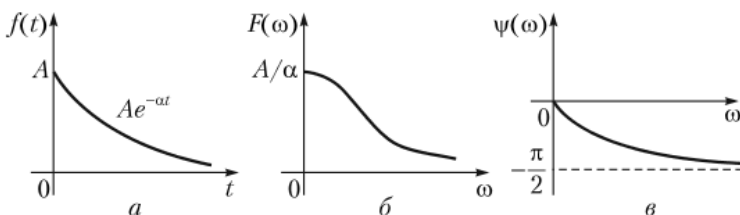


Рис. 10.10. К примеру 10.7. Спектр экспоненциального импульса:

a — график функции $f(t) = Ae^{-\alpha t}1(t)$; *б* — амплитудный спектр; *в* — фазовый спектр

Пример 10.8 (спектр прямоугольного импульса). Определим амплитудный $F(\omega)$ и фазовый $\psi(\omega)$ спектры прямоугольного импульса (рис. 10.11, *a*) высотой A , длительностью t_n . Его аналитическое выражение можно записать при помощи функции Хевисайда:

$$f(t) = A \cdot 1(t) + A \cdot 1(t - t_n).$$

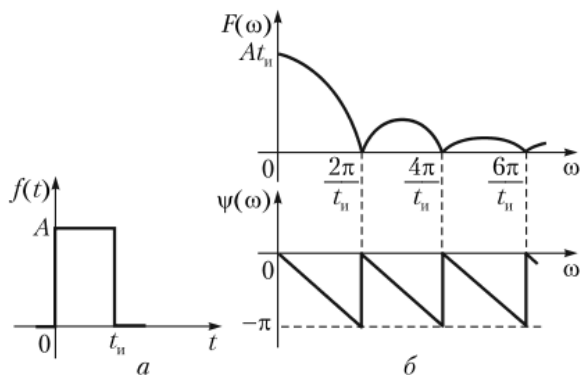


Рис. 10.11. К примеру 10.8. Спектр прямоугольного импульса:

a – график функции $f(t) = A \cdot 1(t) + A \cdot 1(t - t_n)$; δ – амплитудный спектр;
 ψ – фазовый спектр

Решение

Переходим от заданной функции времени к ее изображению по Лапласу с учетом теоремы запаздывания:

$$F(p) = A/p - (A/p)e^{-pt_n}.$$

После подстановки $p \rightarrow j\omega$ приходим к выражению для комплексной функции спектральной плотности

$$F(j\omega) = \frac{A}{j\omega} - \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t_n} = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_n}).$$

Приводим данный комплекс к показательной форме записи:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{A}{j\omega} \cdot \frac{2}{2} \cdot (e^{j\frac{\omega t_n}{2}} e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} - e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}) = \\ &= \frac{2A}{\omega} e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} \frac{e^{j\frac{\omega t_n}{2}} - e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}}{2j} = \left(\frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} \right) e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}. \end{aligned}$$

Модуль полученного комплекса представляет амплитудный спектр заданного прямоугольного импульса

$$F(\omega) = \left| \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} \right|.$$

Аргумент комплексной функции $F(j\omega)$, определяющий искомый фазовый спектр $\psi(\omega)$, записываем с учетом периодического (с периодом $2\pi/t_n$) изменения знака синуса.

Для зависимости $\psi(\omega)$ это равносильно скачкообразному приращению величины 180° на частотах $2/t_n, 4/t_n$ и т.д., поэтому выполняются следующие равенства:

- при $0 \leq \omega < \frac{2\pi}{t_n}$ $\psi(\omega) = -\frac{\omega t_n}{2}$;
- при $\frac{2\pi}{t_n} \leq \omega < \frac{4\pi}{t_n}$ $\psi(\omega) = -\frac{\omega t_n}{2} + \pi$ и т.д.

Графики амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса по полученным выражениям построены на рис. 10.11, δ и ψ соответственно.

Из полученных соотношений следует, что с уменьшением длительности импульса t_n его спектр растягивается по оси частот.

10.6. Связь между энергией непериодического сигнала и его спектром

10.6.1. Понятие энергии импульса

Под импульсом принято понимать функцию времени $f(t)$, сосредоточенную (существенно отличную от нуля) на ограниченном отрезке времени и равную нулю (хотя бы приближенно) вне этого временного интервала (рис. 10.12, а).

Допустим, что функция $f(t)$, показанная на рис. 10.12, а (равная нулю при $t < 0$), является током $i(t)$ в резисторе R с сопротивлением в 1 Ом (рис. 10.12, б).

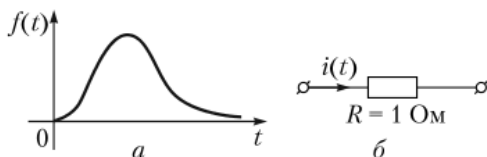


Рис. 10.12. К понятию энергии импульса:

а — функция времени $f(t)$, имеющая форму импульса; б — участок цепи, содержащий резистор $R = 1$ Ом с током $i(t)$, равным $f(t)$

Как известно, при протекании тока $i(t)$ в резисторе происходит преобразование электрической энергии в тепловую. Быстрота такого преобразования определяется мгновенной мощностью $p(t) = i^2(t)R$. Размерность функции $p(t)$ равна $[A \cdot V]$.

Количество энергии, которое перейдет в тепло на всем интервале времени $0 < t < \infty$, выражается интегралом от мгновенной мощности:

$$w = \int_0^{\infty} p(t) dt = \int_0^{\infty} i^2 R dt$$

(размерность — $[A \cdot V \cdot c]$). Если учесть, что сопротивление резистора взято равным $R = 1$ Ом, то получим такие численные равенства:

- для мгновенной мощности в резисторе $p(t) = i^2(t)$;
- для полной энергии, превращенной в тепло,

$$w = \int_0^{\infty} i^2(t) dt.$$

Именно на изложенном смысле основываются принятые определения для таких понятий, как мощность и энергия импульса: $f(t)$ — импульс; $f^2(t)$ — мощность импульса; $\int_0^{\infty} f^2(t) dt$ — энергия импульса.

Пример 10.9. Определить энергию прямоугольного импульса $f(t)$ высотой A_m , длительностью t_n , показанного на рис. 10.11, а.

Решение

В соответствии с определением энергия заданного импульса равна

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{t_n} A_m^2 dt = A_m^2 \cdot t_n.$$

10.6.2. Равенство Парсеваля. Спектральная плотность энергии

Так как непериодический сигнал восстанавливается по его спектру, то и энергия этого сигнала может быть найдена по известной частотной за-

висимости $F(j\omega)$. Математически связь между энергией непериодической функции времени $f(t)$ и ее спектром $F(j\omega)$ выражается **равенством Парсеваля** (или **теоремой Рейли**):

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (10.22)$$

Согласно формуле (10.22) энергия импульса может быть вычислена как во временной области по функции $f^2(t)$, характеризующей его мощность, так и по частотной зависимости квадрата модуля спектральной плотности $|F(j\omega)|^2$. Геометрический смысл равенства (10.22) проиллюстрирован при помощи рис. 10.13, на котором построены графики: на рис. 10.13, *a* — функция времени $f^2(t)$; на рис. 10.13, *б* — функция частоты

$$\frac{|F(j\omega)|^2}{\pi} = \frac{F^2(\omega)}{\pi}.$$

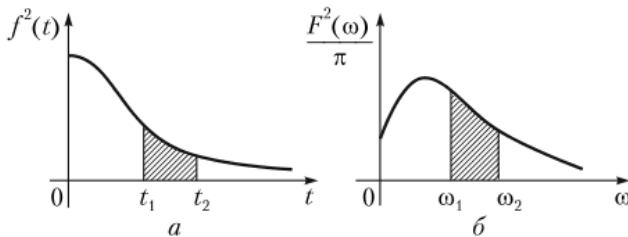


Рис. 10.13. К равенству Парсеваля, согласно которому энергия импульса может быть найдена как по временной зависимости $f^2(t)$, так и по частотной $F^2(\omega)/\pi$
a — график функции $f^2(t)$; *б* — график функции $F^2(\omega)/\pi$

Из уравнения (10.22) следует:

- площади под обеими кривыми (рис. 10.13, *a* и *б*) одинаковы и равны энергии импульса;
- функция $f^2(t)$ определяет распределение энергии импульса во времени; площадь заштрихованного столба на рис. 10.13, *a* равна его энергии на временном интервале $[t_1; t_2]$;
- частотная зависимость $F^2(\omega)/\pi$ характеризует распределение энергии импульса по частоте; площадь заштрихованного столба на рис. 10.13, *б* равна энергии, которую несут гармонические составляющие, принадлежащие частотному диапазону $[\omega_1; \omega_2]$.

В соответствии со сказанным функцию $F^2(\omega)/\pi$ можно рассматривать как частотную или спектральную плотность энергии импульса. Она также называется **энергетическим спектром сигнала**.

Выводы. 1. Энергия импульса может быть найдена по амплитудному спектру сигнала при помощи соотношения

$$W = \int_0^{\infty} \frac{F^2(\omega)}{\pi} d\omega.$$

2. Функция квадрата модуля спектральной плотности, уменьшенная в π раз — $\frac{|F(j\omega)|^2}{\pi} = \frac{F^2(\omega)}{\pi}$, характеризует распределение энергии импульса по частоте и называется **спектральной плотностью энергии**.

10.6.3. Понятие ширины спектра

Под шириной спектра непериодического сигнала понимают диапазон частот, которые несут основную часть его энергии. Например, для прямоугольного импульса (см. рис. 10.11, *а, б*) можно показать, что 90% его полной энергии сосредоточено в интервале частот $0 \leq \omega \leq 2\pi/t_n$, соответствующих первому «лепестку» графика $F^2(\omega)$ на рис. 10.11, *б*.

Пример 10.10. Определить энергию импульса

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ U_0 e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

двумя способами: 1) по заданной временной зависимости $f(t)$; 2) по его амплитудному спектру.

Решение

1. Расчет во временной области. Энергия импульса (10.22) по определению равна

$$W = \int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} U_0^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{U_0^2}{(-2\alpha)} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{U_0^2}{2\alpha} (0 - 1) = \frac{U_0^2}{2\alpha}.$$

2. Расчет по амплитудному спектру.

Амплитудный спектр импульса, подобного заданному, был рассчитан в примере 10.7 и равен

$$F(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Тогда, пользуясь уравнением Парсеваля (10.22) для искомой энергии, получаем

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{U_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \right)^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{U_0^2}{\pi\alpha} \arctg \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{U_0^2}{\pi\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{U_0^2}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, вычисление энергии импульса по временной зависимости и по его амплитудному спектру дали один и тот же результат.

10.7. Связь между спектрами входного и выходного сигналов для линейной пассивной цепи

Рассмотрим случай, когда на входе линейной пассивной цепи внешним источником начиная с момента времени $t = 0$ создаются напряжение $u_{\text{вх}}(t)$ или ток $i_{\text{вх}}(t)$, изменяющиеся по непериодическому закону. Такое внешнее воздействие обозначим $x_{\text{вх}}(t)$. Искомую реакцию (ток некоторой ветви или напряжение на одном из участков цепи) обозначим $x_{\text{вых}}(t)$.

Для большей наглядности заданный случай представлен на рис. 10.14, *а* в виде пассивного четырехполюсника с двумя парами зажимов, соответствующих входу цепи и ее выходному участку.

Каждой из непериодических функций времени $x_{\text{вх}}(t)$ и $x_{\text{вых}}(t)$ соответствует своя спектральная плотность, связанная с ней прямым преобразованием Фурье:

$$x_{\text{вх}}(t) \rightarrow F_{\text{вх}}(j\omega) = \int_0^{\infty} x_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt; \quad x_{\text{вых}}(t) \rightarrow F_{\text{вых}}(j\omega) = \int_0^{\infty} x_{\text{вых}}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

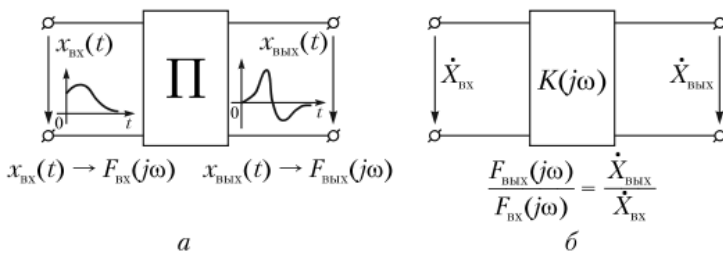


Рис. 10.14. К выводу соотношения между спектральными плотностями входного и выходного сигналов:

a — линейная пассивная цепь при произвольном непериодическом воздействии $x_{\text{вх}}(t)$;
б — ее символическая модель ($\dot{X}_{\text{вх}}$ и $\dot{X}_{\text{вых}}$ — комплексные амплитуды воздействия и реакции)

В спектрах входного и выходного сигналов составляющие одной и той же частоты ω имеют бесконечно малую комплексную амплитуду: $F_{\text{вх}}(j\omega)d\omega$ — комплексная амплитуда гармоники с частотой ω в спектре воздействия; $F_{\text{вых}}(j\omega)d\omega$ — комплексная амплитуда синусоидальной составляющей той же частоты в спектре реакции (в линейной цепи возникает только при наличии на входе гармоники этой частоты).

Рассмотрим заданную пассивную цепь (см. рис. 10.14, *a*) при синусоидальном воздействии на входе в установившемся режиме. Для такого режима можно построить ее символическую модель; она показана на рис. 10.14, *б*, где $\dot{X}_{\text{вх}}$ — комплексная амплитуда синусоидального воздействия; $\dot{X}_{\text{вых}}$ — комплексная амплитуда синусоидальной реакции. Их отношение представляет собой ранее введенный (см. параграф 7.4) комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$:

$$K(j\omega) = \dot{X}_{\text{вых}} / \dot{X}_{\text{вх}} \quad (10.23)$$

Напомним, что это параметр цепи, зависящий от частоты, но не зависящий от амплитуды и фазы входного воздействия. Поэтому соотношение (10.23) справедливо и для бесконечно малых комплексных амплитуд гармонических составляющих с частотой ω в спектрах входного и выходного сигналов, т.е.

$$\frac{F_{\text{вых}}(j\omega)d\omega}{F_{\text{вх}}(j\omega)d\omega} = K(j\omega),$$

или

$$F_{\text{вых}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega). \quad (10.24)$$

Вывод. Спектральная плотность выходного сигнала (реакции) $F_{\text{вых}}(j\omega)$ равна произведению спектральной плотности входного сигнала (воздействия) $F_{\text{вх}}(j\omega)$ на комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$.

Соотношение (10.24), выражающее связь между спектрами входного и выходного сигналов в линейной цепи, иногда называют **законом Ома для спектров**. Оно положено в основу спектрального метода расчета переходных процессов.

10.8. Порядок расчета переходных процессов спектральным методом

Назовем основные этапы спектрального метода применительно к задачам по расчету токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$, возникающих в линейной пас-

сивной цепи под воздействием напряжений и токов непериодического вида (при нулевых начальных условиях).

1. По заданной функции времени входного воздействия $x_{\text{вх}}(t)$ определяем ее спектральную плотность $F_{\text{вх}}(j\omega)$. Для этого пользуемся либо формулой (10.19) прямого преобразования Фурье, либо методикой нахождения спектра через изображение по Лапласу.

2. Вычисляем комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$ данной цепи, рассматривая ее в установившемся синусоидальном режиме. Методика и примеры расчета $K(j\omega)$ даны в параграфе 7.5.

3. Находим спектральную плотность выходного сигнала (реакции) $F_{\text{вых}}(j\omega)$, используя соотношение (10.24):

$$F_{\text{вых}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega).$$

4. По найденной функции спектральной плотности реакции $F_{\text{вых}}(j\omega)$ определяем соответствующую функцию времени $x_{\text{вых}}(t)$. Этот шаг может выполняться по формуле обратного преобразования Фурье (10.20) или, если это возможно, через преобразование Лапласа с применением таблиц соответствия.

Изложенный порядок проиллюстрирован в следующем примере.

Пример 10.11. На вход цепи, изображенной на рис. 10.15, а, в момент времени $t = 0$ подается напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, показанное на рис. 10.15, б и аналитически определяемое следующим образом:

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ U_0 + kt = 20 + 10^4 \cdot t \text{ (В)} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Параметры элементов цепи таковы $R = 100 \text{ Ом}$; $C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$. Определить напряжение на резисторе $u_R(t)$.

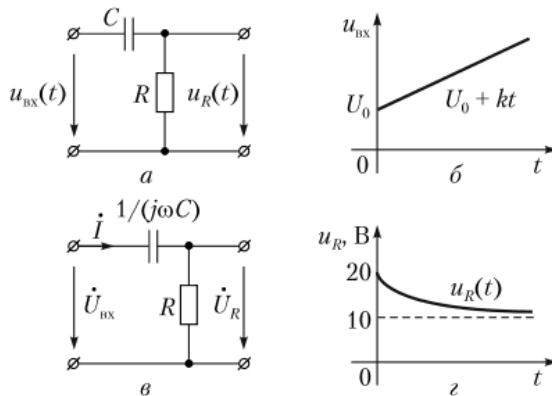


Рис. 10.15. К примеру 10.11, иллюстрирующему спектральный метод расчета переходного процесса в линейной цепи при непериодическом воздействии:

а – заданная цепь; б – график входного воздействия; в – символическая модель цепи; з – график функции $u_R(t)$

Решение

1. Спектр входного напряжения $u_{\text{вх}}(t) = U_0 + kt$ получаем через преобразование по Лапласу, так как функция $u_{\text{вх}}(t)$ имеет табличный вид:

$$u_{\text{вх}}(t) \overset{\cdot}{=} U_{\text{вх}}(p) = \frac{U_0}{p} + \frac{k}{p^2} = \frac{20}{p} + \frac{10^4}{p^2}.$$

Тогда

$$U_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U_0}{j\omega} + \frac{k}{(j\omega)^2} = \frac{U_0 j\omega + k}{(j\omega)^2} = \frac{20j\omega + 10^4}{(j\omega)^2}. \quad (10.25)$$

2. С целью нахождения комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ заданной цепи рассматриваем ее в установившемся синусоидальном режиме. Поэтому переходим к ее символической модели, показанной на рис. 10.15, в. Учитываем, что входное напряжение подается на два последовательных элемента с комплексными сопротивлениями $Z_C = 1/(j\omega C)$ и $Z_R = R$, а выходной величиной является напряжение на резистивном элементе Z_R :

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_R}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{iR}{i\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{j\omega}{j\omega + 1000}. \quad (10.26)$$

3. Находим спектральную плотность искомой величины, т.е. напряжения на резисторе, перемножая соотношения (10.25) и (10.26):

$$U_R(j\omega) = U_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega) = \frac{20j\omega + 10^4}{(j\omega)^2} \cdot \frac{j\omega}{j\omega + 1000} = \frac{20j\omega + 10^4}{j\omega(j\omega + 1000)}.$$

4. По найденной функции спектральной плотности реакции $U_R(j\omega)$ определяем функцию времени $u_R(t)$. С этой целью в выражении для найденной спектральной плотности производим подстановку $j\omega \rightarrow p$ и получаем изображение по Лапласу искомой величины, а именно

$$U_R(p) = \frac{20p + 10^4}{p(p + 1000)} = \frac{20}{p + 1000} + \frac{10^4}{p(p + 1000)}.$$

Пользуясь таблицами соответствия по Лапласу, переходим к оригиналу $u_R(t)$:

$$u_R(t) = 20e^{-1000t} + \frac{10^4}{1000}(1 - e^{-1000t}) = 20e^{-1000t} + 10 - 10e^{-1000t} = 10 + 10e^{-1000t} \text{ (В)}.$$

График полученной функции $u_R(t)$ построен на рис. 10.15, г.

10.9. Сравнение спектрального и операторного методов расчета

Изложенный в предыдущем параграфе алгоритм расчета и иллюстрирующий его пример 10.11 свидетельствуют о том, что спектральный метод формально совпадает с операторным методом расчета переходных процессов при произвольных воздействиях, но в отличие от последнего несет в себе определенный физический смысл. Когда входное воздействие задано достаточно простым аналитическим выражением, а реагирующая цепь — сравнительно несложной схемой, спектральный метод никаким математическим преимуществом перед операторным методом не обладает.

Однако в инженерной практике возникает необходимость расчета реакции линейной цепи в условиях, отличных от нами рассмотренных, а именно:

- заданная цепь настолько сложна по структуре, что аналитический расчет ее комплексного коэффициента передачи весьма затруднителен. Но имеется возможность провести экспериментальное измерение ее частотных свойств;

- схема реагирующей цепи неизвестна, но известны опытные данные, позволяющие определить комплексный коэффициент передачи на различных частотах в достаточно широком диапазоне.

Другими словами, пассивная цепь задается не схемой, а совокупностью результатов опытного исследования ее частотных свойств. При такой постановке задачи операторный метод неприменим. В то же время условия задачи позволяют определить спектральный состав реакции по известному спектру входного воздействия и заданным частотным характеристикам цепи. Следовательно, появляется возможность расчета переходной реакции путем применения формулы обратного преобразования Фурье к найденному спектру.

Поскольку полученные из опыта частотные свойства цепи обычно задаются графически, то и спектр искомой реакции имеется в графическом виде. В названных условиях вычисление интегрального преобразования Фурье (10.20) выполняется специально разработанными приближенными методами [4, 5].

Контрольные вопросы и задания

1. Изложите идею применения принципа наложения при расчете реакции линейной пассивной цепи на произвольное воздействие $u_{\text{вх}}(t)$ или $i_{\text{вх}}(t)$.
2. Какие два различных варианта разложения воздействия $x_{\text{вх}}(t)$ применяются при расчете переходных процессов в линейных цепях?
3. Что понимается под заменой непрерывной функции $x_{\text{вх}}(t)$ ступенчатой функцией?
4. Какую временную зависимость называют функцией Хевисайда, или единичной функцией $1(t)$? Запишите математически скачок величиной $\Delta x_{\text{вх}}$ в момент времени $t = t_0$ через функцию Хевисайда.
5. Нарисуйте схему, реализующую скачок напряжения величиной 1 В в момент $t = 0$.
6. Нарисуйте схему, реализующую скачкообразное изменение тока в 1 А на входе пассивного двухполюсника в момент времени $t = 0$.
7. Что понимается под переходной характеристикой (функцией) пассивной цепи $h(t)$? Определите $h(t)$ цепи, изображенной на рис. 10.16, считая воздействием напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, а реакцией — напряжение на резисторе $u_R(t)$. Примите $C = 0,1$ мкФ; $R = 1$ кОм.
8. Найдите переходную функцию четырехполюсника рис. 10.17 при $R = 1$ кОм и $L = 1$ мГн, считая воздействием напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, а реакцией напряжение на индуктивности $u_L(t)$.
9. По известной переходной функции цепи $h(t) = 0,1e^{-1000t}$ (А/В) запишите ее реакцию на воздействие прямоугольного импульса величиной $U_m = 10$ В, длительностью $t_n = 1$ мс: а) при $t < t_n$; б) при $t > t_n$.
10. Пользуясь формулой интеграла Дюамеля, найдите реакцию цепи с переходной характеристикой $h(t) = 0,1e^{-1000t}$ (А/В) на воздействие $u_{\text{вх}}(t) = 20e^{-2000t}$ (В).

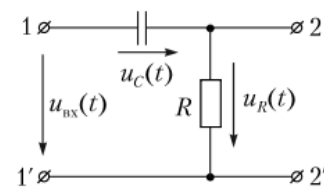


Рис. 10.16. К заданиям 7, 15

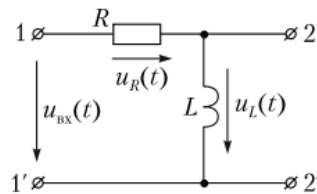


Рис. 10.17. К заданию 8

11. Каким образом используется формула интеграла Дюамеля при кусочно-непрерывном воздействии?
12. Запишите математическое определение для функции Дирака $\delta(t)$.
13. Что понимается под импульсной характеристикой цепи $h_\delta(t)$? Каков ее физический смысл?
14. Какова связь $h_\delta(t)$ с переходной функцией $h(t)$? Определите $h_\delta(t)$, если $h(t) = 2 - 2e^{-100t}$ (безразмерна).
15. Определите переходную и импульсные характеристики цепи, изображенной на рис. 10.16 (при разомкнутых зажимах 2–2'), считая воздействием напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, а реакцией — ток $i(t)$. Дано: $R = 1$ кОм и $L = 1$ мГн.
16. Запишите формулу интеграла Дюамеля через импульсную характеристику.
17. Какова связь переходной $h(t)$ и импульсной $h_\delta(t)$ характеристик с передаточной функцией $K(p)$? По заданной $K(p) = 1/(p + 100)$ найдите $h(t)$ и $h_\delta(t)$.
18. Назовите главные отличия в спектральных представлениях периодической и непериодической функций времени. Поясните понятия: а) дискретный спектр; б) непрерывный спектр.
19. Выразите функцию спектральной плотности $F(j\omega)$ через соответствующую функцию времени $f(t)$. Как называется это математическое преобразование?
20. Каким образом через функцию спектральной плотности $F(j\omega)$ записать бесконечно малую комплексную амплитуду гармоники с частотой ω в спектре непериодической функции $f(t)$?
21. Что понимается под амплитудным и фазовым спектрами функции $f(t)$?
22. Какова связь между спектральной плотностью функции $f(t)$ и ее преобразованием по Лапласу?
23. Как записать функцию спектральной плотности реакции линейной пассивной цепи $F_{\text{вых}}(j\omega)$ через спектральную плотность воздействия $F_{\text{вх}}(j\omega)$ и комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$?
24. Изложите порядок расчета переходной реакции линейной пассивной цепи $x_{\text{вых}}(t)$ на воздействие $x_{\text{вх}}(t)$ спектральным методом.
25. Сравните алгоритмы расчета переходных процессов при произвольных воздействиях спектральным (параграф 10.8) и операторным (подпараграф 9.6.2) методами. В каких случаях спектральный метод выступает как единственно возможный?

Раздел II

**ЭЛЕКТРОНИКА
И СХЕМОТЕХНИКА**



Глава 11

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДИОДЫ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- основные свойства p - n -перехода и особенности его вольт-амперной характеристики;
- особенности вольт-амперных характеристик германиевых и кремниевых диодов;

уметь

- выбрать тип диода, обладающего характеристиками, удовлетворяющими поставленной задаче;

владеть

- навыками применения методов теории нелинейных резистивных цепей для схем с полупроводниковыми диодами.

11.1. Основные свойства p - n -перехода и полупроводникового диода

Полупроводниковый диод — это прибор с двумя выводами, содержащий один p - n -переход и два контактных вывода. **p - n -Переход** представляет собой тонкий слой между двумя полупроводниковыми областями, одна из которых обладает дырочным типом проводимости, а другая — электронным (рис. 11.1). Металлический контакт с p -областью называют **анодом (А)**, с n -областью — **катодом (К)**.

Напомним, что для получения дырочной проводимости к основному полупроводнику (например, четырехвалентному кремнию) добавляется трехвалентная примесь (алюминий, индий, галлий, бор), называемая **акцептором** [14]. Примесь обладает способностью забирать электрон у соседнего атома кремния и прочно его удерживать, превратившись в отрицательный ион (неподвижный в пространстве). В теле основного полупроводника воз-

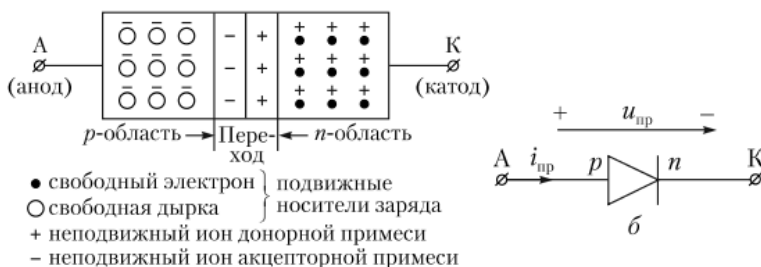


Рис. 11.1. Полупроводниковый диод:

а — p - n -структура; б — условное обозначение

никают «пустые места», не занятые электронами, — дырки, способные в пространстве перемещаться (выполняют функции подвижных зарядов положительного знака).

Электронная проводимость возникает при добавлении к четырехвалентному кремнию пентавалентной примеси (фосфор, сурьма, мышьяк). Пятый электрон во внешней оболочке атома примеси слабо удерживается, легко ее покидает и может свободно перемещаться в кристаллической решетке полупроводника, являясь подвижным зарядом отрицательного знака. При этом атом примеси становится положительно заряженным ионом (неподвижным).

Плоскость соприкосновения *p*- и *n*-областей называется **металлургической границей**.

Ввиду различной концентрации подвижных носителей заряда (дырок и электронов) в соприкасающихся областях в районе металлургической границы наблюдается перепад концентрации дырок и электронов, а следовательно, и диффузионные силы. Причиной возникновения диффузионных сил является градиент концентрации dp/dx и dn/dx , где x — пространственная координата. Под их действием дырки устремляются в *n*-область, а электроны — в *p*-область.

На границе областей с *p*-стороны обнажаются неподвижные отрицательные ионы акцепторной примеси, а с *n*-стороны — положительно заряженные неподвижные ионы донорной примеси. Два заряженных слоя обуславливают возникновение сил электрической природы, препятствующих дальнейшему перемещению электронов и дырок, т.е. направленных противоположно диффузионным силам.

При отсутствии внешнего напряжения устанавливается состояние равновесия между диффузионными силами и силами электрического происхождения. Движение носителей заряда прекращается. При отсутствии внешнего напряжения через переход ток не течет.

Область, занятая заряженными слоями, почти не содержащая подвижных носителей заряда, называется **полупроводниковым переходом**, а ее ширина — **шириной перехода**.

Если внешний источник электрического напряжения подключить «плюсом» к *p*-области, а «минусом» — к *n*-области, то созданное им внешнее электрическое поле направлено встречно внутреннему и частично его компенсирует. Другими словами, имеет место частичная компенсация сил, препятствующих процессу диффузии. Прежнее равновесие нарушается, диффузионные силы начинают превалировать над силами электрического притяжения и отталкивания. Через переход начинают проникать подвижные носители заряда (дырки — в *n*-область, а электроны — в *p*-область). Возникает электрический ток, направленный из *p*-области в *n*-область. Его называют **прямым**. Прямым называют и внешнее напряжение, приложенное «плюсом» к *p*-области, а «минусом» — к *n*-области.

Таким образом, прямой ток имеет диффузионную природу и направление (из *p*-области в *n*-область).

Внешнее напряжение, приложенное «минусом» к аноду, создает поле, согласное с внутренним электрическим полем, и они вместе противодействуют диффузионным силам. Область, занятая заряженными слоями (обед-

ненная подвижными носителями заряда) становится шире, переход расширяется. Под действием суммарного электрического поля происходит процесс выдираания малочисленных дырок из n -области и электронов из p -области, называемый **экстракцией**. Во внешней цепи протекает незначительный ток (ток экстракции).

Вывод. Полупроводниковый диод обладает односторонней проводимостью. Это справедливо до той поры, пока обратное напряжение не достигнет величины напряжения пробоя. При этом сначала возникает режим электрического пробоя, переходящий с незначительным ростом обратного напряжения в режим теплового пробоя, когда прибор сгорает.

Изложенный физический процесс лежит в основе работы всех полупроводниковых диодов.

По функциональному назначению выпускаемые промышленностью диоды подразделяются следующим образом: 1) выпрямительные; 2) стабилизаторы; 3) варикапы; 4) диоды Шоттки; 5) фотодиоды; 6) светодиоды; 7) оптроны и др. [9, 11, 12].

11.2. Выпрямительные диоды

В работе выпрямительных диодов главным является их свойство односторонней проводимости. Поскольку обратный ток диода несоизмерим с прямыми токами, вольт-амперную характеристику (ВАХ) выпрямительного диода при прямых и обратных напряжениях часто изображают в разных масштабах. Для примера на рис. 11.2, *а*, *б* представлены ВАХ германиевого и кремниевого диодов.

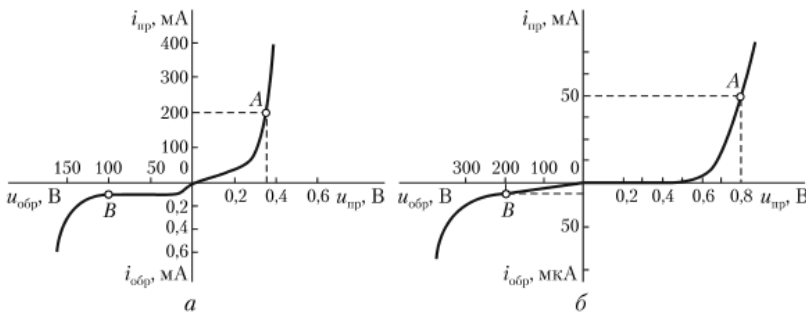


Рис. 11.2. ВАХ полупроводниковых диодов:

а — германиевого (D7B); *б* — кремниевого (D208)

При расчете схем с выпрямительными диодами с целью упрощения пренебрегают прямым падением напряжения на самом диоде и обратным током через диод, считая их равными нулю. При этом ВАХ диода идеализируется в виде двух отрезков прямых, совпадающих с осями i и u . В прямом направлении диод проявляет себя как к.з., а в обратном — как обрыв (рис. 11.3, *а*).

На рис. 11.3, *б*, *в* изображены ВАХ двухполюсников, содержащих идеальный диод и линейный резистор. Расчет наиболее распространенных выпрямительных схем с полупроводниковыми диодами рассмотрен в гл. 17.

Основные параметры выпрямительных диодов, приводимые в справочниках, таковы:

1) наибольшее допустимое значение постоянного тока, который может протекать через диод в прямом направлении;

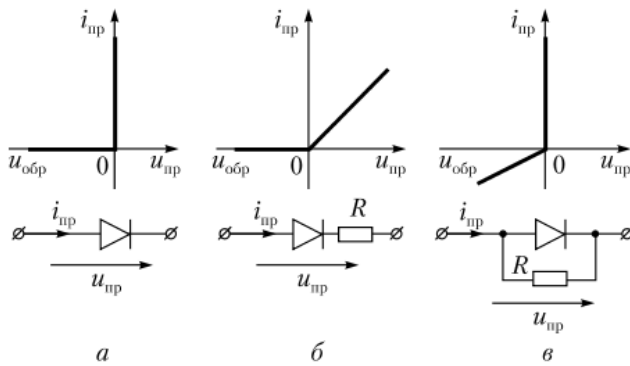


Рис. 11.3. ВАХ простейших цепей с идеальным диодом:

a — идеализированная ВАХ диода; *б* — ВАХ последовательного соединения диода и линейного резистора; *в* — ВАХ параллельного соединения диода и линейного резистора

2) наибольшее среднее за период значение прямого тока (при работе в пульсирующем режиме);

3) наибольшее допустимое значение обратного напряжения, не приводящее к пробое диода. Мощные диоды, выпускаемые промышленностью, рассчитаны на обратное напряжение до 1000 В и могут пропускать токи до сотен ампер.

11.3. Стабилитроны

Полупроводниковый **стабилитрон** (рис. 11.4, *a*) — это диод, у которого в рабочем режиме используется обратная ветвь его ВАХ (рис. 11.4, *б*), причем на участке, соответствующем электрическому пробое.

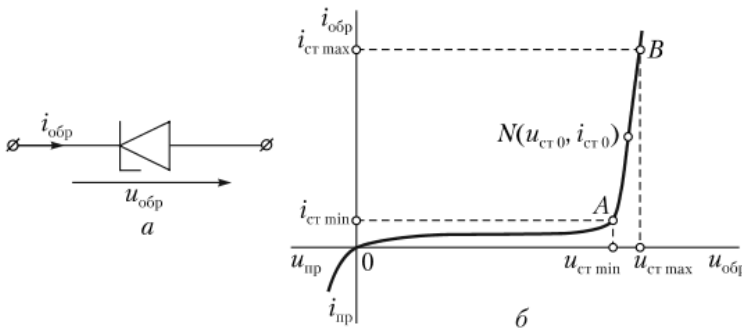


Рис. 11.4. Полупроводниковый стабилитрон:

a — условное изображение; *б* — ВАХ стабилитрона

Различают два вида пробоя полупроводникового диода:

1) электрический пробой, не приводящий к выходу прибора из строя, когда после снятия обратного напряжения диод возвращается в исходное состояние;

2) тепловой пробой (прибор сгорает).

Электрический пробой возникает под действием сильного обратного электрического поля. При этом наиболее энергичные электроны разгоняются до скорости, достаточной для выбивания электронов из нейтральных атомов. В свою очередь, освобожденные электроны также приобретают очень

высокую скорость. Этот процесс принимает лавинообразный характер и ведет к резкому нарастанию обратного тока (на несколько порядков).

Тепловой пробой. Значительный рост обратного тока вызывает увеличение температуры диода, а следовательно, дополнительную генерацию электронно-дырочных пар, способствующую дальнейшему росту тока. Возникает новый лавинообразный процесс, называемый тепловым пробоем. Во избежание перехода электрического пробоя в тепловой величина обратного тока не должна превышать некоторого наибольшего допустимого значения $i_{ст\max}$. Другими словами, мощность, рассеиваемая на диоде, не должна быть больше допустимой величины.

Важнейшей особенностью рассматриваемого полупроводникового прибора в режиме электрического пробоя является малое дифференциальное сопротивление. Это равносильно наличию на его ВАХ участка, где большим изменениям тока соответствуют очень малые изменения напряжения. На рис. 11.4, б это режимы между точками А и В (участок стабилизации).

Основные параметры стабилитронов, приводимые в справочниках:

1) напряжение стабилизации $u_{ст0}$ (соответствует примерно середине участка стабилизации — точка N на рис. 11.4, б). Режим, определяемый точкой $N(u_{ст0}, i_{ст0})$, называется номинальным;

2) минимальный ток $i_{ст\min}$, при котором наблюдается устойчивый электрический пробой. Этой величиной задается нижняя граница участка стабилизации (точка А на рис. 11.4, б);

3) максимально допустимый ток стабилизации $i_{ст\max}$, при котором рассеиваемая на диоде мощность не приводит к переходу электрического пробоя в тепловой (точка В на рис. 11.4, б, определяющая верхнюю границу участка стабилизации);

4) дифференциальное сопротивление прибора в режиме стабилизации (номинальном).

Полупроводниковые стабилитроны выполняют на основе кремния. У германиевых диодов электрический пробой легко переходит в тепловой, поэтому для изготовления стабилитронов германий не используется. Кремниевые стабилитроны, выпускаемые промышленностью, рассчитаны на напряжение стабилизации от 5 до 400 В и мощностью от 250 мВт до 50 Вт.

Схема простейшего стабилизатора напряжения со стабилитроном изображена ниже на рис. 11.5, а. Это четырехполюсник, включенный между источником входного напряжения и сопротивлением нагрузки. Сопротивление R_0 , называемое **балластным** или **ограничительным**, выполняет две функции:

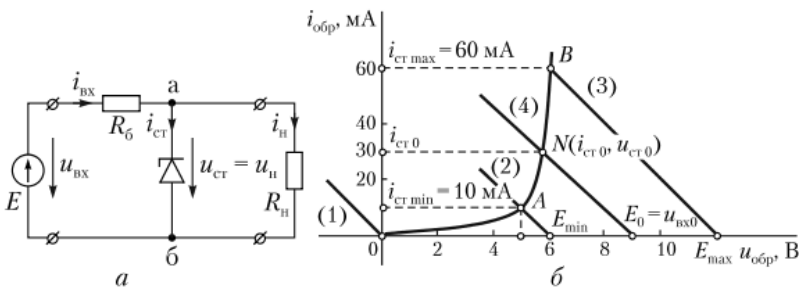


Рис. 11.5. Стабилитрон:

а — схема стабилизатора напряжения; б — ее графический расчет для случая $R_н = \infty$

1) ограничивает ток через стабилизатор, что предотвращает переход электрического пробоя в тепловой;

2) принимает на себя «излишки» напряжения, возникающие при изменении напряжения питания и сопротивления нагрузки.

Обеспечиваемое схемой стабилизатора качество стабилизации оценивается по величине коэффициента стабилизации $K_{ст}$:

$$K_{ст} = \frac{\text{Относительное изменение выходного напряжения}}{\text{Относительное изменение входного напряжения}} = \frac{\Delta u_{н}/u_{н0}}{\Delta u_{вх}/u_{вх0}},$$

где $u_{н0}$ и $u_{вх0}$ соответствуют номинальному режиму (точка N на рис. 11.4, б).

Пример 11.1. Для стабилизатора постоянного напряжения (рис. 11.5, а) известны: величина балластного сопротивления $R_0 = 100$ Ом; ВАХ стабилизатора (задана графически на рис. 11.5, б). Координаты крайних точек участка стабилизации A и B , а также точки N , соответствующей номинальному режиму: точка $A - u_{ст\min} = 5$ В, $i_{ст\min} = 10$ мА; точка $B - u_{ст\max} = 6,1$ В, $i_{ст\max} = 60$ мА; точка $N - u_{ст0} = 5,8$ В, $i_{ст0} = 30$ мА.

Определить, в каких пределах может изменяться напряжение на входе, обеспечиваемое источником ЭДС E , чтобы напряжение на нагрузке соответствовало участку стабилизации AB на ВАХ стабилизатора. Рассмотреть два случая: 1) $R_{н} \gg R_0$ (принять $R_{н} \rightarrow \infty$); 2) $R_{н} = 400$ Ом. Для $R_{н} = 400$ Ом вычислить коэффициент стабилизации $K_{ст}$.

Решение

Случай 1. Графический способ. При $R_{н} \rightarrow \infty$ источник входного напряжения E , сопротивление R_0 и стабилизатор включены последовательно. Режим нелинейного элемента определяется точкой пересечения его ВАХ и прямой $u = E - iR_0$. Ее наклон не зависит от величины E .

Поэтому на рис. 11.5, б построена прямая (1) по уравнению $u = -iR_0$. Прямые (2) и (3) проведены через крайние точки участка стабилизации A и B параллельно прямой (1). Отрезки, отсекаемые прямыми (2) и (3) по оси напряжения, определяют соответственно минимальное E_{\min} и максимальное E_{\max} значения входного напряжения. Таким образом:

$$u_{вх\min} = E_{\min} = 6 \text{ В}; \quad u_{вх\max} = E_{\max} = 12 \text{ В}.$$

Аналитический способ. Для нижней границы участка стабилизации (точка A):

$$i_{ст\min} = 10 \text{ мА}; \quad u_{ст\min} = 5 \text{ В};$$

$$E_{\min} = u_{ст\min} + i_{ст\min} R_0 = 5 + 10 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 6 \text{ (В)}.$$

Для верхней границы участка стабилизации (точка B):

$$i_{ст\max} = 60 \text{ мА}; \quad u_{ст\max} = 6,1 \text{ В};$$

$$E_{\max} = u_{ст\max} + i_{ст\max} R_0 = 6,1 + 60 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 12,1 \text{ (В)}.$$

Случай 2 ($R_{н} = 400$ Ом). Графический способ. По отношению к стабилизатору остальная схема является линейным активным двухполюсником. На рис. 11.6, а изображена его последовательная схема замещения, включающая источник ЭДС и линейный резистор. Для нее:

$$u_{вх} = E \frac{R_{н}}{R_{н} + R_0}; \quad R_{вх} = \frac{R_{н} R_0}{R_{н} + R_0}.$$

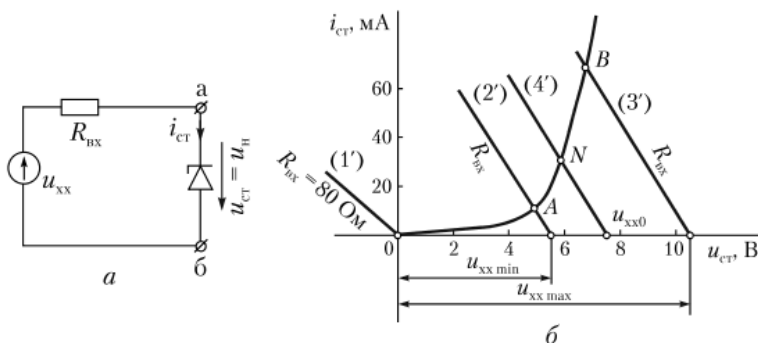


Рис. 11.6. Расчет стабилизатора напряжения для случая $R_{\text{н}} = 400 \text{ Ом}$:

а — эквивалентная схема для расчета режима стабилизатора;
б — ее графический расчет

По условию задачи величина $R_{\text{вх}}$ неизменна и равна

$$R_{\text{вх}} = \frac{400 \cdot 100}{400 + 100} = 80 \text{ Ом.}$$

Величина $u_{\text{xx}} = E \frac{400}{400 + 100} = 0,8E$ — изменяется при изменении E .

Графическое решение для этого случая аналогично предыдущему и приведено на рис. 11.6, б. Прямая (1') на рис. 11.6, б построена по уравнению $u = -iR_{\text{вх}}$, где $R_{\text{вх}} = 80 \text{ Ом}$. Прямые (2') и (3') проведены параллельно прямой (1') через точки *A* и *B* на ВАХ стабилизатора. По отрезкам, отсекаемым прямыми (2') и (3') на оси напряжения, находим $u_{\text{xx min}} = 5,5 \text{ В}$; $u_{\text{xx max}} = 11 \text{ В}$.

Из соотношения, связывающего величины E и u_{xx} , получаем

$$E = u_{\text{xx}}(R_{\text{н}} + R_{\text{б}})/R_{\text{н}} = u_{\text{xx}}/0,8;$$

$$E_{\text{min}} = u_{\text{вх min}} = u_{\text{xx min}}/0,8 \approx 7 \text{ В};$$

$$E_{\text{max}} = u_{\text{вх max}} = u_{\text{xx max}}/0,8 \approx 13,85 \text{ В.}$$

Номинальный режим обеспечивается при

$$u_{\text{xx0}} \approx 7,5 \text{ В}; \quad u_{\text{вх0}} = E_0 = \frac{u_{\text{xx0}}}{0,8} \approx 9,4 \text{ В.}$$

Величина u_{xx0} определена по отрезку, отсекаемому на оси напряжений прямой (4'), проведенной через точку *N* на рис. 11.6, б.

Коэффициент стабилизации равен

$$K_{\text{ст}} = \frac{\Delta u_{\text{ст}}/u_{\text{ст0}}}{\Delta u_{\text{вх}}/u_{\text{вх0}}} = \frac{(u_{\text{ст max}} - u_{\text{ст min}})/u_{\text{ст0}}}{(u_{\text{вх max}} - u_{\text{вх min}})/u_{\text{вх0}}} = \frac{(6,1 - 5)/5,8}{(13,85 - 7)/9,4} \approx 0,28.$$

Аналитический способ. Нижняя граница участка стабилизации (точка *A*):

$$u_{\text{н min}} = u_{\text{ст min}} = 5 \text{ В}; \quad i_{\text{н min}} = \frac{u_{\text{н min}}}{R_{\text{н}}} = \frac{5}{400} = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ А};$$

$$E_{\text{min}} = u_{\text{н min}} + (i_{\text{н min}} + i_{\text{ст min}})R_{\text{б}} = 5 + (12,5 + 10) \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 7,25 \text{ В.}$$

Верхняя граница участка стабилизации (точка *B*):

$$u_{\text{н max}} = u_{\text{ст max}} = 6,1 \text{ В}; \quad i_{\text{н max}} = \frac{u_{\text{ст max}}}{R_{\text{н}}} = 15,3 \cdot 10^{-3} \text{ А};$$

$$E_{\text{max}} = u_{\text{н max}} + (i_{\text{н max}} + i_{\text{ст max}})R_{\text{б}} = 6,1 + (15,3 + 60) \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 6,1 + 7,53 = 13,63 \text{ В.}$$

Пример 11.2. Цепь на рис. 11.5, *a* питается от источника постоянной ЭДС $E = \text{const} = 16 \text{ В}$. В каких пределах может изменяться сопротивление нагрузки, чтобы напряжение на нагрузке, поддерживаемое стабилитроном, не вышло за пределы участка стабилизации на ВАХ стабилитрона (рис. 11.5, *б*).

Решение

Хотя графический путь решения поставленной задачи возможен, аналитический способ здесь представляется более целесообразным (менее трудоемок).

Нижняя граница участка стабилизации (точка *A*):

- ток через балластное сопротивление

$$i_{\text{вх}A} = (E - u_{\text{ст} \min}) \frac{1}{R_0} = \frac{16 - 5}{100} = 110 \text{ мА};$$

- ток через сопротивление нагрузки

$$i_{\text{н}A} = i_{\text{вх}A} - i_{\text{ст} \min} = 100 \text{ мА};$$

- соответствующее сопротивление нагрузки

$$R_{\text{н}A} = \frac{u_{\text{н}A}}{i_{\text{н}A}} = \frac{u_{\text{ст} \min}}{i_{\text{н}A}} = \frac{5}{100} \cdot 10^3 = 50 \text{ Ом}.$$

Верхняя граница участка стабилизации (точка *B*):

$$i_{\text{вх}B} = (E - u_{\text{ст} \max}) \frac{1}{R_0} = \frac{16 - 6,1}{100} = 99 \text{ мА};$$

$$i_{\text{н}B} = i_{\text{вх}B} - i_{\text{ст}B} = 99 - 60 = 39 \text{ мА};$$

$$R_{\text{н}B} = \frac{u_{\text{н}B}}{i_{\text{н}B}} = \frac{6,1}{39} \cdot 10^3 \approx 150 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_{\text{н} \min} = 50 \text{ Ом}; R_{\text{н} \max} = 150 \text{ Ом}.$

11.4. Варикапы

Полупроводниковый переход (рис. 11.7, *б*) наряду с резистивными свойствами обладает еще и емкостными. Поэтому в общем случае схема замещения полупроводникового диода (рис. 11.7, *в*) содержит включенные параллельно резистивный и емкостной элементы (нелинейные). Причем зависимость

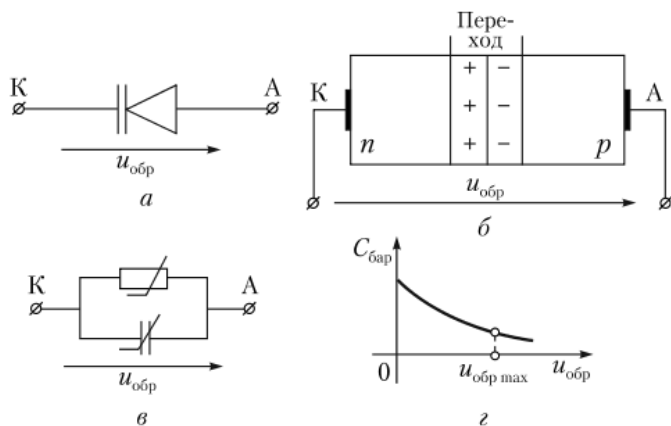


Рис. 11.7. Варикап:

a — условное изображение; *б* — структура прибора; *в* — схема замещения; *г* — вольт-фарадная характеристика (графическое обозначение)

$i(u)$ для нелинейного резистора совпадает с ВАХ диода. Напомним, что емкость как параметр элемента связывает величины приращения накопленного заряда Δq с соответствующим приращением напряжения Δu : $C \approx \Delta q / \Delta u$.

Известно, что физические процессы накопления заряда в p - n -структуре при прямом и обратном напряжениях различны.

Обратное напряжение (рис. 11.7, б). Резистивное сопротивление при обратном напряжении можно принять равным ∞ . Поэтому запертый диод уподобляется конденсатору. Его пластинами являются p -область и n -область, а переход (свободный от подвижных носителей заряда) выполняет функции диэлектрика.

Емкость запертого диода называется **барьерной** и обозначается $C_{\text{бар}}$. Поскольку с ростом обратного напряжения на диоде ширина p - n -перехода увеличивается (что можно трактовать как раздвижение пластин конденсатора), то барьерная емкость уменьшается. Таким образом, $C_{\text{бар}}$ зависит от обратного напряжения $u_{\text{обр}}$ и уменьшается с его ростом.

Зависимость $C_{\text{бар}}(u_{\text{обр}})$ называется **вольт-фарадной характеристикой**. Ее качественный вид показан на рис. 11.7, г.

Варикапом называется полупроводниковый прибор, в работе которого используются емкостные свойства полупроводникового перехода при обратном напряжении питания, т.е. его барьерная емкость $C_{\text{бар}}$. Условное изображение варикапа приведено на рис. 11.7, а.

В справочниках приводятся следующие параметры варикапов:

- а) номинальная емкость (соответствующая некоторому обратному напряжению, принятому за номинал) и пределы ее изменения;
- б) максимально допустимое обратное напряжение (во избежание обратного пробоя).

Варикапы применяются, например, для настройки колебательных контуров в радиоаппаратуре.

Прямое напряжение. В общем случае эквивалентная схема p - n -перехода, а значит, и полупроводникового диода при прямом напряжении должна учитывать как резистивные, так и емкостные свойства. Поскольку при прямых напряжениях процессы перемещения и накопления заряда происходят в основном под действием диффузионных сил, соответствующая емкость называется **диффузионной** и обозначается как $C_{\text{дифф}}$.

Для медленно протекающих процессов диод можно считать нелинейным резистором. Его ВАХ совпадает с прямой ветвью ВАХ диода. С ростом частоты влияние емкостных свойств становится все более существенным, т.е. диффузионную емкость $C_{\text{дифф}}$ необходимо учитывать.

11.5. Фотодиоды, светодиоды, оптроны

Фотодиод — это полупроводниковый диод, у которого создана возможность воздействия оптического излучения на область p - n -перехода. На рис. 11.8, а поясняется принцип работы прибора, а на рис. 11.8, б представлено его условное обозначение.

Луч света (поток фотонов), направленный перпендикулярно плоскости p - n -перехода, вызывает в поверхностном слое генерацию электронно-дырочных пар. Следовательно, концентрация электронов и дырок на поверхности становится больше, чем во внутренних областях. Возникают диффу-

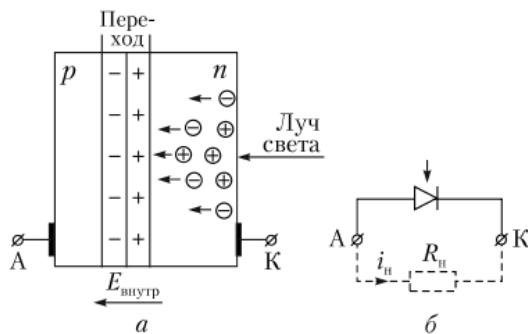


Рис. 11.8. Фотодиод:

a — принцип работы прибора; *б* — условное изображение

сионные силы, направленные внутрь полупроводника, благодаря которым подвижные носители зарядов обоих знаков устремляются к *p-n*-переходу.

Попадая в область перехода, электроны и дырки оказываются в различных условиях: дырки подхватываются внутренним полем и направляются в *p*-область, заряжая ее положительно; электроны задерживаются внутренним полем, заряжая *n*-область отрицательно.

Таким образом, *p-n*-переход выполняет функции разделения зарядов, как и в любом источнике электрической энергии. Если между электродами диода (анодом и катодом) включить сопротивление нагрузки, то через него будет протекать ток, имеющий для самого диода обратное направление (см. рис. 11.8, б). Этот ток зависит от интенсивности светового потока и при его отсутствии равен нулю.

Итак, фотодиод — это преобразователь светового сигнала в электрический. Известные нам солнечные батареи являются фотодиодами с большой площадью поверхности, воспринимающей солнечное излучение.

Режимом в нагрузке можно дополнительно управлять, включив последовательно с ней ЭДС смещения.

Светодиоды — это полупроводниковые диоды, способные генерировать оптическое излучение при протекании через них прямого тока. Условное изображение светодиода дано на рис. 11.9, а. По сравнению с лампами накаливания светодиоды имеют более узкий спектр излучения, требуют меньшего напряжения питания и обладают более высоким КПД.

Таким образом, светодиод — это преобразователь электрического сигнала $e_c(t)$ в световой. Для получения высокочувствительного преобразователя необходимо, чтобы его исходное состояние (при отсутствии преобразуемого электрического сигнала $e_c(t)$) соответствовало крутому участку прямой ветви ВАХ диода. Это обеспечивается подбором величины ЭДС смещения $E_{см}$ (рис. 11.9, б).

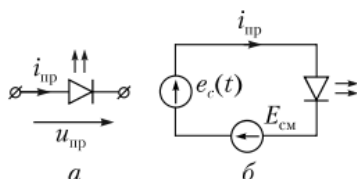


Рис. 11.9. Светодиод:

a — условное изображение; *б* — схема включения

Изготавливают светодиоды на основе *арсенида-фосфида галлия* (германий и кремний не используются).

В настоящее время разработан новый вид светодиодов на основе органических соединений, обладающих полупроводниковыми свойствами. Применение органических светодиодов (англ. *organic light-emitting diode*, OLED) для создания мониторов и дисплеев представляется весьма перспективным [20, 25].

Оптрон — это пара светодиод-фотодиод, помещенная в одном корпусе, причем так, что светочувствительная площадка фотодиода располагается против излучающей площадки светодиода (рис. 11.10).

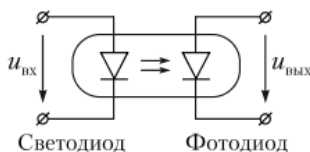


Рис. 11.10. Принцип построения оптрона

Поскольку передача сигнала здесь происходит через оптическое излучение, входная и выходная цепи не имеют гальванического контакта. Поэтому оптроны могут использоваться в электронной аппаратуре для развязки входной и выходной цепей.

11.6. Диоды Шоттки

Диоды Шоттки являются разновидностью диодов, в которых используется выпрямляющее действие перехода между металлом и полупроводником.

Рассмотрим вариант перехода между металлом и полупроводником *n*-типа. В этом случае обязательным условием для используемого металла является следующее: работа выхода электронов для металла существенно больше, чем для полупроводника. Под работой выхода понимается энергия, необходимая для перевода электрона из валентной зоны в зону проводимости, т.е. работа отрыва электрона от нейтрального атома, чтобы электрон стал свободно перемещаться по кристаллической решетке.

В полупроводнике *n*-типа достаточно много свободных электронов, способных перемещаться. Разница в работах выхода электронов приводит к возникновению диффузионных сил, под действием которых происходит процесс преобладающего перемещения электронов из *n*-полупроводника в металл.

В результате в районе металлургической границы образуется слой металла, заряженный отрицательно, и слой полупроводника, заряженный положительно (это неподвижные ионы донорной примеси, отдавшие электроны).

Наличие двух заряженных слоев обуславливает электрическое поле $E_{\text{внутр}}$, противодействующее диффузионным силам и ограничивающее дальнейший процесс ухода электронов в металл. Переходный слой по выпрямляющему действию аналогичен *p-n*-переходу. На металл здесь возлагается функции *p*-области. Электрод, контактирующий с металлом, является анодом, а с *n*-полупроводником — катодом.

На рис. 11.11, *a* приведено условное обозначение диода Шоттки, а на рис. 11.11, *б* показана структура такого прибора. ВАХ перехода металл —

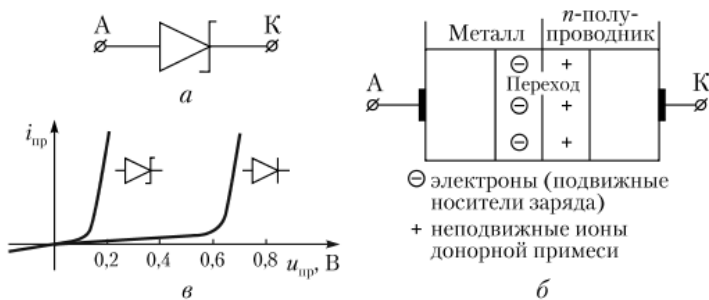


Рис. 11.11. Диод Шоттки:

a — условное обозначение; *б* — структура прибора;
в — ВАХ диода Шоттки и обычного выпрямительного диода

полупроводник, показанная на рис. 11.11, *в*, подобна ВАХ *p-n*-перехода. Основное ее отличие — значительно меньшее прямое падение напряжения, примерно 0,2–0,3 В вместо 0,7–0,8 В для *p-n*-перехода.

Важным достоинством диода Шоттки является его высокое быстродействие. При скачкообразном изменении напряжения возникающий переходный процесс в нем протекает значительно быстрее, чем у *p-n*-диодов, и составляет доли наносекунды. Рабочая частота диода Шоттки может достигать нескольких гигагерц. Диоды Шоттки могут быть малой, средней и большой мощности. Мощные диоды Шоттки позволяют пропускать токи в десятки ампер и выдерживают обратное напряжение до 500 В.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятиям «*p-n*-переход» и «полупроводниковый диод».
2. Как подключить к электродам полупроводникового диода источник напряжения, чтобы создать режимы протекания: а) прямого тока $i_{пр}$ и б) обратного тока $i_{об}$? Под действием каких сил (диффузионных или электрических) обеспечивается протекание токов $i_{пр}$ и $i_{об}$? Что понимается под током экстракции?
3. Нарисуйте вольт-амперную характеристику (ВАХ) реального и идеального полупроводниковых диодов.
4. Постройте ВАХ диодной сборки (рис. 11.12), содержащей десять диодов, если ВАХ каждого из них имеет вид, представленный на рис. 11.2, б.

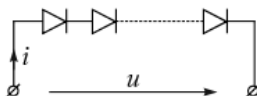


Рис. 11.12. К заданию 4

5. Назовите основные параметры, характеризующие выпрямительные диоды.
6. Дайте определение полупроводниковому стабильтрону. Каковы основные отличия режимов электрического пробоя и теплового пробоя? Почему для использования стабильтронов не используется германий?
7. Каковы главные особенности ВАХ стабильтрона?
8. Нарисуйте схему простейшего стабилизатора напряжения на стабильтроне. Каковы функции элементов этой схемы?
9. Получите ВАХ $i(u)$ двухполюсника, содержащего два встречно включенных и одинаковых стабильтрона (рис. 11.13), если ВАХ каждого из них соответствует рис. 11.4.

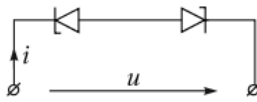


Рис. 11.13. К заданию 9

10. Нарисуйте простейшую схему замещения полупроводникового диода, учитывая его резистивные и емкостные свойства.

11. Какой прибор называется варикапом? Нарисуйте его условное изображение на схемах. Назовите основные параметры, характеризующие варикап.

12. Какой полупроводниковый прибор называют фотодиодом?

13. Поясните процесс разделения электрических зарядов, происходящий в солнечной батарее под воздействием луча света.

14. Какого направления (прямого или обратного) будет протекать ток через фотодиод при световом воздействии, если к его зажимам подключить резистор R_n ?

15. Сформулируйте определение прибора, называемого светодионом. На основе каких полупроводниковых материалов изготавливаются светодиоды?

16. Какой прибор называется оптроном? Какова основная функция оптрона, входящего в состав некоторого электронного устройства?

17. Каковы структурные особенности диода Шоттки? Назовите основные требования к металлу в конструкции диода Шоттки, если он контактирует: а) с n -полупроводником; б) с p -полупроводником?

18. Назовите главные особенности ВАХ диода Шоттки при сравнении с ВАХ кремниевого выпрямительного диода.

19. В каком частотном диапазоне используются диоды Шоттки?

20. Определите ток i , протекающий в диоде цепи на рис. 11.14, а, если $I_k = 1$ мА, $R = 0,5$ кОм, а ВАХ диода соответствует рис. 11.14, б. Рекомендуется воспользоваться методикой, изложенной в параграфе 2.6.

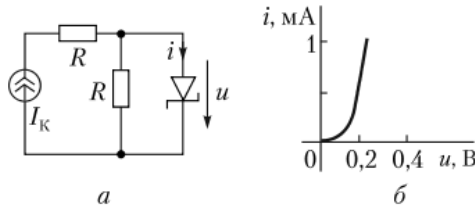


Рис. 11.14. К заданию 20

Глава 12

БИПОЛЯРНЫЕ И ПОЛЕВЫЕ ТРАНЗИСТОРЫ. ТИРИСТОРЫ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- принцип работы, основные свойства и особенности вольт-амперных характеристик разных видов биполярных и полевых транзисторов, схемы их включения и главные параметры;

- устройство тиристора, его виды и вольт-амперные характеристики;

уметь

- рассчитывать главные параметры биполярных и полевых транзисторов по заданным вольт-амперным характеристикам;

владеть

- навыками в определении вида транзистора по его условному изображению на схеме.

12.1. Принцип устройства и виды биполярных транзисторов

Биполярный транзистор — полупроводниковый прибор, содержащий два $p-n$ -перехода, образованные тремя слоями полупроводника с чередующимся типом проводимости. В транзисторе вида $n-p-n$ между двумя n -областями лежит p -область. В транзисторе вида $p-n-p$ две p -области разделены n -слоем.

Крайние области называются **эмиттер** (Э) и **коллектор** (К), а средняя область получила название **база** (Б). Переходы, образованные базой с эмиттером и коллектором, называют эмиттерно-базовый (ЭБ) и коллекторно-базовый (КБ).

Обычно к переходу ЭБ прикладывается прямое напряжение, а к переходу КБ — обратное. При такой полярности напряжений основные для эмиттера носители движутся от эмиттера к базе. Обратный поток (из базы в эмиттер) хотя и существует, но он гораздо меньше по причине меньшей концентрации примесей в базе (по сравнению с эмиттером).

Базовый слой имеет толщину порядка долей микрона. Поэтому лишь небольшая часть зарядов, инжектированных эмиттером, поступает во внешнюю ветвь, соединяющую базу с эмиттером, и составляет базовый ток. Основной поток этих зарядов подхватывается электрическим полем обратно смещенного КБ перехода. Через КБ переход начинает протекать обратный ток. Его величина прямо зависит от тока эмиттера и составляет примерно 95–98% от тока эмиттера, т.е.

$$i_{\text{К}} = i_{\text{Э}} - i_{\text{Б}} = \alpha i_{\text{Э}}, \quad (12.1)$$

где $\alpha = 0,95 \div 0,98$ — коэффициент передачи тока эмиттера.

На рис. 12.1 показаны структуры $n-p-n$ - и $p-n-p$ -транзисторов ($a, в$) и их условные графические обозначения, для краткости названные изображениями ($б, з$). Полезно помнить, что на условном изображении транзистора (рис. 12.1, $б, з$) стрелка направлена из p -области в n -область. Кружок вокруг транзистора означает, что прибор изготовлен в собственном корпусе, а его отсутствие свидетельствует о том, что собственного корпуса транзистор не имеет, являясь элементом интегральной микросхемы. Обращаем внимание, что в схемах с $n-p-n$ - и $p-n-p$ -транзисторами приняты определенные положительные направления для токов в ветвях, подключенных к электродам базы, эмиттера и коллектора. Именно они приведены на рис. 12.1. Там же показаны традиционные полярности источников, обеспечивающих необходимые напряжения на обоих переходах транзисторов.

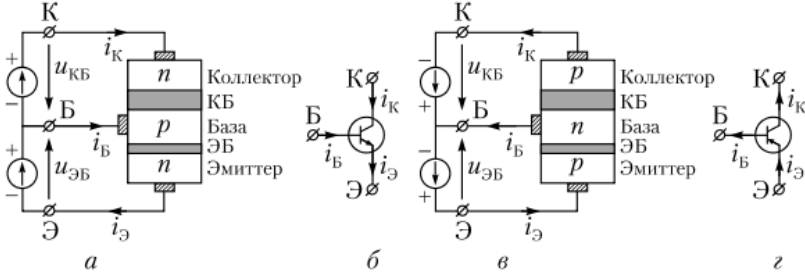


Рис. 12.1. Биполярный транзистор:

a – структура $n-p-n$ -транзистора; $б$ – его условное изображение;
 $в$ – структура $p-n-p$ -транзистора; $з$ – его условное изображение

Биполярный транзистор представляет собой трехполюсник, так как имеет три вывода, контактирующих с эмиттером, базой и коллектором.

Любое устройство, предназначенное для преобразования электрического сигнала, предполагает наличие двух выводов для входного сигнала и двух – для выходного, т.е. является четырехполюсником. Поэтому один из выводов транзистора раздваивается и становится *общим* по отношению к входной и выходной цепям.

Различают схемы: 1) с общей базой (ОБ); 2) с общим эмиттером (ОЭ); 3) с общим коллектором (ОК). Схема с ОЭ применяется чаще.

12.2. Вольт-амперные характеристики биполярного транзистора при включении по схеме с общим эмиттером

При включении по схеме с ОЭ (рис. 12.2) транзистор задается входной характеристикой и семейством выходных характеристик.

Входная ВАХ. Она представляет собой зависимость тока базы i_B от напряжения между базой и эмиттером $u_{БЭ}$ при фиксированном напряжении между коллектором и эмиттером: $i_B = i_B(u_{БЭ})$ при $u_{КЭ} = \text{const}$.

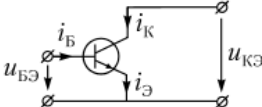


Рис. 12.2. Включение биполярного транзистора по схеме с общим эмиттером

Если полярность и величина напряжения $u_{кЭ}$ соответствует запертому состоянию КБ-перехода, то входная ВАХ (рис. 12.3, а) мало зависит от величины $u_{кЭ}$ (незначительно смещается вправо с ее ростом).

Семейство выходных ВАХ. Выходными характеристиками транзистора являются зависимости $i_{к} = i_{к}(u_{кЭ})$ при $i_{б} = \text{const}$ (показаны на рис. 12.3, б). На каждой кривой семейства выходных ВАХ можно выделить *пологий участок* (приближающийся к горизонтальному), где ток $i_{к}$ слабо зависит от напряжения $u_{кЭ}$. Соответствующий режим принято называть *активным*.

Начальный (крутой) участок каждой кривой соответствует напряжениям $u_{кЭ}$, соизмеримым с напряжением $u_{бЭ}$ и даже меньшим. При этом переход коллектор — база начинает открываться. Транзистор вступает в режим, называемый состоянием *насыщения*.

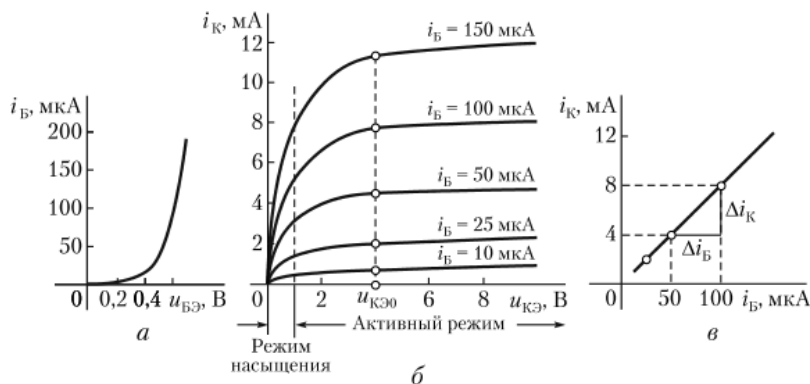


Рис. 12.3. Характеристики биполярного транзистора при включении по схеме с ОЭ:

а — входная ВАХ; б — семейство выходных ВАХ; в — передаточная характеристика

Передаточная характеристика транзистора. Под передаточной характеристикой понимается зависимость тока коллектора $i_{к}$ от тока базы $i_{б}$ при фиксированном напряжении между коллектором и эмиттером: $i_{к} = i_{к}(i_{б})$ при $u_{кЭ} = \text{const}$, где обычно предполагается, что величина и полярность $u_{кЭ}$ обеспечивают активный режим работы транзистора.

Передаточная характеристика может быть снята экспериментально или найдена по известному семейству выходных характеристик. С этой целью на графике выходных ВАХ проводится вертикаль, соответствующая выбранному значению $u_{кЭ} = u_{кЭ0}$, как это показано на рис. 12.3, б. Каждая точка пересечения этой вертикали с одной из кривых семейства выходных ВАХ дает совокупность величин $i_{к}$ и $i_{б}$, что позволяет по нескольким таким точкам построить требуемую зависимость (приведена на рис. 12.3, в). Вид передаточной характеристики свидетельствует о близкой к линейной связи между коллекторным и базовым токами транзистора в активном режиме.

Важным параметром передаточной характеристики является дифференциальный коэффициент усиления по току

$$\beta = \left. \frac{\partial i_{к}}{\partial i_{б}} \right|_{u_{кЭ} = \text{const}} \quad (12.2)$$

Величина β (определяющая наклон передаточной характеристики) обычно вычисляется по приближенной формуле

$$\beta = \frac{\Delta i_{\text{К}}}{\Delta i_{\text{Б}}} \quad (12.3)$$

Из соотношений (12.1)–(12.3) следует, что в активном режиме коллекторный, эмиттерный и базовый токи, а также их приращения связаны между собой следующим образом:

$$i_{\text{К}} = \beta i_{\text{Б}}; \quad \Delta i_{\text{К}} = \beta \Delta i_{\text{Б}}; \quad i_{\text{Э}} = i_{\text{К}} + i_{\text{Б}} = (\beta + 1)i_{\text{Б}}; \quad \Delta i_{\text{Э}} = (\beta + 1)\Delta i_{\text{Б}}$$

12.3. Полевые транзисторы. Общий принцип действия

Полевой транзистор — полупроводниковый прибор с тремя электродами — исток (*source*), сток (*drain*), затвор (*gate*). Между истоком и стоком располагается канал, выполненный из полупроводника *n*- или *p*-типа. Его проводимость зависит от электрического поля (перпендикулярного направлению тока в канале), создаваемого напряжением между электродами затвора и истока $u_{\text{ЗИ}}$.

Важной особенностью полевого транзистора является то, что управление током в канале происходит почти без затрат мощности, так как ток между затвором и каналом практически отсутствует.

В зависимости от способа изоляции затвора от канала полевые транзисторы делят на два класса: 1) с *p-n*-затвором (с управляющим *p-n*-переходом); 2) с изолированным затвором, так называемые **МОП-транзисторы**.

12.4. Полевые транзисторы с управляющим *p-n*-переходом и их вольт-амперные характеристики

В транзисторах этого вида затвор отделен от канала слоем полупроводника противоположного (по отношению к каналу) типа (рис. 12.4, *a*). В случае *n*-канала под затвором располагается полупроводник *p*-типа, а в случае *p*-канала — полупроводник *n*-типа. На границе этих областей образуется *p-n*-переход (см. рис. 12.4, *a*).

Обязательным условием нормальной работы прибора является запертое состояние данного перехода. С этой целью между затвором и истоком создается напряжение запирающей полярности. В соответствии с принятыми

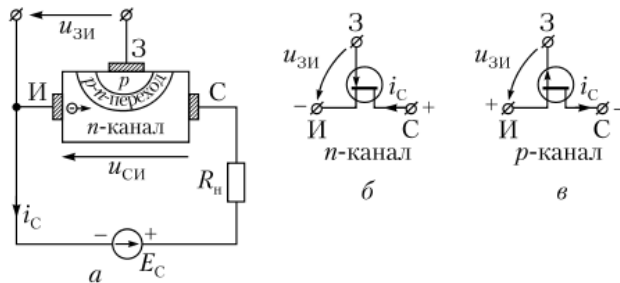


Рис. 12.4. Полевой транзистор с управляющим *p-n*-переходом:

a — структура *n*-канального транзистора; *б* — условное изображение *n*-канального транзистора; *в* — условное изображение *p*-канального транзистора

на рис. 12.4 положительными направлениями для n -канального транзистора напряжение $u_{зи}$ отрицательно, а для p -канального оно положительно.

Ток в канале возникает только при наличии источника питания, обеспечивающего разность потенциалов между стоком и истоком.

Полярность источника питания канала сток-исток должна быть такой, чтобы основные носители заряда в канале перемещались от истока к стоку. В n -канальном транзисторе от истока перемещаются электроны, а в p -канальном — дырки. Следовательно, в n -канале ток направлен от стока к истоку (встречно потоку электронов), а в p -канале — в противоположном направлении. Поэтому источник, питающий канал между стоком и истоком, включается следующим образом: «плюс» к стоку — для n -канала; «минус» к стоку — для p -канала.

12.4.1. Семейство выходных характеристик

Под выходными ВАХ понимаются зависимости тока в канале i_c от напряжения между стоком и истоком $u_{си}$ при фиксированном управляющем напряжении $u_{зи}$: $i_c = i_c(u_{си})$ при $u_{зи} = \text{const}$.

Рассмотрим случай отсутствия управляющего напряжения ($u_{зи} = 0$). График функции $i_c(u_{си})$ при $u_{зи} = 0$ представлен верхней кривой на рис. 12.5, б. На ней можно выделить два участка: 1) начальный, близкий к прямой, проходящей через начало координат, где канал ведет себя примерно как резистор некоторой величины; 2) пологий, на котором ток i_c слабо зависит от напряжения $u_{си}$. Он принадлежит так называемому активному режиму. Когда между затвором и истоком прикладывается напряжение запирающей полярности, p - n -переход расширяется, увеличивается область, обедненная подвижными носителями заряда. Это приводит к уменьшению сечения проводящего канала, а следовательно, и его проводимости. Ток в канале падает.

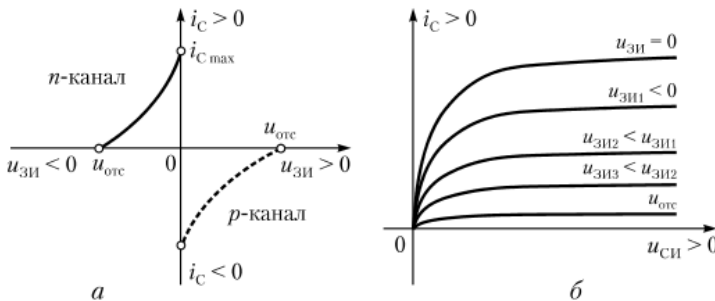


Рис. 12.5. ВАХ полевого транзистора с p - n -затвором:

a — стокзатворная (передаточная) ВАХ; b — семейство выходных характеристик

Таким образом, управляющее напряжение работает на уменьшение тока между истоком и стоком. С ростом обратного напряжения $u_{зи}$ выходные характеристики $i_c(u_{си})$ располагаются все ниже и ниже. При некотором значении $u_{зи} = u_{отс}$ (напряжение отсечки) горловина канала сужается до нуля и ток в канале прекращается.

Характер выходных ВАХ на начальном участке (прямые, проходящие через начало координат) позволяет использовать полевой транзистор в качестве резистора, сопротивление которого может изменяться путем изме-

нения управляющего напряжения $u_{зи}$. В большинстве же устройств (усилители, повторители, генераторы и т.д.) полевые транзисторы работают вне начального участка его выходных ВАХ. Этот режим, как уже упоминалось, называется активным. Здесь ток стока i_c слабо зависит от напряжения $u_{си}$ и в основном определяется величиной управляющего напряжения $u_{зи}$.

12.4.2. Стокозатворная (передаточная) характеристика

Под стокозатворной, или передаточной, ВАХ понимается функция

$$i_c = i_c(u_{зи})|_{u_{си} = \text{const}} \quad (12.4)$$

Причем величина напряжения $u_{си}$ достаточно большая, чтобы обеспечить активный режим работы транзистора. На рис. 12.5, а показаны зависимости вида (12.4) для n -канального и p -канального транзисторов (при положительных направлениях, заданных на рис. 12.4, б).

Обратим внимание, что наибольший ток стока имеет место при $u_{зи} = 0$. На рис. 12.5, а он обозначен как $i_{c\text{max}}$. Когда управляющее напряжение достигает величины $u_{отс}$ (напряжение отсечки), ток в канале прекращается.

Передаточная ВАХ может быть снята экспериментально либо построена по известным выходным характеристикам транзистора, как показано на рис. 12.6.

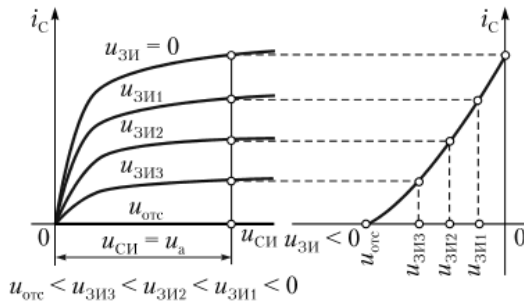


Рис. 12.6. Построение стокозатворной зависимости по семейству выходных ВАХ n -канального транзистора с p - n -затвором

Такое построение производится следующим образом:

1) на заданном семействе выходных ВАХ проводится вертикаль, пересекающая все кривые семейства при неизменном напряжении $u_{си} = u_a$, обеспечивающем активный режим работы транзистора (на пологих участках этих кривых);

2) каждой точке пересечения соответствует своя пара значений тока стока i_c и управляющего напряжения $u_{зи}$, определяющая точку на искомой стокозатворной зависимости $i_c(u_{зи})$ при $u_{си} = u_a$. Эта зависимость не слишком критична к величине напряжения u_a ввиду пологого характера выходных ВАХ транзистора.

Важным параметром полевого транзистора, определяемым по передаточной (стокозатворной) ВАХ, является **крутизна S** :

$$S = \left. \frac{\partial i_c}{\partial u_{зи}} \right|_{u_{си} = \text{const}} \approx \left. \frac{\Delta i_c}{\Delta u_{зи}} \right|_{u_{си} = \text{const}}$$

На графике передаточной характеристики крутизна S определяет наклон касательной к ВАХ в выбранной точке.

12.5. Полевые транзисторы с изолированным затвором

Главной особенностью транзисторов рассматриваемого класса является наличие между электродом затвора и проводящим каналом изолирующего диэлектрического слоя, исключающего электрический контакт между ними. Изолирующие функции обычно выполняет слой оксида кремния SiO_2 . Именно для таких транзисторов принята аббревиатура МОП: *металл — оксид кремния — полупроводник*. Проводящий канал может быть выполнен в двух видах: 1) встроенный канал; 2) индуцированный канал.

12.5.1. Полевые транзисторы со встроенным каналом

В транзисторах этого типа проводящий канал выполняется в виде двух сильно легированных областей полупроводника n^+ или p^+ (в зависимости от вида канала), находящихся под электродами истока и стока. Эти области соединены тонким слоем полупроводника идентичного типа. Такая полупроводниковая структура располагается на подложке, изготовленной из полупроводника противоположного по отношению к каналу вида (n -канал — p -подложка; p -канал — n -подложка), как это показано на рис. 12.7, а и 12.8, а.

Таким образом, в транзисторах рассматриваемого класса созданы условия для протекания тока между стоком и истоком при отсутствии напряжения $u_{зи}$ и наличии разности потенциалов между стоком и истоком. В зависимости от величины и полярности напряжения $u_{зи}$ изменяется концентрация основных носителей заряда в канале. Для n -канального транзистора при $u_{зи} > 0$ электроны втягиваются в область канала, ток между стоком и истоком возрастает. При $u_{зи} < 0$ электроны выталкиваются из области канала, ток i_c падает. Следовательно, полевой транзистор с встроенным каналом может управляться напряжением $u_{зи}$ обеих полярностей.

На рис. 12.7, в, г и 12.8, в, г показаны типичные передаточные и выходные характеристики для таких транзисторов. Их вид соответствует положительным направлениям, заданным на рис. 12.7, б и 12.8, б.

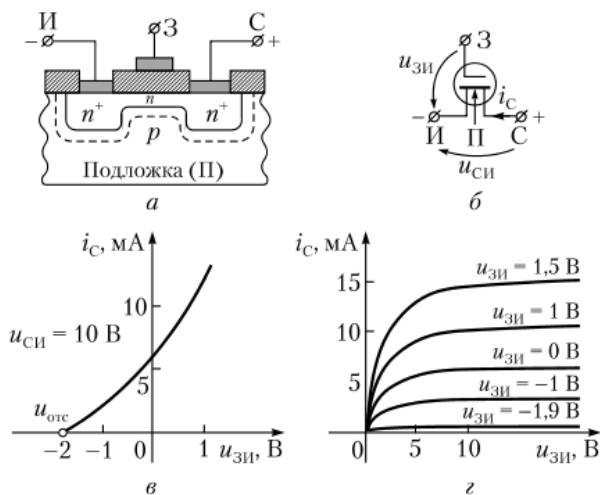


Рис. 12.7. Полевой транзистор с изолированным затвором и встроенным n -каналом:

а — структура; б — условное графическое обозначение; в — передаточная ВАХ; г — семейство выходных характеристик

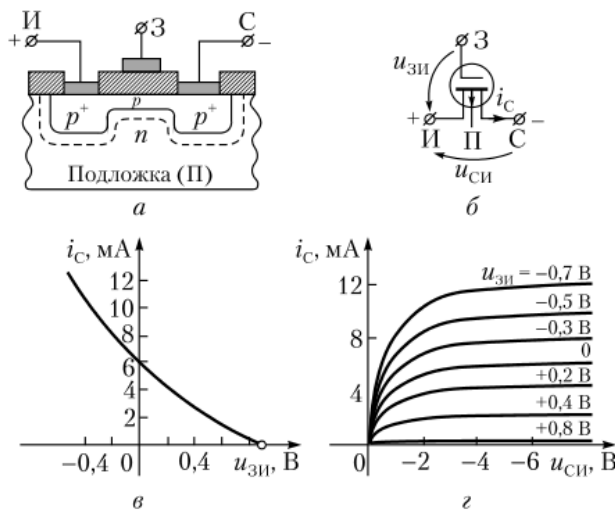


Рис. 12.8. Полевой транзистор с изолированным затвором и встроенным p -каналом:

a – структура; $б$ – условное обозначение; $в$ – передаточная ВАХ; $г$ – семейство выходных ВАХ

12.5.2. Полевые транзисторы с индуцированным каналом

В транзисторах такого вида при отсутствии управляющего напряжения на затворе ($u_{зи} = 0$) сильно легированные области полупроводника (n^+ или p^+), примыкающие к электродам стока и истока, не соединены проводящим каналом (рис. 12.9, a). Поскольку они расположены на p -подложке, при любой полярности напряжения $u_{си}$ ток $i_c = 0$. Действительно, на его пути имеются два встречно включенных p - n -перехода. В случае, показанном на рис. 12.9, a , они образованы n^+ -областями стока и истока и p -подложкой.

Если на затвор относительно истока подать управляющее напряжение (для n -канального транзистора оно положительно), превышающее некото-

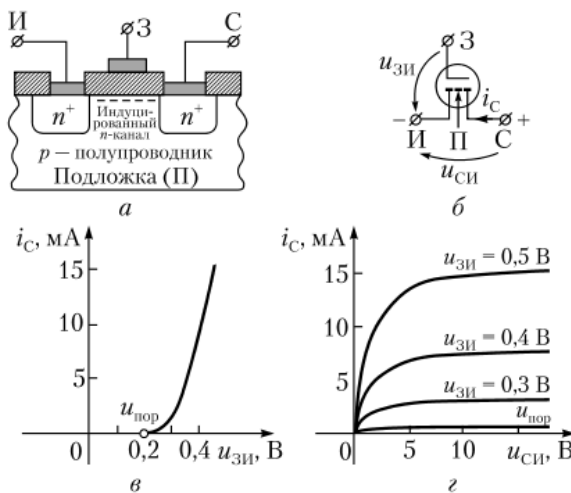


Рис. 12.9. Полевой транзистор с индуцированным n -каналом:

a – структура; $б$ – условное изображение; $в$ – передаточная ВАХ; $г$ – семейство выходных ВАХ

рое пороговое значение $u_{\text{пор}}$, то созданное электрическое поле будет втягивать электроны из n^+ -областей и частично из подложки. Образуется канал, соединяющий исток и сток (на рис. 12.9, а показан пунктиром), *изолированный* от подложки возникшим обедненным слоем. С ростом управляющего напряжения количество подвижных носителей растет, ток увеличивается. На рис. 12.9 представлены структура, передаточная и семейство выходных характеристик полевого транзистора с индуцированным n -каналом, а также его условное изображение.

Таким образом, *полевые транзисторы с индуцированным n -каналом управляются только положительным напряжением* ($u_{\text{зш}} > 0$). *Полевые транзисторы с индуцированным p -каналом управляются отрицательным напряжением* ($u_{\text{зш}} < 0$).

Необходимо также принимать во внимание разницу в величинах порогового напряжения для n -канальных (n -МОП) и p -канальных (p -МОП) транзисторов: для первых $u_{\text{пор}} = 0,1 \div 0,2$ В, для вторых $u_{\text{пор}} = (-4) \div (-2)$ В.

Условное изображение транзистора с индуцированным p -каналом отличается от изображения n -канального (рис. 12.9, б) направлением стрелки на проводнике, контактирующем с подложкой (П).

12.6. Составные транзисторы. Схема Дарлингтона

При помощи комбинации нескольких транзисторов (чаще двух) можно построить трехполюсник, который ведет себя как транзистор с гораздо большим параметром β . Один из вариантов такой комбинации, называемый **схемой Дарлингтона**, показан на рис. 12.10. Схема (пара) Дарлингтона содержит два транзистора T_1 и T_2 , их коэффициенты усиления по току равны β_1 и β_2 соответственно. Внешние зажимы трехполюсника, обозначенные Б, Э, К, выполняют функции базы, эмиттера и коллектора эквивалентного транзистора соответственно. Отношение токов, подтекающих к зажимам К и Б, можно рассматривать как коэффициент усиления β этого транзистора. Выразим его через β_1 и β_2 :

$$\begin{aligned} i_{\text{К}} &= i_{\text{К}_1} + i_{\text{К}_2} = i_{\text{Б}_1}\beta_1 + i_{\text{Б}_2}\beta_2 = i_{\text{Б}_1}\beta_1 + i_{\text{Э}_1}\beta_2 = \\ &= i_{\text{Б}_1}\beta_1 + i_{\text{Б}_1}(\beta_1 + 1)\beta_2 = i_{\text{Б}_1}\beta_1 + i_{\text{Б}}(\beta_1 + 1)\beta_2. \end{aligned}$$

Здесь учтены соотношения: $i_{\text{Б}_2} = i_{\text{Э}_1} = i_{\text{Б}_1}(\beta_1 + 1)$; $i_{\text{Б}_1} = i_{\text{Б}}$.

Результирующий коэффициент β равен

$$\beta = i_{\text{К}}/i_{\text{Б}} = \beta_1 + \beta_1\beta_2 + \beta_2 \approx \beta_1\beta_2.$$

Теоретически в схеме Дарлингтона (см. рис. 12.10) можно получить β порядка 10^4 . Однако необходимо принять во внимание следующее: T_2 работает в очень напряженном режиме (при больших токах $i_{\text{Б}_2}$), так как $i_{\text{Б}_2} = i_{\text{Э}_1}$.

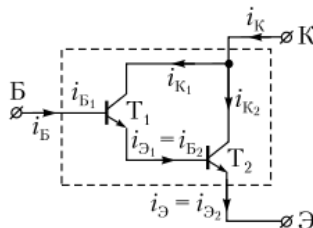


Рис. 12.10. Схема Дарлингтона

Поэтому во избежание недопустимо больших значений $i_{Б2}$ выбирают величину β_1 существенно меньшей, чем β_2 . Обычно значение β лежит в пределах $(2 \div 4) \cdot 10^3$.

12.7. Тиристоры. Структурные особенности и основные виды

Тиристор — полупроводниковый прибор с тремя и более $p-n$ -переходами, обладающий двумя устойчивыми состояниями. Одному из них присуще очень большое резистивное сопротивление, а другому — пренебрежительно малое. Это обстоятельство позволяет использовать прибор в качестве сравнительно мощного ключа. Тиристоры способны коммутировать токи до тысячи ампер и могут работать при напряжениях порядка нескольких тысяч вольт. На рис. 12.11 показана структура тиристора, содержащего четыре полупроводниковых слоя. Два электрода, контактирующие с внешними областями $p1$ и $n2$, называются анод (А) и катод (К) соответственно.

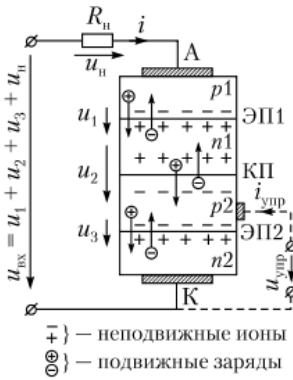


Рис. 12.11. Структура тиристора

Тиристоры подразделяют на два основных вида: а) диодные тиристоры (динисторы) и б) триодные тиристоры (тринисторы). В отличие от динистора в тринисторе используется дополнительное управляющее напряжение.

12.7.1. Принцип действия динистора и его характеристики

При отсутствии внешнего напряжения на приборе (см. рис. 12.11) в районах металлургических границ имеем двойные заряженные слои, созданные неподвижными ионами акцепторной и донорной примесей, образующие три $p-n$ -перехода. Эти переходы называют: ЭП1 и ЭП2 — эмиттерными, а КП — коллекторным. Их внутреннее электрическое поле препятствует процессу диффузии электронов и дырок через переходы.

Если от внешнего источника подать на прибор напряжение $u_{вх}$ «плюсом» к аноду, а «минусом» — к катоду, то оно обусловит некоторые разности потенциалов на каждом из трех переходов — u_1, u_2, u_3 (см. рис. 12.11). Напряжения u_1 и u_3 являются прямыми для ЭП1 и ЭП2, а u_2 — обратным для КП. Другими словами: КП — закрыт, обладает большим сопротивлением, а ЭП1 и ЭП2 — открыты (через них может протекать прямой ток при достаточной величине прямого напряжения).

Рассмотрим случай плавного увеличения внешнего напряжения $u_{вх}$ от нуля и выше. Здесь ЭП1 и ЭП2 работают на прямой ветви ВАХ $p-n$ -перехо-

да, а КП — на обратной. Для напомнимания на рис. 12.12, *а* приведен качественный вид ВАХ *p-n*-перехода. На ее прямой ветви выделены два участка: 1) начальный — пологий, когда можно считать переход практически закрытым; 2) крутой участок, соответствующий открытому переходу.

При малом внешнем напряжении $u_{вх}$ разности потенциалов на ЭП1 и ЭП2 невелики, а состояние этих переходов определяется точкой на пологом участке прямой ветви ВАХ, где ток очень мал. Поэтому почти все внешнее напряжение приложено к закрытому КП, т.е. $u_{вх} \approx u_2$. Под действием u_2 коллекторный переход пропускает лишь незначительный ток экстракции («выдергивания» дырок из области *n1* и электронов из области *p2*). Величина этого тока зависит от наличия неосновных носителей в областях *n1* и *p2*. Они могут появиться лишь за счет инжекции через переходы ЭП1 и ЭП2. При небольшом внешнем напряжении названная инжекция невелика, и ток i через прибор мал. С ростом внешнего напряжения точка, определяющая состояние ЭП1 и ЭП2 на ВАХ, перемещается в сторону перегиба.

Когда рабочая точка на ВАХ ЭП1 и ЭП2 достигает границы между пологим и крутым участками (см. рис. 12.12, *а*), даже небольшое увеличение напряжения на переходе приводит к существенному росту тока, а следовательно, к увеличению инжекции подвижных носителей заряда через данные переходы. В области *n1* растет количество дырок, а в области *p2* — электронов. Из-за этого происходит увеличение обратного тока через коллекторный переход. Его сопротивление падает, что приводит к перераспределению напряжений u_1, u_2, u_3 . Доли u_1 и u_3 возрастают, а доля u_2 уменьшается.

Последнее обстоятельство способствует усилению инжекции носителей через прямо смещенные переходы ЭП1 и ЭП2. Начинается лавинообразный процесс резкого падения сопротивления коллекторного перехода, в результате которого прибор начинает проявлять себя как два последовательных открытых *p-n*-перехода (или как два последовательно включенных диода). Здесь величина тока через прибор определяется в основном сопротивлением внешней цепи (рис. 12.12, *б*), т.е. $i \approx u_{вх}/R_n$, и это состояние устойчиво.

На рис. 12.12, *в* показан график зависимости тока через тиристор (динистор) от напряжения между его анодом и катодом $i(u_{АК})$ при плавном увеличении внешнего напряжения $u_{вх}$. На этом графике отмечены характерные точки.

Точка *P* имеет координаты: $u_{вкл}$ (напряжение включения) — напряжение между анодом и катодом, соответствующее началу лавинообразного про-

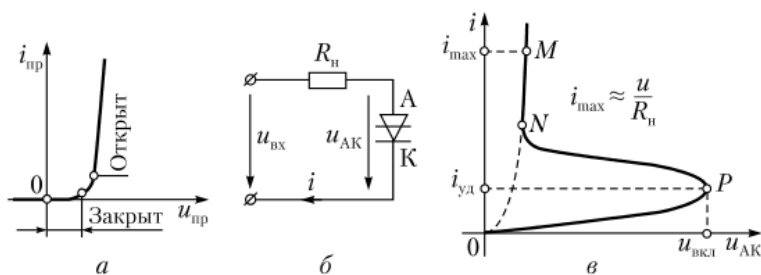


Рис. 12.12. Принцип действия динистора:

а — прямая ветвь *p-n*-перехода; *б* — схема включения прибора и его условное графическое обозначение; *в* — ВАХ прибора

цесса отпирания прибора; $i_{уд}$ (ток удержания) — минимальное значение тока, при котором прибор может находиться в открытом состоянии.

Участки OP и MN соответствует двум различным устойчивым состояниям прибора (закрытому и открытому). Участок PN — область неустойчивых состояний.

Перевод прибора из закрытого состояния в открытое осуществляется увеличением напряжения на приборе до величины $u_{вкл}$. Для обратного перевода — из открытого в закрытое состояние — необходимо напряжение между анодом и катодом $u_{АК}$ снизить до величины, при которой ток через тиристор станет ниже тока удержания $i_{уд}$ (см. рис. 12.12, в).

12.7.2. Тринистор

Тринистором называется разновидность тиристора, в котором используется дополнительное управляющее напряжение, приложенное к одному из полупроводниковых слоев, например к $p2$ (см. рис. 12.11), относительно катода. В отличие от динистора перевод тринистора в открытое состояние возможен при меньших значениях напряжения $u_{АК}$, а следовательно, и внешнего напряжения. Для этой цели на один из открытых переходов тринистора, например ЭП2, нужно подать дополнительное напряжение, обеспечивающее достаточно большую инжекцию носителей через названный переход. Она должна привести к появлению такого тока через закрытый переход КП, который вызовет снижение сопротивления этого перехода. В результате возникшего лавинообразного процесса происходит переключение прибора в открытое состояние (устойчивое). Дальнейшее воздействие управляющего напряжения не требуется. Поэтому управляющее напряжение может представлять собой кратковременный импульс $i_y(t)$. Чем больше амплитуда импульса i_y , тем при меньшем значении $u_{АК}$ происходит включение тринистора.

На рис. 12.13 представлено семейство ВАХ тринистора, т.е. зависимостей тока через прибор от напряжения $u_{АК}$, где величина i_y является параметром.

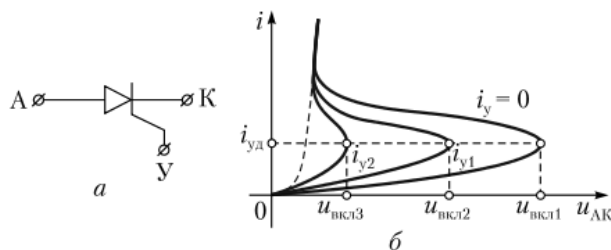


Рис. 12.13. Тринистор:

a — условное графическое обозначение прибора; b — семейство ВАХ

Основные характеристики тиристоров (динисторов и тринисторов), задаваемые в справочниках, таковы:

- 1) максимально допустимый ток, он может составлять величину от десятков мА до нескольких тысяч ампер;
- 2) максимальное напряжение $u_{АК}$ — до нескольких тысяч вольт;
- 3) управляющие токи зависят от величины коммутируемого тока и могут лежать в пределах от нескольких микроампер до долей ампера;

4) напряжение на открытом приборе (на замкнутом ключе) равно примерно 1–1,5 В;

5) быстродействие: время переключения маломощных тиристоров (коммутируемые токи от 50 до 100 мА) составляет доли микросекунды; для мощных тиристоров (коммутируемый ток больше 10 А) время переключения — доли миллисекунды.

Если тиристор используется в периодическом режиме, то максимально допустимая частота переключения составляет порядка 2000 Гц.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите типы проводимости полупроводниковых слоев, примыкающих к электродам базы, эмиттера и коллектора для биполярных транзисторов вида *n-p-n* и *p-n-p*.

2. Нарисуйте условные изображения (графические обозначения) *n-p-n*- и *p-n-p*-транзисторов и покажите на них традиционную полярность напряжений («плюс», «минус») на переходах БЭ и КЭ.

3. Почему цепь на рис. 12.14 называется схемой с общим эмиттером (ОЭ)?

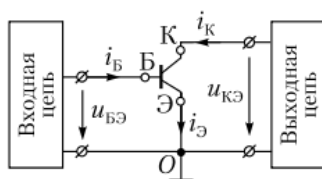


Рис. 12.14. К заданиям 3, 9

4. Какие величины связывает входная характеристика биполярного транзистора при включении по схеме с ОЭ?

5. Какие величины связывает семейство выходных ВАХ биполярного транзистора? Постройте одну из кривых семейства выходных ВАХ и выделите на ней активный режим и режим насыщения.

6. Какую функциональную зависимость называют передаточной характеристикой биполярного транзистора? Нарисуйте ее примерный вид.

7. Как по известной передаточной характеристике биполярного транзистора определить параметр β , который называется дифференциальным коэффициентом усиления по току?

8. Почему величина β не критична к напряжению между коллектором и эмиттером, если транзистор работает в активном режиме?

9. Для биполярного транзистора, включенного по схеме с ОЭ (см. рис. 12.14) и находящегося в активном режиме, известна величина $\beta = 50$. Определите базовый $i_б$ и коллекторный $i_к$ токи, если ток эмиттера $i_э = 10,2$ мА.

10. Назовите главные достоинства транзисторной схемы, называемой парой Дарлингтона.

11. Сформулируйте общий принцип действия прибора, именуемого полевым транзистором. Назовите его электроды.

12. По какому признаку полевые транзисторы делятся на два класса: а) с управляемым *p-n*-переходом (с *p-n*-затвором); б) с изолированным затвором?

13. Изобразите структуры *n*-канального и *p*-канального транзисторов с *p-n*-затвором. Нарисуйте их условное изображение (графическое обозначение).

14. Какой должна быть полярность напряжения $u_{си}$ в цепи на рис. 12.15, содержащей *n*-канальный полевой транзистор? Чему равен ток, отбираемый от входной цепи?

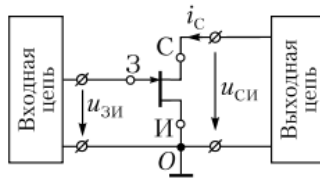


Рис. 12.15. К заданию 14

15. Что понимается под стокзатворной характеристикой полевого транзистора? Как она получается по семейству выходных характеристик полевого транзистора? Нарисуйте качественный вид названных зависимостей для n -канального транзистора с p - n -затвором.

16. Назовите главные особенности полевого транзистора с изолированным затвором (МОП-транзистора) и его разновидностей: а) с встроенным каналом и б) с индуцированным каналом.

17. Постройте качественно стокзатворные зависимости $i_c(u_{зи})$ для обоих видов n -канальных и p -канальных МОП-транзисторов.

18. Что понимается под крутизной полевого транзистора S ? Какова размерность этого параметра? Поясните методику определения крутизны S по стокзатворной зависимости.

19. Каковы главные структурные особенности полупроводникового прибора, называемого тиристором? Изобразите качественно ВАХ тиристора диодного вида (динистора).

20. Постройте качественно семейство ВАХ тиристора, имеющего управляющий электрод (тринистора).

21. Поясните физические процессы, обуславливающие наличие у тиристора двух его устойчивых состояний.

Глава 13

ЭЛЕКТРОННЫЕ УСИЛИТЕЛИ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- возможности применения биполярных и полевых транзисторов для усиления напряжения, тока, мощности;
- структуру простейших усилительных каскадов и особенности работы повторителей напряжения на биполярных и полевых транзисторах;

уметь

- анализировать работу заданной схемы усилительного каскада;

владеть

- методикой расчета основных параметров усилителя для конкретной схемы.
-

13.1. Главные рабочие параметры и характеристики усилителя

Усиление сигналов различной формы (постоянных, синусоидальных, периодических, непериодических, импульсных и т.п.) является одной из важнейших задач электронной техники. Она решается при помощи обширного класса электронных устройств, которые называются **усилителями**.

В полупроводниковой электронике схемы усилителей строятся на биполярных и полевых транзисторах, причем само усиление сигнала (по напряжению, току, мощности) осуществляется за счет энергии источников питания.

Электронный усилитель — это промежуточное звено между источником усиливаемого сигнала и нагрузкой. По отношению к внешним цепям (источнику и нагрузке) усилитель можно рассматривать как активный нелинейный четырехполюсник (рис. 13.1, *a*), свойства которого определяются следующими двумя зависимостями:

а) входная характеристика $i_{вх}(u_{вх})$. Ее типичный вид представлен на рис. 13.1, *б* (снимается при неизменных параметрах усилителя и фиксированной нагрузке);

б) выходная характеристика $i_{вых}(u_{вых}) = i_n(u_n)$. Она показана на рис. 13.1, *в* (снимается при неизменных параметрах усилителя и источника сигнала).

Для определенности предположим, что усилению подлежит сравнительно небольшое напряжение, развиваемое некоторым источником сигнала. На рис. 13.1, *a* этот источник представлен последовательной схемой замещения, содержащей идеальный источник ЭДС e_c и резистор $R_{вн}$, учитывающий его внутренние потери. В качестве приемника рассматриваем пассивный двухполюсник, его входное сопротивление обозначим как R_n .

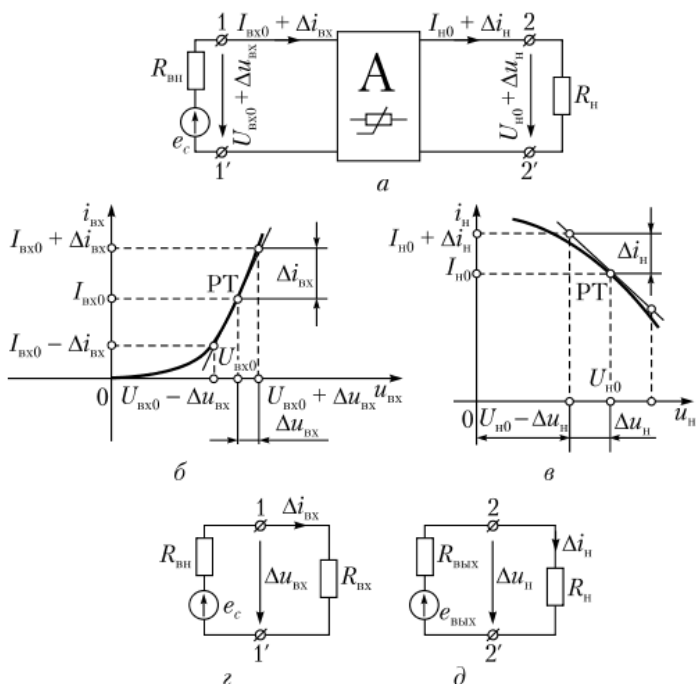


Рис. 13.1. Электронный усилитель:

a – усилитель как промежуточное звено между источником сигнала и нагрузкой; *б* – рабочая точка (РТ) на входной ВАХ усилителя и ее окрестность; *в* – РТ на выходной ВАХ усилителя и ее окрестность; *г* – эквивалентная линейная схема для входной цепи усилителя; *д* – эквивалентная линейная схема для нагрузочной цепи усилителя

13.1.1. Понятия рабочей точки и ее окрестности

Режим усилителя при отсутствии усиливаемого сигнала, т.е. при $e_c = 0$, называется состоянием покоя или **рабочей точкой** (РТ). В общем случае напряжение и ток как на входе усилителя, так и на его выходе при $e_c = 0$ не равны нулю. Обозначим их $U_{вх0}$, $I_{вх0}$, $U_{н0}$, $I_{н0}$. Причем величины $U_{вх0}$, $I_{вх0}$ являются координатами РТ на входной характеристике усилителя (см. рис. 13.1, б), а $U_{н0}$, $I_{н0}$ – на его выходной характеристике (см. рис. 13.1, в).

Под **окрестностью рабочей точки** понимается участок входной или выходной ВАХ, прилегающий к РТ с обеих сторон, который с достаточной точностью можно аппроксимировать отрезком прямой линии – касательной к ВАХ в РТ (см. рис. 13.1, б, в).

13.1.2. Понятие коэффициента усиления

Когда на вход усилителя подается усиливаемый сигнал $e_c \neq 0$, величины $U_{вх0}$, $I_{вх0}$, $U_{н0}$, $I_{н0}$ получают приращения $\Delta u_{вх}$, $\Delta i_{вх}$, $\Delta u_{н}$, $\Delta i_{н}$ соответственно. Этими приращениями и определяется один из самых главных параметров усилителя – его **коэффициент усиления**. Различают:

- 1) коэффициент усиления по напряжению

$$K_U = \Delta u_{н} / \Delta u_{вх}; \quad (13.1)$$

- 2) коэффициент усиления по току

$$K_I = \Delta i_{н} / \Delta i_{вх};$$

3) коэффициент усиления по мощности

$$K_p = K_U K_I.$$

13.1.3. Понятия входного и выходного сопротивлений усилителя

Допустим, что величина e_c настолько невелика, что вызываемые ею приращения не выводят работу схемы за пределы окрестности РТ. В таких условиях (и только в таких!) связь между приращениями напряжения и тока на входе усилителя ($\Delta u_{\text{вх}}, \Delta i_{\text{вх}}$), а также на его выходе ($\Delta u_{\text{н}}, \Delta i_{\text{н}}$) линейна и может быть определена из линейных расчетных моделей, показанных на рис. 13.1, *з* и *д* соответственно.

По отношению к источнику усиливаемого сигнала e_c усилитель проявляет себя как линейный резистор, обозначенный $R_{\text{вх}}$, называемый входным сопротивлением усилителя. Оно определяется по входной ВАХ усилителя следующим соотношением:

$$R_{\text{вх}} = |du_{\text{вх}}/di_{\text{вх}}|_{\text{РТ}} \approx |\Delta u_{\text{вх}}/\Delta i_{\text{вх}}|_{\text{РТ}}, \quad (13.2)$$

т.е. $R_{\text{вх}}$ есть дифференциальное входное сопротивление усилителя в рабочей точке (находится по наклону касательной к входной ВАХ в РТ, рис. 13.1, *б*).

Согласно эквивалентной схеме, изображенной на рис. 13.1, *д*, по отношению к $R_{\text{н}}$ усилитель проявляет себя как последовательное соединение идеального источника ЭДС $e_{\text{вых}}$ и линейного резистора $R_{\text{вых}}$.

Интенсивность источника ЭДС $e_{\text{вых}}$ является функцией $\Delta u_{\text{вх}}$. Указанная функция $e_{\text{вых}}(\Delta u_{\text{вх}})$ определяется параметрами используемого усилительного элемента и зависит от выбора РТ. Сопротивление $R_{\text{вых}}$ также зависит от положения РТ на выходной ВАХ $i_{\text{н}}(u_{\text{н}})$. Напомним, что на рис. 13.1, *в* это точка с координатами $U_{\text{н0}}, I_{\text{н0}}$. Величина $R_{\text{вых}}$ определяется по наклону касательной, проведенной в РТ к кривой $i_{\text{н}}(u_{\text{н}})$, а именно:

$$R_{\text{вых}} = |du_{\text{н}}/di_{\text{н}}|_{\text{РТ}} \approx |\Delta u_{\text{н}}/\Delta i_{\text{н}}|_{\text{РТ}}. \quad (13.3)$$

Наряду с коэффициентом усиления (13.1) величины $R_{\text{вх}}$ (13.2) и $R_{\text{вых}}$ (13.3) относятся к важнейшим характеристикам усилителя.

Укажем *требования* к величинам $R_{\text{вх}}$ и $R_{\text{вых}}$. Согласно эквивалентным схемам (см. рис. 13.1, *з*, *д*) для $\Delta u_{\text{вх}}$ и $\Delta u_{\text{н}}$ справедливы равенства

$$\Delta u_{\text{вх}} = e_c R_{\text{вх}} / (R_{\text{вх}} + R_{\text{вн}}); \quad \Delta u_{\text{н}} = e_{\text{вых}} R_{\text{н}} / (R_{\text{вых}} + R_{\text{н}}).$$

Качество работы усилителя тем выше, чем ближе $\Delta u_{\text{вх}}$ к e_c и $\Delta u_{\text{н}}$ к $e_{\text{вых}}$.

Из этих условий вытекают требования к величинам $R_{\text{вх}}$ и $R_{\text{вых}}$ относительно параметров внешних цепей $R_{\text{вн}}$ и $R_{\text{н}}$, а именно: 1) $R_{\text{вх}} \gg R_{\text{вн}}$; 2) $R_{\text{вых}} \ll R_{\text{н}}$. В идеальном случае $R_{\text{вх}} \rightarrow \infty$; $R_{\text{вых}} \rightarrow 0$.

13.1.4. Частотная характеристика усилителя

Усиление синусоидального сигнала

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{m\text{вх}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вх}})$$

— одна из важнейших задач, решаемых электронной техникой. Для линейного усилителя выходной сигнал является гармоникой той же частоты, но с другими амплитудой и начальной фазой:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_{m\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вых}}).$$

Отношение амплитуд напряжений на выходе и входе есть коэффициент усиления по напряжению: $K = U_{m\text{вых}}/U_{m\text{вх}}$. Он зависит от частоты усиливаемого сигнала. Функция $K(\omega)$ или $K(f)$ называется **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)**. Типичный вид зависимости $K(f)$ показан на рис. 13.2. Основными параметрами АЧХ являются граничные частоты: верхняя (f_v) и нижняя (f_n), а также полоса пропускания ($f_v - f_n$). **Полоса пропускания** — это частотный диапазон, в пределах которого коэффициент усиления отличается от уровня, принятого за номинальный $K_{\text{ном}}$, не более чем в $\sqrt{2}$ раз, что соответствует примерно $0,707K_{\text{ном}}$.

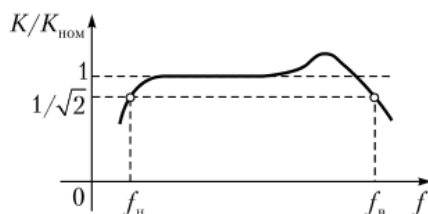


Рис. 13.2. Амплитудно-частотная характеристика усилителя

Реальная АЧХ (см. рис. 13.2) имеет так называемые завалы в области низких и высоких частот и один или несколько всплесков внутри диапазона $f_n - f_v$.

Классификация усилителей по частотному диапазону. По усиливаемому частотному диапазону различают:

- 1) усилители низкой частоты (УНЧ) — $30 \text{ Гц} \leq f \leq 30 \text{ кГц}$;
- 2) усилители высокой частоты (УВЧ) — $30 \text{ кГц} \leq f \leq 300 \text{ МГц}$;
- 3) усилители сверхвысокой частоты (УСВЧ) — $300 \text{ МГц} \leq f \leq 300 \text{ ГГц}$;
- 4) усилители постоянного тока (УПТ) — широкополосные усилители, предназначенные для усиления сигналов в полосе частот от 0 до $\sim 300 \text{ кГц}$. Такой диапазон обеспечивает практически без искажений усиление как медленно изменяющихся сигналов, так и достаточно быстрых. УПТ строятся на основе операционных усилителей;

- 5) импульсные усилители — широкополосные усилители, которые используются, например, в телевидении стандартной и высокой четкости. Их нижняя граничная частота принадлежит НЧ-диапазону ($\sim 50 \text{ Гц}$), а верхняя — ВЧ-диапазону ($6\text{--}60 \text{ МГц}$). Это позволяет усиливать без существенных искажений короткие импульсы длительностью порядка долей микросекунды;

- 6) избирательные усилители, предназначенные для усиления узкой полосы частот, принадлежащих любому из частотных диапазонов.

УВЧ и УСВЧ являются узлами радиоприемных и радиопередающих устройств. Они рассматриваются в соответствующих курсах, а также в курсе «Радиоэлектроника».

13.2. Усилитель напряжения низкой частоты на биполярном транзисторе. Методика расчета основных параметров

13.2.1. Постановка задачи

На рис. 13.3 изображена схема простейшего усилителя на биполярном транзисторе, а на рис. 13.4 *а, б* приведены его входная и семейство выход-

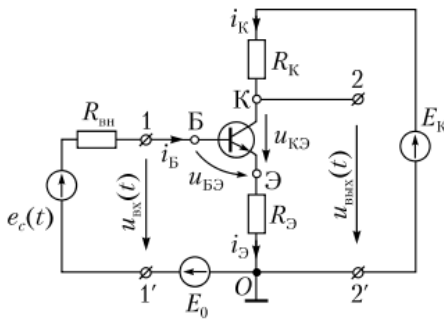


Рис. 13.3. Простейший усилитель на биполярном транзисторе

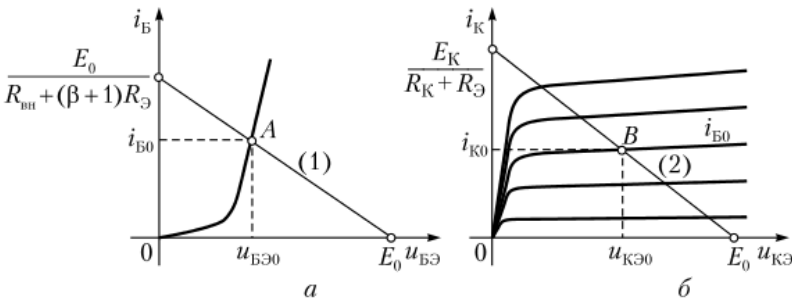


Рис. 13.4. Расчет усилителя на биполярном транзисторе:

- a* – графический расчет режима покоя на входе усилителя;
- б* – графический расчет режима покоя на выходе усилителя

ных ВАХ. Заданы также следующие величины: E_K – ЭДС источника коллекторного питания; E_0 – ЭДС смещения; R_K – коллекторное сопротивление; $R_Э$ – эмиттерное сопротивление. Известны параметры источника усиливаемого сигнала: внутреннее сопротивление $R_{вн}$ и внутренняя ЭДС $e_c(t)$.

Напряжения на зажимах 1–1', к которым подключается источник усиливаемого сигнала, называется **входным напряжением усилителя**, на рис. 13.3 оно обозначено $u_{вх}(t)$. Выходными зажимами заданного усилителя являются точки 2–2'. Соответствующее напряжение $u_{вых}(t)$ подается либо на некоторую нагрузку R_n , либо на следующий усилительный каскад.

Дальнейший анализ проводим, считая входное сопротивление нагрузочной цепи достаточно большим, чтобы не учитывать ее влияние на работу усилительного каскада.

Получим соотношения, связывающие основные характеристики усилителя, такие как коэффициент усиления по напряжению K_U для малой составляющей входного сигнала, входное $R_{вх}$ и выходное $R_{вых}$ сопротивления заданной схемы, с параметрами элементов усилителя и источника.

В качестве шага, предваряющего все дальнейшие расчеты, рекомендуется оценить величину коэффициента передачи по току β (см. формулу (12.3)) для заданного транзистора в активном режиме

$$\beta = \left. \frac{\Delta i_K}{\Delta i_B} \right|_{u_{КЭ} = \text{const}},$$

где величина $u_{КЭ}$ обычно берется равной половине напряжения источника коллекторного питания E_K . Методика определения β рассмотрена в параграфе 12.2. В дальнейшем предполагаем β известным. Поскольку усилитель

является нелинейным четырехполюсником, то его свойства (в том числе и искомые величины) в значительной степени зависят от его исходного состояния при отсутствии усиливаемого сигнала, называемого **состоянием покоя** или **рабочей точкой**.

13.2.2. Расчет режима в рабочей точке

Эквивалентная схема входной цепи и ее расчет. Для цепи, содержащей зажимы 1—1' заданного усилителя (см. рис. 13.3) при $e_c(t) = 0$ по второму закону Кирхгофа можно записать: $E_0 = i_{B0}R_{вн} + u_{БЭ0}(i_{B0}) + i_{Э0}R_{Э}$. Поскольку ток эмиттера $i_{Э0}$ больше тока базы i_{B0} в $\beta + 1$ раз, т.е. $i_{Э0} = (\beta + 1)i_{B0}$, получаем уравнение

$$E_0 = i_{B0}R_{вн} + u_{БЭ0}(i_{B0}) + i_{B0}(\beta + 1)R_{Э}, \quad (13.4)$$

которому соответствует последовательная схема, показанная на рис. 13.5, а. Причем входящее в формулу (13.4) слагаемое $u_{БЭ0}(i_{B0})$ в цепи на рис. 13.5, а реализуется нелинейным резистором. Его ВАХ является входной характеристикой транзистора $u_{Б}(i_{БЭ})$, изображенной на рис. 13.4, а.

Для расчета тока и напряжения на нелинейном участке цепи (рис. 13.5, а) воспользуемся методикой, применяемой в случае нелинейной нагрузки линейного активного двухполюсника (см. параграф 2.6). На графике входной ВАХ (см. рис. 13.4, а) проводим прямую (1), отсекающую отрезки: по оси напряжения — E_0 ; по оси тока — $E_0/[R_{вн} + (\beta + 1)R_{Э}]$.

Точка пересечения прямой (1) с входной ВАХ (точка А на рис. 13.4, а) определяет режим базовой цепи в состоянии покоя: i_{B0} , $u_{БЭ0}$.

Эквивалентная схема выходной цепи и ее расчет. Для выходной цепи усилителя, содержащей зажимы 2—2' (см. рис. 13.3), ввиду малости тока базы по сравнению с током эмиттера $i_{Э0}$ принято приближенное равенство

$$i_{К0} = i_{Э0} - i_{B0} \approx i_{Э0}.$$

Это позволяет считать $R_{К}$ и $R_{Э}$ включенными последовательно (рис. 13.5, б). Нелинейный резистор на рис. 13.5, б представляет участок между коллектором и эмиттером с напряжением $u_{КЭ0}$. Его ВАХ $i_{К}(u_{КЭ})$ изображается той кривой на семействе выходных характеристик (рис. 13.4, б), которая соответствует найденному базовому току i_{B0} .

Расчет эквивалентной цепи на рис. 13.5, б проводим также по методике параграфа 2.6. На графике выбранной выходной характеристики проводим прямую (2). Эта прямая отсекает отрезки: по оси напряжения $E_{К}$; по оси то-

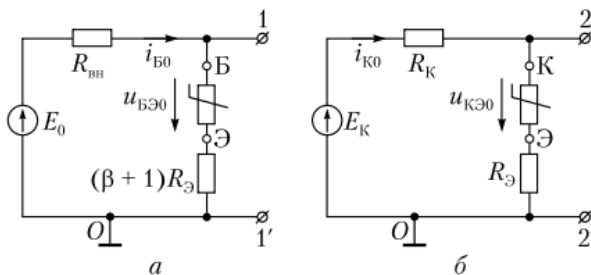


Рис. 13.5. Эквивалентные схемы для расчета режима покоя усилителя на биполярном транзисторе:

а — на входе усилителя; б — на выходе усилителя

ка $E_K/(R_K + R_\Sigma)$. Точка пересечения прямой (2) с выходной ВАХ (точка B на рис. 13.4, б) определяет режим коллекторной цепи при найденном токе i_{B0} , а именно: i_{K0} , $u_{KЭ0}$. Таково состояние покоя на выходе цепи, изображенной на рис. 13.3.

13.2.3. Расчет коэффициента усиления по напряжению

Когда к ЭДС E_0 добавляется малая величина e_c , ток базы i_B и напряжение $u_{БЭ}$ получают приращения, т.е. $i_B = i_{B0} + \Delta i_B$; $u_{БЭ} = u_{БЭ0} + \Delta u_{БЭ}$. Новые значения i_B и $u_{БЭ}$, а также их приращения в принципе могут быть найдены графическим способом по входной ВАХ. Однако ввиду малости величины e_c , а следовательно, и величин Δi_B и $\Delta u_{БЭ}$ точность данного способа неприемлемо низка. Малые величины приращений намного точнее могут быть найдены аналитически по линейной схеме замещения, справедливой только для малых приращений в конкретной рабочей точке.

Обоснование справедливости линейного подхода. По второму закону Кирхгофа для входного контура имеем следующее уравнение:

$$E_0 + e_c = (i_{B0} + \Delta i_B)R_{вн} + (u_{БЭ0} + \Delta u_{БЭ}) + R_\Sigma(i_{B0} + \Delta i_B)(\beta + 1). \quad (13.5)$$

Из уравнения (13.5) вычитаем уравнение покоя (13.4) и приходим к соотношению для приращений

$$e_c = \Delta i_B R_{вн} + \Delta u_{БЭ} + R_\Sigma \Delta i_B (\beta + 1). \quad (13.6)$$

Если в окрестности рабочей точки входную ВАХ принять близкой к линейной, то связь между малыми приращениями тока и напряжения также линейна, а именно:

$$\Delta u_{БЭ} = \Delta i_B R_{\text{диф БЭ}},$$

где $R_{\text{диф БЭ}}$ — дифференциальное сопротивление участка база — эмиттер, определяемое наклоном входной ВАХ в найденной рабочей точке.

Уравнению (13.6) соответствует линейная схема на рис. 13.6, а. Воспользуемся этой схемой для расчета коэффициента усиления по напряжению (с учетом принятых рис. 13.3 обозначений)

$$K_U = \Delta u_{\text{вых}} / \Delta u_{\text{вх}}. \quad (13.7)$$

Согласно рис. 13.6, а приращение напряжения на входе усилителя $\Delta u_{\text{вх}}$ связано с приращением тока базы Δi_B соотношением

$$\Delta i_B = e_c / [R_{\text{вн}} + R_{\text{диф БЭ}} + (\beta + 1)R_\Sigma].$$

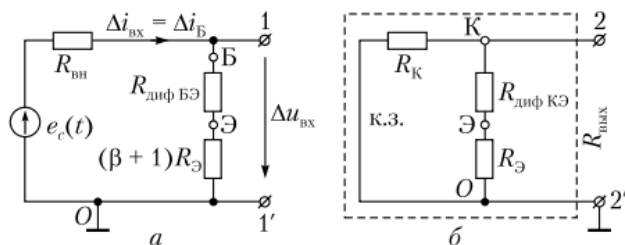


Рис. 13.6. Эквивалентные схемы:

a — базовой цепи для малой переменной составляющей входного сигнала; b — для расчета выходного сопротивления усилителя, изображенного на рис. 13.3

Приращение напряжения на входе усилителя связано с Δi_B соотношением

$$\Delta u_{\text{вх}} = \Delta i_B [R_{\text{дифБЭ}} + (\beta + 1)R_{\text{Э}}]. \quad (13.8)$$

Выразим соответствующее приращение напряжения на выходе усилителя $\Delta u_{\text{вых}}$ через Δi_B , приняв во внимание, что $u_{\text{вых}} = E_K - (i_{K0} + \Delta i_K)R_K$. Тогда

$$\Delta u_{\text{вых}} = -\Delta i_K R_K = -\beta \Delta i_B R_K. \quad (13.9)$$

После подстановки равенств (13.8) и (13.9) в формулу (13.7) получаем

$$K_U = \frac{-\beta \Delta i_B R_K}{\Delta i_B [R_{\text{дифБЭ}} + (\beta + 1)R_{\text{Э}}]} = \frac{-\beta R_K}{R_{\text{дифБЭ}} + (\beta + 1)R_{\text{Э}}}.$$

Так как обычно $R_{\text{дифБЭ}} \ll (\beta + 1)R_{\text{Э}}$, приходим к следующему приближенному соотношению для коэффициента усиления по напряжению:

$$K_U \approx -R_K/R_{\text{Э}}. \quad (13.10)$$

Выражение (13.10) свидетельствует о том, что присутствие эмиттерного сопротивления $R_{\text{Э}}$ снижает влияние параметров транзистора (β и $R_{\text{дифБЭ}}$) на величину коэффициента усиления по напряжению K_U , оказывая стабилизирующее действие при изменении температуры и смене транзистора.

13.2.4. Расчет входного и выходного сопротивлений усилителя

Входное сопротивление $R_{\text{вх}}$ (13.2) усилителя относительно зажимов источника усиливаемого сигнала 1–1' находим из соотношения (13.8), т.е.

$$R_{\text{вх}} = \Delta u_{\text{вх}}/\Delta i_{\text{вх}} = R_{\text{дифБЭ}} + (\beta + 1)R_{\text{Э}}.$$

Выходное сопротивление $R_{\text{вых}}$ (13.3). Для нагрузки, подключаемой к точкам 2 и 2' усилителя, его выходное сопротивление может рассчитываться по эквивалентной схеме пассивного двухполюсника, заданного на рис. 13.6, б. Доказательства ее справедливости здесь не приводим. Присутствующий в схеме на рис. 13.6, б резистор $R_{\text{дифКЭ}}$ — это дифференциальное сопротивление нелинейного участка коллектора — эмиттер. Оно определяется наклоном выходной ВАХ в РТ. Пассивный двухполюсник на рис. 13.6, б по отношению к точкам 2 и 2' обладает сопротивлением

$$R_{\text{вых}} = \frac{R_K(R_{\text{дифКЭ}} + R_{\text{Э}})}{R_K + R_{\text{дифКЭ}} + R_{\text{Э}}}.$$

Поскольку рабочая точка принадлежит пологому участку выходной ВАХ (точка В на рис. 13.4, б), $R_{\text{дифКЭ}}$ имеет порядок сотен килоом. Поэтому $R_{\text{вых}}$ близко к R_K .

13.2.5. Способы задания рабочей точки (смещения)

Согласно ранее сказанному основные параметры усилителя зависят от режима РТ, т.е. от состояния на входе при отсутствии усиливаемого сигнала. Расположение РТ на входной ВАХ зависит от требований, предъявляемых к усилителю. В инженерной практике обеспечение режима РТ принято называть смещением РТ.

Применяют несколько способов «смещения» рабочей точки. В рассмотренной схеме (см. рис. 13.3) использован дополнительный источник ЭДС (называемый **ЭДС смещения**), включенный последовательно с источником сигнала. Недостатки этого способа таковы:

- 1) нежелательное протекание постоянной составляющей входного тока через источник сигнала и его внутреннее сопротивление;
- 2) необходимость наличия второго источника, создающего постоянное и достаточно стабильное напряжение.

Гораздо чаще для получения необходимого напряжения смещения используют источник коллекторного питания. В цепи усилителя на рис. 13.7, *a* напряжение смещения обеспечивается источником коллекторного питания E_K в совокупности с делителем напряжения (R_1, R_2). Такой способ создания напряжения смещения обладает рядом достоинств:

- 1) он не требует дополнительного источника ЭДС;
- 2) благодаря наличию разделительной емкости C_{p1} ток через источник усиливаемого сигнала $e_c(t)$ в состоянии покоя не протекает.

Эквивалентная схема входной цепи в состоянии покоя и ее графический расчет приведены на рис. 13.7, *б, в*. Линейный активный двухполюсник, подключенный к нелинейному участку база — эмиттер цепи, изображенной на рис. 13.7, *a*, имеет следующие параметры:

$$U_{xx БЭ0} = [E_K / (R_1 + R_2)] R_2;$$

$$R_{вх БЭ} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + (\beta + 1) R_Э.$$

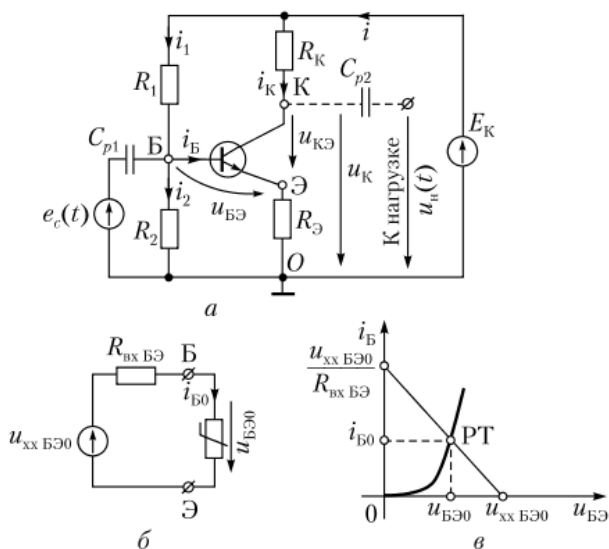


Рис. 13.7. Способ смещения РТ от источника коллекторного питания E_K :

- a* — схема усилителя; *б* — эквивалентная схема входной цепи усилителя;
в — определение положения РТ на входной ВАХ

На рис. 13.8, *a* показан еще один вариант задания состояния покоя при помощи источника коллекторного питания, обеспечивающий достаточно стабильную величину базового тока. Согласно эквивалентной схеме, представленной на рис. 13.8, *б*, базовый ток в режиме покоя равен $i_{Б0} \approx E_K / R_1$, так как $u_{БЭ0} \ll E_K$.

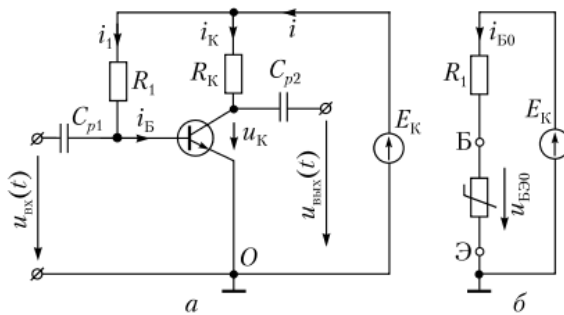


Рис. 13.8. Схема усилителя:

a — вариант схемы, где режим РТ задается величиной базового тока;
б — эквивалентная схема для расчета величины I_{B0}

13.2.6. Режимы «А», «В», «АВ»

В зависимости от расположения рабочей точки (РТ) на входной ВАХ различают режимы «А», «В», «АВ» (рис. 13.9, *a*, *б*, *в* соответственно).

Режим «А». РТ находится примерно в середине крутого линейного участка входной ВАХ (см. рис. 13.9, *a*). Линейная связь между приращениями базового тока и напряжения база — эмиттер позволяет получить выходной сигнал с минимальными нелинейными искажениями (имеется в виду приращение выходного напряжения).

Режим «В». РТ помещается в самом начале входной ВАХ (см. рис. 13.9, *б*). Усилительный каскад рассмотренного вида реагирует только на импульсы одной полярности и достаточно большой величины. Однако форма выходного сигнала значительно отличается от входного. Используется при усилении *мощности однополярных импульсов* (когда искажения формы не столь важны), а также в *двухтактных усилительных схемах*.

В двухтактной схеме двухполярный сигнал одновременно подается на базовые входы двух транзисторов различного типа (*n-p-n* и *p-n-p*). Один из них усиливает импульсы положительной полярности, а другой — отрицательной. Усиленные импульсы обеих полярностей суммируются. Искажения формы сигнала здесь, конечно, имеют место.

Режим «АВ». РТ располагается в начале крутого участка входной ВАХ (см. рис. 13.9, *в*). При этом появляется возможность усиливать однополярные импульсы большой амплитуды практически без искажений, а при использовании двухтактной схемы — и двухполярный сигнал (например, синусоидальный), имеющий большую амплитуду.

В многокаскадном усилителе различают каскады предварительного усиления, промежуточного усиления и оконечные каскады. Предваритель-

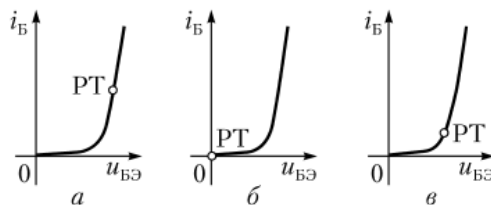


Рис. 13.9. Режимы работы усилителя:

a — режим «А»; *б* — режим «В»; *в* — режим «АВ»

ные — усиливают слабые сигналы и обычно работают в режиме «А», а на вход оконечных каскадов поступают уже усиленные, а следовательно, большие сигналы. Их целесообразно выполнять по двухтактной схеме, работающей в режиме «АВ».

13.2.7. Разделительные цепи

Разделительная цепь — это четырехполюсник (рис. 13.10, а), включаемый в общем случае между n -м и $(n + 1)$ -м каскадами (в частности — между источником усиливаемого сигнала и усилителем). Его входные зажимы соединены с выходом n -го каскада, а выходные — с входом $(n + 1)$ -го каскада.

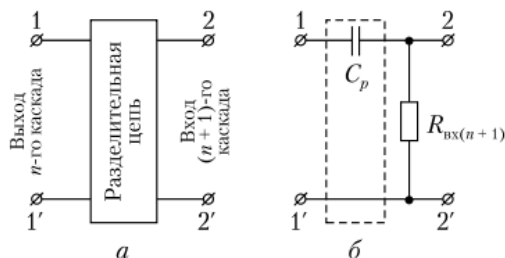


Рис. 13.10. Разделительная цепь:

а — в виде специального четырехполюсника; б — емкостная разделительная цепь

Разделительные функции часто возлагаются на $R_{\text{вх}} C_p$ — звено, показанное на рис. 13.10, б. Причем специального резистивного элемента в данном случае не требуется, его роль выполняет входное сопротивление $(n + 1)$ -го каскада. Конденсатор C_p разделяет по постоянной составляющей n -й и $(n + 1)$ -й каскады. При этом если выполняется достаточно сильное неравенство

$$1/(\omega_n C_p) \ll R_{\text{вх}}, \quad (13.11)$$

где ω_n — самая низкая гармоника в спектре усиливаемого сигнала, то происходит почти полная передача сигнала с выхода n -го каскада на вход $(n + 1)$ -го каскада.

В схемах усилителей, представленных на рис. 13.7 и 13.8, используются две разделительные емкости: C_{p1} и C_{p2} . Назначение первой из них — не пропустить постоянную составляющую тока от цепи смещения усилителя через источник усиливаемого сигнала. Конденсатор C_{p2} исключает протекание постоянной составляющей тока от источника коллекторного питания E_K через сопротивление нагрузки усилителя R_n . Идеальным случаем разделительной цепи является четырехполюсник с коэффициентом передачи по напряжению $K_U = 1$, обладающий очень большим входным сопротивлением $R_{\text{вх}} \rightarrow \infty$ и очень малым выходным сопротивлением $R_{\text{вых}} \rightarrow 0$. Такие четырехполюсники называют **повторителями напряжения**.

13.3. Повторитель напряжения на биполярном транзисторе — эмиттерный повторитель (схема с общим коллектором)

Повторители напряжения — это особый вид усилительных схем, которые не усиливают напряжение, но могут усиливать ток и мощность и поэтому принадлежат к классу усилителей. Их достоинствами являются боль-

шое входное и малое выходное сопротивление. Повторители напряжения строят на биполярных транзисторах, на полевых транзисторах, а также на операционных усилителях.

Для идеального повторителя коэффициент усиления (передачи) по напряжению равен единице ($K = 1$), а для реального повторителя $K \sim 1$ (близок к единице). На рис. 13.11, а приведена схема простейшего повторителя напряжения на биполярном транзисторе. Ее главной особенностью является включение сопротивления нагрузки последовательно с эмиттером, точнее, между эмиттером и точкой O , общей для входа и выхода.

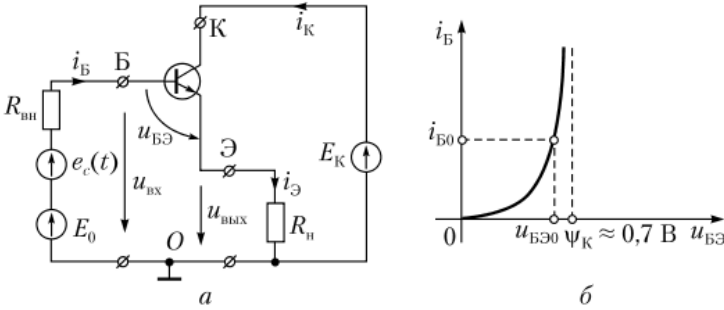


Рис. 13.11. Повторитель напряжения на биполярном транзисторе:

а — схема повторителя; б — необходимое требование при выборе рабочей точки повторителя — принадлежность крутому участку входной ВАХ

Обязательным условием для получения коэффициента передачи напряжения, близкого к единице, является расположение РТ на крутом участке его ВАХ (рис. 13.11, б). Здесь малым приращениям напряжения база — эмиттер соответствуют большие приращения тока базы, а следовательно, и сравнительно небольшие величины дифференциального сопротивления участка база — эмиттер (порядка 200 Ом). Для схемы повторителя (см. рис. 13.11, а) выразим через параметры ее элементов величины коэффициента передачи по напряжению, а также входного и выходного сопротивлений.

13.3.1. Коэффициент передачи по напряжению эмиттерного повторителя

В схеме, представленной на рис. 13.11, коэффициент передачи по напряжению определяется так:

$$K_U = \Delta u_{\text{вых}} / \Delta u_{\text{вх}} = \Delta i_{\text{Э}} R_{\text{н}} / (\Delta u_{\text{БЭ}} + \Delta i_{\text{Э}} R_{\text{н}}). \quad (13.12)$$

С учетом соотношения

$$\Delta u_{\text{БЭ}} = \Delta i_{\text{Б}} R_{\text{диф БЭ}} = \Delta i_{\text{Э}} R_{\text{диф БЭ}} / (\beta + 1)$$

выражение (13.12) принимает вид

$$K_U = \frac{\Delta i_{\text{Э}} R_{\text{н}}}{\Delta i_{\text{Э}} R_{\text{диф БЭ}} / (\beta + 1) + \Delta i_{\text{Э}} R_{\text{н}}} = \frac{(\beta + 1) R_{\text{н}}}{R_{\text{диф БЭ}} + (\beta + 1) R_{\text{н}}}. \quad (13.13)$$

Из формулы (13.13) следует, что при $(\beta + 1) R_{\text{н}} \gg R_{\text{диф БЭ}}$ величиной $R_{\text{диф БЭ}}$ можно пренебречь. Тогда для коэффициента передачи по напряжению эмиттерного повторителя получаем приближенное равенство

$$K_U \approx 1. \quad (13.14)$$

Равенство (13.14) тем точнее, чем больше произведение $(\beta + 1)R_{\text{н}}$ по сравнению с величиной $R_{\text{дифБЭ}}$.

Пример 13.1. Известно, что в цепи на рис. 13.10, а $R_{\text{н}} = 10$ кОм; $R_{\text{дифБЭ}} = 200$ Ом; $\beta + 1 = 50$. Определить коэффициент передачи по напряжению K_U эмиттерного повторителя.

Решение

По формуле (13.12) находим, что $K_U = 0,9996$. Таким образом, в данном эмиттерном повторителе напряжение на нагрузке с высокой точностью повторяет входное напряжение.

13.3.2. Входное и выходное сопротивления повторителя

Расчет входного сопротивления $R_{\text{вх}}$. Так как входной контур повторителя (см. рис. 13.11, а) не отличается от входной цепи усилителя на (см. рис. 13.3), то и расчет $R_{\text{вх}}$ аналогичен расчету для рассмотренной ранее схемы усилителя, а именно:

$$R_{\text{вх}} = \Delta u_{\text{вх}} / \Delta i_{\text{вх}} = R_{\text{дифБЭ}} + (\beta + 1)R_{\text{н}}. \quad (13.15)$$

Пример 13.2. Найти величину входного сопротивления $R_{\text{вх}}$ эмиттерного повторителя, если $R_{\text{н}} = 10$ кОм; $R_{\text{дифБЭ}} = 200$ Ом; $\beta + 1 = 50$.

Решение

Воспользовавшись выражением (13.15), получаем, что $R_{\text{вх}} = 500,2$ кОм. Обращаем внимание, что в данном примере большое входное сопротивление ЭП обусловлено сравнительно большим резистивным сопротивлением в эмиттерной ветви $R_{\text{Э}} = R_{\text{н}} = 10$ кОм.

Расчет выходного сопротивления $R_{\text{вых}}$. Напомним, что выходное сопротивление вычисляется по формуле

$$R_{\text{вых}} = |\Delta u_{\text{н}} / \Delta i_{\text{н}}| \quad (13.16)$$

при следующих условиях: а) возмущение подается со стороны нагрузочных зажимов (например, путем изменения сопротивления нагрузки); б) исключаются какие бы то ни были изменения в схеме и параметрах повторителя, а также в схеме и параметрах источника сигнала (его ЭДС принимается равной нулю).

Пусть при изменении $R_{\text{н}}$ ток и напряжение в нагрузке получили приращения $\Delta i_{\text{н}} = \Delta i_{\text{Э}}$ и $\Delta u_{\text{н}}$ соответственно. Следовательно, ток базы также получил приращение

$$\Delta i_{\text{Б}} = \Delta i_{\text{Э}} / (\beta + 1). \quad (13.17)$$

По второму закону Кирхгофа для входного контура (относительно приращений) справедливо уравнение

$$0 = \Delta u_{\text{н}} + \Delta i_{\text{Б}} R_{\text{вн}} + \Delta i_{\text{Б}} R_{\text{дифБЭ}},$$

из которого следует, что

$$\Delta u_{\text{н}} = -\Delta i_{\text{Б}} (R_{\text{вн}} + R_{\text{дифБЭ}}). \quad (13.18)$$

Из равенства (13.18) очевидно, что изменение напряжения $\Delta u_{\text{н}}$ на сопротивлении $R_{\text{н}}$ уравнивается изменениями напряжений, вызванными приращениями базового тока на двух сопротивлениях — $R_{\text{вн}}$ и $R_{\text{дифБЭ}}$.

Выходное сопротивление $R_{\text{вых}}$ можно определить, если в равенство (13.16) подставить выражения (13.17) и (13.18), т.е.

$$R_{\text{вых}} = |\Delta u_{\text{н}}/\Delta i_{\text{н}}| = |\Delta u_{\text{н}}/\Delta i_{\text{Э}}| = |-\Delta i_{\text{Б}}(R_{\text{вн}} + R_{\text{диф.БЭ}})/[\Delta i_{\text{Б}}(\beta + 1)]|.$$

После сокращения на $\Delta i_{\text{Б}}$ получаем окончательную формулу для выходного сопротивления эмиттерного повторителя:

$$R_{\text{вых}} = (R_{\text{вн}} + R_{\text{диф.БЭ}})/(\beta + 1). \quad (13.19)$$

Если источник сигнала обладает пренебрежительно малым внутренним сопротивлением, то из равенства (13.19) получаем $R_{\text{вых}} \approx R_{\text{диф.БЭ}}/(\beta + 1)$. В случае же высокоомного источника, когда $R_{\text{вн}} \gg R_{\text{диф.БЭ}}$, выходное сопротивление эмиттерного повторителя определяется его внутренним сопротивлением $R_{\text{вн}}$ и величиной β , т.е. в соответствии с формулой (13.19) $R_{\text{вых}} \approx R_{\text{вн}}/(\beta + 1)$.

Пример 13.3. Найти величину выходного сопротивления $R_{\text{вых}}$ эмиттерного повторителя, если $R_{\text{вн}} = 300$ Ом; $R_{\text{диф.БЭ}} = 200$ Ом; $\beta + 1 = 100$.

Решение

В соответствии с формулой (13.19) находим, что $R_{\text{вых}} = 5$ Ом. Этот результат в значительной степени обусловлен большой величиной коэффициента β используемого транзистора.

13.4. Усилители на полевых транзисторах

Возможность использования полевого транзистора в усилительных цепях следует из вида его ВАХ. Как и биполярный, полевой транзистор является трехполюсником, а семейство его выходных характеристик подобно выходным ВАХ биполярного транзистора.

По аналогии с биполярными транзисторами возможны три схемы включения полевого транзистора: с общим затвором (ОЗ), общим истоком (ОИ), общим стоком (ОС). Наибольшее распространение получила схема с общим истоком (рис. 13.12) — аналог схемы с общим эмиттером (см. рис. 13.3).

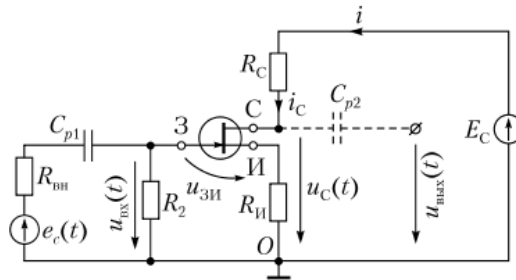


Рис. 13.12. Схема усилителя на полевом транзисторе с управляющим p - n -переходом

13.4.1. Методика расчета основных параметров усилителя низкой частоты на полевом транзисторе с управляющим p - n -переходом

Основные элементы схемы простейшего усилителя на полевом транзисторе с p - n -затвором (см. рис. 13.12) считаем известными. К ним относятся: ЭДС источника питания E_C ; сопротивление резистора, подключенного к стоку, R_C ; сопротивление резистора, подключенного к истоку, $R_{\text{И}}$; и сопро-

тивление резистора, соединяющего электрод затвора с общей точкой O , R_2 . Полевой транзистор обычно задается семейством выходных характеристик (рис. 13.13, а): $i_c(u_{си})$ при $u_{зи} = \text{const}$. Поскольку входное сопротивление рассматриваемой схемы включает в себя сопротивление участка затвор — исток полевого транзистора, а оно очень велико, то с точки зрения усилительных качеств схемы оценке подлежат две величины: коэффициент усиления по напряжению и выходное сопротивление. Выразим их через параметры элементов усилителя.

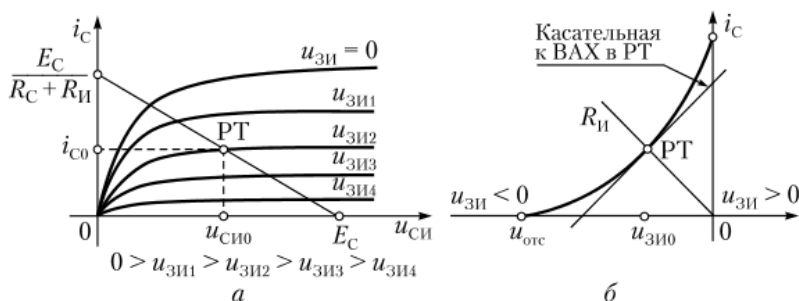


Рис. 13.13. К методике расчета основных параметров усилителя:

а — заданное семейство выходных характеристик полевого транзистора;
б — передаточная ВАХ при $u_{си} \approx E_C/2$

Ввиду того что обе искомые величины определяются значением крутизны транзистора S в РТ (а она находится по его стокзатворной характеристике), для дальнейшего анализа необходимо по заданным выходным ВАХ получить стокзатворную характеристику и определить на ней положение РТ.

Напомним, что стокзатворная (или передаточная) характеристика транзистора (12.4) есть зависимость

$$i_c = i_c(u_{зи})|_{u_{си} = \text{const}},$$

где $u_{си}$ принимается достаточно большим, чтобы обеспечить активный режим работы транзистора. Обычно берут $u_{си}$ примерно равным $E_C/2$. Получение зависимости $i_c(u_{зи})$ при $u_{си} = E_C/2$ проводим по методике, изложенной в подпараграфе 12.4.2, а именно: на заданном семействе выходных ВАХ проводим вертикаль $u_{си} = E_C/2$. По точкам пересечения ее с кривыми семейства выходных ВАХ строим искомую стокзатворную характеристику (рис. 13.13, б).

13.4.2. Особенности задания рабочей точки

Обратим внимание на отличие способа схемного обеспечения режима рабочей точки в усилителях, выполненных на полевых транзисторах с p - n -затвором, от применяемых в схемах с биполярными транзисторами.

В рассматриваемом нами случае n -канального транзистора (см. рис. 13.12) напряжение $u_{зи}$ отрицательно, а полярность источника питания («плюс» к стоку) не позволяет создать (в совокупности с делителем) отрицательный потенциал на затворе относительно истока в состоянии покоя.

В схеме на рис. 13.12 эти функции выполняют резистор $R_и$ (включенный между истоком и общей точкой) и резистор R_2 , (соединяющий общую точку O с затвором).

Назначение резистора R_2 . В состоянии покоя, т.е. при отсутствии усиливаемого сигнала, через R_2 ток не течет, напряжение на нем равно нулю, поэтому потенциал затвора равен потенциалу точки O . Конкретная величина сопротивления R_2 не значима. Однако, чтобы не допустить существенного снижения входного сопротивления усилителя (R_2 включено параллельно входу), его обычно выбирают равным величине порядка нескольких мегаом.

Таким образом, *функция резистора R_2 — выравнивание потенциалов затвора и общей точки O в состоянии покоя.*

Назначение резистора R_{II} . Он нужен, чтобы создать разницу в потенциалах истока и общей точки O . Допустим, что в состоянии покоя через резистор R_{II} течет ток i_{C0} . Тогда потенциал истока выше потенциала точки O на величину $i_{C0}R_{II}$, а разница потенциалов затвора и истока в состоянии покоя составляет

$$u_{з\text{и}0} = \varphi_з - \varphi_{II} = -i_{C0}R_{II}. \quad (13.20)$$

Таким образом, *присутствие резистора R_{II} смещает рабочую точку усилителя* (см. рис. 13.12) *в область отрицательных значений напряжений $u_{з\text{и}0}$.*

13.4.3. Определение положения рабочей точки на стокзатворной характеристике

Согласно соотношению (13.20) величина $u_{з\text{и}0}$ зависит от тока в канале i_C по закону прямой линии, проходящей через начало координат. Ее наклон пропорционален сопротивлению R_{II} (см. рис. 13.13, б). Данной прямой должна принадлежать искомая рабочая точка (ее координаты $u_{з\text{и}0}$ и i_{C0}). Одновременно координаты РТ обязаны удовлетворять и стокзатворной ВАХ транзистора, а следовательно, находиться в точке пересечения прямой $u_{з\text{и}} = -i_C R_{II}$ и стокзатворной ВАХ.

На ВАХ рис. 13.13, б через начало координат проведена прямая $u_{з\text{и}} = -i_C R_{II}$. Точка пересечения ее со стокзатворной характеристикой (точка РТ) является рабочей точкой. Находим ее координаты: $u_{з\text{и}0}$ и i_{C0} , а также крутизну транзистора в этой точке: $S = \Delta i_C / \Delta u_{з\text{и}}$ при $u_{з\text{и}} = u_{з\text{и}0}$.

13.4.4. Положение рабочей точки на семействе выходных характеристик

На семействе выходных ВАХ (см. рис. 13.13, а) рабочая точка принадлежит кривой, соответствующей управляющему напряжению $u_{з\text{и}} = u_{з\text{и}0}$. Тогда на эквивалентной схеме выходной цепи (рис. 13.14, а) канал сток-исток представляется нелинейным резистором. Его ВАХ $i_C(u_{СИ})$ при $u_{з\text{и}} = u_{з\text{и}0}$ от-

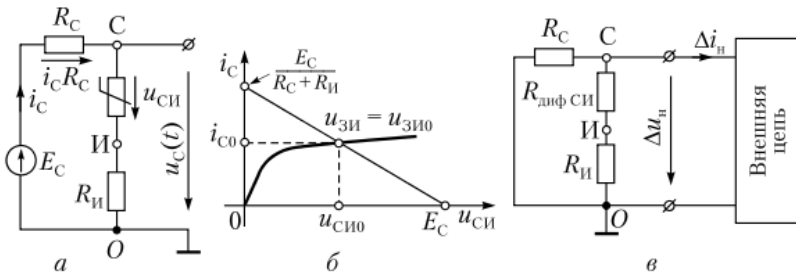


Рис. 13.14. Выходная цепь усилителя:

а — эквивалентная схема; б — ее графический расчет для режима покоя;
в — линейная схема замещения для расчета $R_{\text{вых}}$

дельно изображена на рис. 13.14, б. Графический расчет эквивалентной схемы на рис. 13.14, а (показанный на рис. 13.14, б) позволяет найти координаты РТ на выходной ВАХ: u_{C0} и i_{C0} , а также величину напряжения на выходе схемы в состоянии покоя: $u_{C0} = E_C - i_{C0}R_C$.

13.4.5. Расчет коэффициента усиления

Допустим, что через разделительную емкость на вход схемы на рис. 13.12 (между затвором и общей точкой O) поступил усиливаемый сигнал $\Delta u_{вх}$. В этом случае $u_{зп} \neq u_{зп0}$, $u_{зп}$ получает переменную составляющую $\Delta u_{зп}$. Соответствующее приращение тока в канале равно Δi_C . Эти два приращения связаны через крутизну S : $\Delta i_C = \Delta u_{зп}S$.

Получим выражение, связывающее $\Delta u_{зп}$ и $\Delta u_{вх}$, представив приращение напряжения на входе в виде суммы двух слагаемых: 1) изменение напряжения между затвором и истоком $\Delta u_{зп}$; 2) изменение напряжения на резисторе $R_{п}$ за счет приращения тока Δi_C :

$$\Delta u_{вх} = \Delta u_{зп} + \Delta i_C R_{п} = \Delta u_{зп} + \Delta u_{зп} S R_{п}. \quad (13.21)$$

Коэффициент усиления по напряжению по определению равен $K_U = \Delta u_{вх} / \Delta u_{вх}$. Учтем, что выходное напряжение есть разность потенциалов между стоком и общей точкой O , т.е. равно потенциалу стока. Тогда справедливы равенства

$$u_{вх} = E_C - i_C R_C; \quad \Delta u_{вх} = -\Delta i_C R_C = -\Delta u_{зп} S R_C. \quad (13.22)$$

Пользуясь соотношениями (13.21) и (13.22), для искомого коэффициента усиления по напряжению получаем выражение

$$K_U = S R_C / (1 + S R_{п}). \quad (13.23)$$

Если произведение $S R_{п} \gg 1$, то на основании выражения (13.23) можно записать приближенное равенство

$$K_U \approx -R_C / R_{п}.$$

Следовательно, присутствие в схеме усилителя (см. рис. 13.12) сопротивления $R_{п}$ позволяет снизить степень влияния параметров полевого транзистора на величину коэффициента усиления по напряжению K_U . Несмотря на то что с ростом $R_{п}$ коэффициент усиления K_U (13.23) падает, в целом включение резистора $R_{п}$ оказывает положительное воздействие на работу схемы усилителя. Однако при этом необходимо признать, что слишком большие значения $R_{п}$ смещают РТ на стокзатворной характеристике транзистора в сторону уменьшения крутизны S , что нежелательно.

13.4.6. Выходное сопротивление

По отношению к выходным зажимам (точки C и O) схема усилителя (см. рис. 13.12) представляет собой нелинейный активный двухполюсник, который показан на рис. 13.14, а. Входное сопротивление этого двухполюсника и является выходным сопротивлением усилителя. По определению (13.3) выходное сопротивление усилителя $R_{вх}$ выражается через малые приращения напряжения и тока во внешней (нагрузочной) ветви усилителя: $R_{вх} \approx |\Delta u_{н} / \Delta i_{н}|_{РТ}$.

Линеаризация ВАХ транзистора в окрестности РТ позволяет найти выходное сопротивление усилителя по линейной схеме (см. рис. 13.14, в) представляющей собой пассивный двухполюсник. Он получен из активного двухполюсника, изображенного на рис. 13.14, а, следующим образом: 1) интенсивность источника ЭДС E_C принимается равной нулю; 2) нелинейный резистор, включенный между стоком и истоком, заменен линейным резистором $R_{\text{дифСИ}}$.

В соответствии с эквивалентной схемой, представленной на рис. 13.14, в, находим:

$$R_{\text{вых}} = \Delta u_{\text{н}} / \Delta i_{\text{н}} = \Delta u_{\text{вых}} / \Delta i_{\text{н}} = \frac{(R_{\text{дифСИ}} + R_{\text{И}})R_{\text{С}}}{R_{\text{дифСИ}} + R_{\text{И}} + R_{\text{С}}} \quad (13.24)$$

(последовательно включенные $R_{\text{дифСИ}}$ и $R_{\text{И}}$ параллельны с $R_{\text{С}}$). Так как дифференциальное сопротивление участка сток – исток $R_{\text{дифСИ}}$, определяемое по наклону выходной характеристики в РТ, имеет порядок 100 кОм, а величина сопротивления $R_{\text{С}}$, как правило, значительно меньше, то согласно формуле (13.24) $R_{\text{вых}}$ близко к $R_{\text{С}}$.

13.5. Повторитель напряжения на полевом транзисторе (истоковый повторитель). Методика расчета основных параметров

Главной особенностью схемы истокового повторителя (рис. 13.15) является включение сопротивления нагрузки между истоком и общей точкой O . Потенциал стока относительно точки O в этом случае фиксирован (равен ЭДС источника питания E_C). Это является признаком принадлежности данной схемы к классу схем с общим стоком.

Истоковый повторитель является аналогом эмиттерного повторителя (схемы с общим коллектором). Отметим наиболее важные отличия истокового повторителя от эмиттерного:

- 1) истоковый повторитель обладает много бóльшим входным сопротивлением, чем эмиттерный, можно считать $R_{\text{вх}} = \infty$;
- 2) в отличие от эмиттерного повторителя (см. параграф 13.3) его выходное сопротивление не зависит от внутреннего сопротивления источника передаваемого сигнала $R_{\text{вн}}$, так как ток через $R_{\text{вн}}$ не течет.

Выразим искомые величины коэффициента передачи напряжения K_U и выходного сопротивления $R_{\text{вых}}$ повторителя через параметры его элементов. Предполагаем, что ЭДС источника питания E_C , ЭДС смещения E_0 и сопротивление нагрузки $R_{\text{н}}$ известны, стокзатворная ВАХ n -канального транзистора с p - n -затвором задана на рис. 13.15, б.

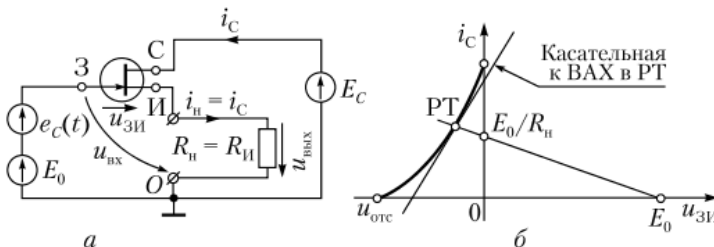


Рис. 13.15. Повторитель напряжения на полевом транзисторе: а – схема повторителя; б – положение РТ на стокзатворной характеристике

13.5.1. Определение рабочей точки на стокозатворной характеристике

Поскольку оба искомого параметра (K_U и $R_{\text{вых}}$) зависят от крутизны транзистора S в рабочей точке, то первоочередным шагом является определение положения РТ на его стокозатворной ВАХ.

В состоянии покоя (при отсутствии усиливаемого сигнала) для входного контура по второму закону Кирхгофа имеем уравнение $E_0 = u_{\text{зи}} + i_C R_n$, или $u_{\text{зи}} = E_0 - i_C R_n$.

Таким образом, ток стока и напряжение между затвором и истоком в режиме покоя связаны уравнением прямой, отсекающей по оси напряжения отрезок E_0 , а по оси тока — E_0/R_n . Она построена на рис. 13.15, б. Пересечение этой прямой и стокозатворной ВАХ определяет РТ повторителя.

Проводим касательную к ВАХ в найденной рабочей точке и по ее наклону ($\Delta i_C/\Delta u_{\text{зи}}$) находим крутизну S в РТ.

13.5.2. Коэффициент передачи по напряжению

Выразим приращения напряжений на входе и выходе усилителя через $\Delta u_{\text{зи}}$:

$$\begin{aligned}\Delta u_{\text{вых}} &= \Delta u_{\text{и}} = \Delta i_C R_n = \Delta u_{\text{зи}} S R_n; \\ \Delta u_{\text{вх}} &= \Delta u_{\text{зи}} + \Delta i_C R_n = \Delta u_{\text{зи}} + \Delta u_{\text{зи}} S R_n.\end{aligned}$$

После подстановки полученных выражений в формулу (13.1) получим следующее уравнение для вычисления коэффициента передачи по напряжению истокового повторителя:

$$K_U = S R_n / (1 + S R_n).$$

При $S R_n \gg 1$ K_U близок к 1. Однако выполнение условия $S R_n \gg 1$ ввиду относительно небольших значений крутизны S затруднительно.

13.5.3. Выходное сопротивление

В соответствии с общим выражением (13.3) выходное сопротивление равно

$$R_{\text{вых}} = \left. \frac{du_{\text{и}}}{di_{\text{и}}} \right|_{\text{РТ}} \approx \left| \frac{\Delta u_{\text{и}}}{\Delta i_{\text{и}}} \right| = \left| \frac{\Delta u_{\text{и}}}{\Delta i_C} \right|. \quad (13.25)$$

При нахождении этого параметра возмущение должно поступать со стороны нагрузки. В то же время никакие изменения в источнике сигнала и в усилителе не допускаются.

Предположим, что по причине изменения сопротивления нагрузки R_n напряжение на нагрузке изменилось на величину $\Delta u_{\text{и}}$. Тогда для входного контура согласно второму закону Кирхгофа относительно приращений справедливо равенство $\Delta u_{\text{зи}} + \Delta u_{\text{и}} = 0$, или $\Delta u_{\text{и}} = -\Delta u_{\text{зи}}$. Поскольку величины $\Delta u_{\text{зи}}$ и Δi_C связаны между собой через крутизну S , а именно $\Delta u_{\text{зи}} = \Delta i_C / S = \Delta i_{\text{и}} / S$, то из записанных равенств следует, что

$$\Delta u_{\text{и}} = -\Delta i_{\text{и}} / S. \quad (13.26)$$

После подстановки выражения (13.26) в формулу (13.25) получаем для выходного сопротивления истокового повторителя следующее равенство:

$$R_{\text{вых}} \approx \left| \frac{\Delta u_{\text{и}}}{\Delta i_{\text{и}}} \right| = 1/S. \quad (13.26a)$$

Ввиду того что полевые транзисторы обладают сравнительно небольшой крутизной (порядка 5 мА/В), схема на рис. 13.15, а не позволяет получить низкие (как у эмиттерного повторителя) значения выходного сопротивления. Например, если $S = 5$ мА/В, то по формуле (13.26а) находим, что $R_{\text{вых}} = 200$ Ом.

По отношению к внешней цепи, подключаемой к выходным зажимам (точки И и О на рис. 13.15, а), истоковый повторитель обладает выходным сопротивлением

$$R_{\text{вых}} = \frac{R_{\text{И}}/S}{R_{\text{И}} + 1/S}, \quad (13.27)$$

которое не превышает величину $1/S$.

Пример 13.4. Определить выходное сопротивление истокового повторителя (см. рис. 13.15, а), если сопротивление нагрузки $R_{\text{н}} = R_{\text{И}} = 1,8$ кОм, а крутизна $S = 5$ мА/В.

Решение

Пользуясь выражением (13.27), находим, что $R_{\text{вых}} = 180$ Ом.

13.6. Усилители с обратной связью

Под **обратной связью** (ОС) понимается подача части выходного сигнала на вход через специальный четырехполюсник, называемый четырехполюсником обратной связи или цепью обратной связи (рис. 13.16). Коэффициент передачи по напряжению цепи ОС обозначим γ (в отличие от собственного коэффициента усиления заданного усилителя K) и будем его называть **коэффициентом обратной связи**.

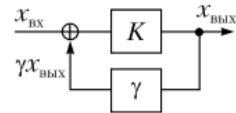


Рис. 13.16. Усилитель, охваченный обратной связью

13.6.1. Способы получения сигнала обратной связи

Электрический сигнал, как известно, характеризуется напряжением и током. Поэтому различают: а) ОС по напряжению; б) ОС по току.

Получение ОС по напряжению. В этом случае напряжение с выхода усилителя подается одновременно на сопротивление нагрузки $R_{\text{н}}$ и на вход четырехполюсника ОС, как это показано на рис. 13.17, а. Напряжение на выходе четырехполюсника ОС равно $u_{\text{ОС}} = \gamma u_{\text{вых}}$.

Получение ОС по току. В схеме на рис. 13.17, б напряжение $i_{\text{н}} R_{\text{ОС}}$ (пропорциональное току $i_{\text{н}}$) снимается с резистора $R_{\text{ОС}}$ (включенного последовательно с $R_{\text{н}}$). Оно подается на вход четырехполюсника ОС. Напряжение на его выходе также пропорционально току $i_{\text{н}}$, а именно $u_{\text{ОС}} = i_{\text{н}} R_{\text{ОС}} \gamma$.

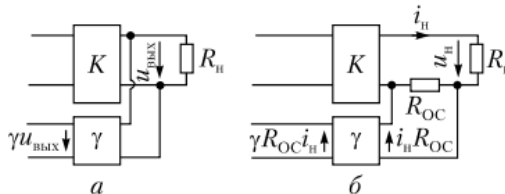


Рис. 13.17. Разновидности получения сигнала обратной связи:

а — по напряжению; б — по току

Здесь предполагается, что входное сопротивление цепи ОС очень велико, поэтому токи через R_{OC} и $R_{\text{н}}$ можно считать одинаковыми.

13.6.2. Способы введения сигнала обратной связи

Введение сигнала обратной связи может осуществляться последовательным или же параллельным способом [10].

Последовательный ввод ОС (рис. 13.18, а). Выходные зажимы четырехполюсника ОС включаются последовательно с источником усиливаемого сигнала. При этом напряжение обратной связи u_{OC} либо суммируется с сигналом, либо вычитается. В схеме, изображенной на рис. 13.18, а, на вход усилителя поступает напряжение $u = u_{\text{вх}} - u_{OC}$.

Параллельный ввод ОС (рис. 13.18, б). Как показано в блок-схеме на рис. 13.18, б, ток на входе усилителя i при таком способе введения ОС равен сумме (в общем случае алгебраической) тока $i_{\text{вх}}$, подаваемого от источника усиливаемого сигнала, и тока i_{OC} , поступающего из цепи обратной связи: $i = i_{\text{вх}} + i_{OC}$.

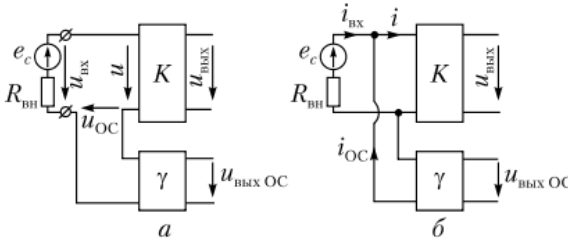


Рис. 13.18. Ввод обратной связи:

а — последовательный ввод; б — параллельный ввод

13.6.3. Усилитель, охваченный последовательной отрицательной обратной связью по напряжению

Рассмотрим главные особенности, присущие усилителю с последовательной обратной связью по напряжению (рис. 13.19) как наиболее часто используемой.

При принятых на рис. 13.19 положительных направлениях напряжение на входе основного усилителя u равно разности напряжения $u_{\text{вх}}$ и напряжения обратной связи u_{OC} , т.е. $u = u_{\text{вх}} - u_{OC}$. Такая обратная связь называется **отрицательной** (сокращенно обозначается ООС).

Выразим результирующий коэффициент передачи по напряжению усилителя с обратной связью $K_{\text{рез}} = u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}$ через коэффициенты усиления K и обратной связи γ . Для определенности предполагаем, что K и γ имеют одинаковые знаки.

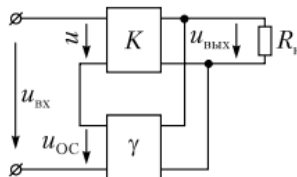


Рис. 13.19. Усилитель, охваченный отрицательной обратной связью по напряжению

Записываем соотношения: $u_{\text{вх}} = u + u_{\text{ОС}}$; $u = u_{\text{вых}}/K$; $u_{\text{ОС}} = u_{\text{вых}}\gamma$, из которых следует, что

$$u_{\text{вх}} = (u_{\text{вых}}/K) + u_{\text{вых}}\gamma. \quad (13.28)$$

Тогда для $K_{\text{рез}}$ на основании равенства (13.28) окончательно получаем

$$K_{\text{рез}} = u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}} = K/(1 + \gamma K). \quad (13.29)$$

Произведение γK называется **петлевым коэффициентом усиления**. Так как в рассматриваемом случае величина $1 + \gamma K > 1$, то $K_{\text{рез}} < K$.

Вывод. Отрицательная обратная связь уменьшает результирующий коэффициент усиления. Однако это обстоятельство не относят к недостаткам ООС.

13.6.4. Усилитель с большим коэффициентом усиления, охваченный отрицательной обратной связью по напряжению

Рассмотрим случай, когда коэффициент усиления основного усилителя K настолько велик, что выполняется неравенство

$$\gamma K \gg 1. \quad (13.30)$$

С учетом неравенства (13.30) из соотношения (13.29) следует приближенное равенство

$$K_{\text{рез}} \approx 1/\gamma.$$

Таким образом, при выполнении условия (13.30) $K_{\text{рез}}$ практически не зависит от коэффициента усиления основного усилителя K и поэтому не критичен к его неустойчивости. В то же время стабильность коэффициента обратной связи γ несложно обеспечить, так как цепь ОС обычно состоит из пассивных элементов (чаще всего из R и C).

13.6.5. Достоинства отрицательной обратной связи

Можно назвать следующие достоинства ООС:

1) повышенная стабильность коэффициента усиления при воздействии дестабилизирующих факторов (температуры среды, изменения напряжения питания и др.);

2) снижение всех видов искажений;

3) увеличение входного и уменьшение выходного сопротивлений, так как можно показать [10], что:

$$R_{\text{вх}}^{\text{ООС}} = R_{\text{вх}}(1 + \gamma K); \quad R_{\text{вых}}^{\text{ООС}} \approx R_{\text{вых}}/(1 + \gamma K), \quad (13.31)$$

где $R_{\text{вх}}^{\text{ООС}}$, $R_{\text{вых}}^{\text{ООС}}$ — параметры усилителя с ООС; $R_{\text{вх}}$ и $R_{\text{вых}}$ — параметры усилителя без ОС.

Для гипотетического усилителя с собственным коэффициентом усиления $K \rightarrow \infty$, охваченного ООС по напряжению, в соответствии с (13.29) и (13.31)

$$K_{\text{рез}} = 1/\gamma; \quad R_{\text{вх}}^{\text{ООС}} \rightarrow \infty; \quad R_{\text{вых}}^{\text{ООС}} = 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите основную функцию электронного усилителя.
2. Какого вида зависимости принято называть входной и выходной характеристиками усилителя?

3. Какое состояние электронного усилителя называется рабочей точкой?
4. Что понимается под коэффициентом усиления по напряжению K_U (по току K_I , по мощности K_P)?
5. Дайте определение понятиям: входное $R_{вх}$ и выходное $R_{вых}$ сопротивления усилителя. Сформулируйте требования, предъявляемые к величинам $R_{вх}$ и $R_{вых}$.
6. Для электронного усилителя на биполярном транзисторе (см. рис. 13.3) заданы: $R_K = 1$ кОм; $R_Э = 200$ Ом; $\beta = 50$. Дайте приблизительную оценку величинам K_U , $R_{вх}$ и $R_{вых}$.
7. Назовите наиболее употребимые способы задания рабочей точки (РТ) для усилителей на биполярном транзисторе.
8. Какие режимы усилителя на биполярном транзисторе принято обозначать как «А», «В», «АВ»?
9. Каковы функции разделительных цепей, присутствующих обычно в схемах с электронными усилителями?
10. Какие требования предъявляются к параметрам элементов разделительной RC-цепи?
11. Назовите требования, предъявляемые к величинам K_U , $R_{вх}$, $R_{вых}$ электронных схем, которые принято называть повторителями напряжения.
12. Какие изменения необходимо внести в схему усилителя на рис. 13.3, чтобы она стала повторителем напряжения? Укажите также необходимое положение РТ на входной ВАХ транзистора.
13. Почему повторитель напряжения на биполярном транзисторе называется эмиттерным повторителем (ЭП)?
14. Каково влияние параметра β (коэффициента передачи базового тока) транзистора, используемого в схеме ЭП, на величины K_U , $R_{вх}$, $R_{вых}$?
15. Для ЭП, заданного на рис. 13.11, известны: $R_{и1} = 5$ кОм; $R_{диф БЭ} = 250$ Ом; $R_{вн} = 1,25$ кОм; $\beta = 60$. Рассчитайте соответствующие величины K_U , $R_{вх}$ и $R_{вых}$.
16. Каковы основные функции повторителей в многокаскадных схемах?
17. Отметьте отличительные свойства электронного усилителя на полевом транзисторе (см. рис. 13.12) от усилителей на биполярных транзисторах (см. рис. 13.3 и 13.7). Каким образом в усилителе на рис. 13.12 обеспечивается режим РТ?
18. Каково влияние крутизны S транзистора в РТ на величины K_U , $R_{вх}$ и $R_{вых}$ усилителя, изображенного на рис. 13.12?
19. Для истокового повторителя (рис. 13.15) заданы: $S = 4$ мА/В; $R_{и1} = 2$ кОм. Определите K_U и $R_{вых}$. Как изменятся эти величины, если выходное напряжение $u_{и1}$ подать на вход следующего каскада, обладающего входным сопротивлением $R_{вх} = 3$ кОм?
20. Что понимается под обратной связью (ОС) в схеме усилителя? Изобразите блок-схему усилителя, охваченного ОС.
21. Что понимается под ОС по напряжению и по току? Как получить сигнал, пропорциональный: а) напряжению на нагрузке u_n , б) току в нагрузке i_n ?
22. Назовите способы введения сигнала ОС. В каком случае ОС называется отрицательной (ООС)?
23. Получите выражение для результирующего коэффициента усиления $K_{рез}$ для усилителя, охваченного последовательной ООС по напряжению, через коэффициенты передачи основного усилителя K и четырехполюсника ОС γ .
24. Как влияют величины K и γ на $K_{рез}$, а также на входное и выходное сопротивления усилителя с ООС?

Глава 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ И ОПЕРАЦИОННЫЙ УСИЛИТЕЛИ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- главные свойства дифференциального усилителя, идеального и реального операционного усилителя;
- методы расчета установившихся и переходных процессов в цепях, содержащих дифференциальный и операционный усилители;

уметь

- учитывать наличие дифференциального и операционного усилителей при расчете режима в их внешней цепи;

владеть

- навыками классификации вида задачи по расчету режима в цепи с дифференциальным и операционным усилителями;
 - методикой выбора оптимального расчетного метода.
-

14.1. Дифференциальный усилитель. Методика расчета основных параметров

Важной практической задачей, стоящей перед электронной техникой, является усиление медленно изменяющихся сигналов. Она решается при помощи специального класса усилителей, называемых **усилителями постоянного тока**. К ним относятся и дифференциальные усилители (ДУ).

Дифференциальные усилители позволяют усилить разность двух медленно изменяющихся сигналов. Причем *для идеального ДУ выходное напряжение определяется только разностью усиливаемых сигналов и не зависит от их уровня.*

14.1.1. Структурные особенности схемы дифференциального усилителя

Простейший дифференциальный каскад (рис. 14.1) содержит два идентичных по параметрам транзистора T_1 и T_2 , обеспечивающих симметрию состояния схемы как в режиме покоя, так и при равенстве сигналов, подаваемых на базовые входы этих транзисторов (B_1 и B_2) относительно общей точки O .

Входные зажимы усилителя. Пары зажимов « $B_1 - O$ » и « $B_2 - O$ » называются *инвертирующим* и *неинвертирующим входами* соответственно, а пара « $B_1 - B_2$ » — *дифференциальным входом*.

Выходные зажимы усилителя. Выходными зажимами данного усилителя являются коллекторы транзисторов T_1 и T_2 , обозначенные на рис. 14.1

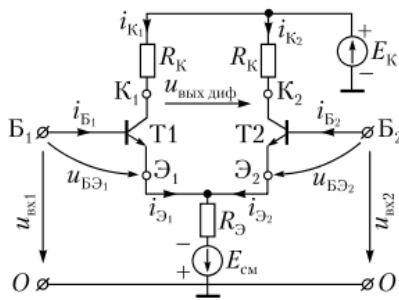


Рис. 14.1. Схема дифференциального усилителя

как K_1 и K_2 соответственно. Пара зажимов $K_1 - K_2$ называется *дифференциальным выходом*, а напряжение $u_{\text{вых}} = \varphi_{K_1} - \varphi_{K_2}$ — *дифференциальным выходным напряжением*.

Опишем методику расчета основных параметров дифференциального каскада (см. рис. 14.1). Параметры элементов $R_K, R_{\text{Э}}, E_K, E_{\text{см}}$ считаем известными. Входная ВАХ транзисторов T_1 и T_2 приведена на рис. 14.2, а. Семейство выходных характеристик также известно. Напряжения на входах транзисторов $u_{\text{вх1}}$ и $u_{\text{вх2}}$ при отсутствии усиливаемого сигнала полагаем равными нулю.

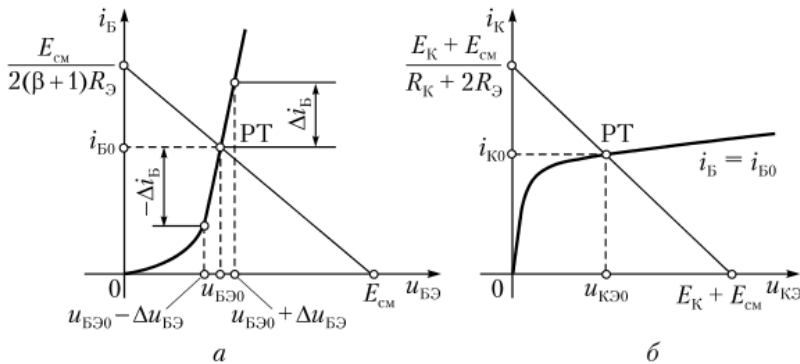


Рис. 14.2. Определение РТ дифференциального усилителя:
а — на входной ВАХ; б — на выходной ВАХ

14.1.2. Расчет базовой цепи в режиме покоя

Рассмотрим контур, содержащий инвертирующий вход, участок база — эмиттер первого транзистора, резистор $R_{\text{Э}}$ и ЭДС смещения $E_{\text{см}}$. Записываем для него уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$E_{\text{см}} = u_{\text{БЭ1}}(i_{\text{Б1}}) + (i_{\text{Э1}} + i_{\text{Э2}})R_{\text{Э}} = u_{\text{БЭ1}}(i_{\text{Б1}}) + [(\beta_1 + 1)i_{\text{Б1}} + (\beta_2 + 1)i_{\text{Б2}}]R_{\text{Э}}. \quad (14.1)$$

Аналогичное уравнение справедливо для контура, содержащего вход $B_2 - O$. Ввиду идентичности транзисторов можно опустить индексы «1» и «2», тогда уравнение (14.1) принимает вид

$$E_{\text{см}} = u_{\text{БЭ}}(i_{\text{Б}}) + 2(\beta + 1)i_{\text{Б}}R_{\text{Э}}. \quad (14.2)$$

Из уравнения (14.2) следует равенство

$$E_{\text{см}} - 2(\beta + 1)i_{\text{Б}}R_{\text{Э}} = u_{\text{БЭ}}(i_{\text{Б}}). \quad (14.3)$$

В левой части равенства (14.3) стоит линейная функция аргумента $i_{\text{Б}}$, а в правой — нелинейная функция, заданная входной ВАХ транзистора. Решая его графически (см. рис. 14.2, а), находим координаты РТ ($i_{\text{Б0}}$, $u_{\text{БЭ0}}$) на входной характеристике T_1 и T_2 , а также $R_{\text{диф БЭ}}$ в РТ.

14.1.3. Расчет коллекторной цепи в режиме покоя

Из равенства базовых токов и идентичности транзисторов следует и равенство их коллекторных токов. Найдем их величину $i_{\text{К0}}$.

Для контура, содержащего источник коллекторного питания $E_{\text{К}}$, резистор $R_{\text{К}}$, например первого транзистора T_1 , его участок коллектор — эмиттер и резистор $R_{\text{Э}}$, справедливо уравнение

$$E_{\text{К}} + E_{\text{см}} = i_{\text{К1}} R_{\text{К}} + u_{\text{КЭ1}}(i_{\text{К1}}) + (i_{\text{Э1}} + i_{\text{Э2}}) R_{\text{Э}}. \quad (14.4)$$

Ввиду малости базового тока эмиттерный и коллекторный токи в равенстве (14.4) считаем примерно одинаковыми. Кроме этого, опускаем индексы 1 и 2 (пользуясь по-прежнему симметрией схемы в состоянии покоя) и приходим к такому соотношению:

$$E_{\text{К}} + E_{\text{см}} = i_{\text{К}} R_{\text{К}} + u_{\text{КЭ}}(i_{\text{К}}) + 2i_{\text{К}} R_{\text{Э}},$$

или

$$E_{\text{К}} + E_{\text{см}} - i_{\text{К}}(R_{\text{К}} + 2R_{\text{Э}}) = u_{\text{КЭ}}(i_{\text{К}}), \quad (14.5)$$

где $u_{\text{КЭ}}(i_{\text{К}})$ есть кривая в семействе выходных ВАХ транзистора, соответствующая базовому току $i_{\text{Б0}}$. Она показана на рис. 14.2, б; здесь же дано графическое решение нелинейного уравнения (14.5), в результате которого и определяется положение рабочей точки на выходной ВАХ и ее координаты: коллекторный ток $i_{\text{К0}}$ и напряжение между коллектором и эмиттером $u_{\text{КЭ0}}$ каждого из транзисторов.

Выходное напряжение в режиме покоя. Благодаря идентичности транзисторов, а также одинаковым режимам на их входах, коллекторные токи, а значит, и потенциалы коллекторов T_1 и T_2 одинаковы. Следовательно, напряжение на дифференциальном выходе в состоянии покоя равно нулю:

$$u_{\text{вых.диф0}} = \Phi_{\text{К10}} - \Phi_{\text{К20}} = 0.$$

14.1.4. Синфазная и дифференциальная составляющие входного сигнала

Покажем, что пара величин $U_{\text{вх1}}$ и $U_{\text{вх2}}$ независимо от их уровня и знака может быть представлена в виде совокупности двух составляющих — синфазной и дифференциальной. Для этого введем обозначения:

$$(U_{\text{вх1}} + U_{\text{вх2}})/2 = U_{\text{С}} - \text{синфазная составляющая};$$

$$(U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}})/2 = U_{\text{Д}} - \text{дифференциальная составляющая}.$$

С учетом введенных обозначений справедливы следующие соотношения:

$$U_{\text{вх1}} = U_{\text{С}} + U_{\text{Д}}; \quad U_{\text{вх2}} = U_{\text{С}} - U_{\text{Д}}. \quad (14.6)$$

Обратим внимание, что присутствующие в формулах (14.6) синфазные составляющие равны как по величине, так и по знаку. Дифференциальные

составляющие по величине одинаковы, но по знаку противоположны. Рассмотрим два частных случая (очень важных при анализе процессов в ДУ):

Синфазное воздействие. Допустим, что $U_{\text{д}} = 0$, тогда $U_{\text{вх1}} = U_{\text{вх2}} = U_{\text{с}}$ — входные воздействия одинаковы по величине и знаку;

Дифференциальное воздействие. Если $U_{\text{с}} = 0$, то $U_{\text{вх1}} = U_{\text{д}}$, $U_{\text{вх2}} = -U_{\text{д}}$ — входные воздействия одинаковы по величине, но различны по знаку.

Поскольку реакции дифференциального усилителя на синфазную и дифференциальную составляющие входных сигналов различны, рассмотрим их отдельно.

14.1.5. Реакция дифференциального усилителя на синфазное воздействие

Пусть на оба входа поданы одинаковые по величине и знаку напряжения $u_{\text{вх1}} = u_{\text{вх2}}$. Тогда величины $i_{\text{б}}$, $i_{\text{э}}$, $i_{\text{к}}$ транзисторов T_1 и T_2 , как и потенциалы их коллекторов K_1 и K_2 , получают приращения. Однако ввиду симметрии схемы эти приращения для T_1 и T_2 одинаковы, следовательно, разность потенциалов точек K_1 и K_2 , т.е. напряжение на дифференциальном выходе, сохраняется равным нулю:

$$u_{\text{выхдиф}} = \varphi_{K_1} - \varphi_{K_2} = 0.$$

Таким образом, коэффициент усиления по напряжению для синфазной составляющей входного сигнала равен нулю: $K_{U(C)} = 0$. Другими словами, схема на рис. 14.1 подавляет синфазный сигнал.

14.1.6. Реакция дифференциального усилителя на дифференциальное воздействие

Допустим, что на входы ДУ (см. рис. 14.1) поступили напряжения, одинаковые по величине, но противоположные по знаку, а именно $u_{\text{вх1}} = -u_{\text{вх2}}$. Покажем, что при воздействии дифференциального сигнала напряжения $u_{\text{вх1}}$ и $u_{\text{вх2}}$ прикладываются непосредственно между базой и эмиттером соответствующего транзистора.

1. Линейность входной и выходных ВАХ транзисторов в окрестности рабочей точки позволяет считать, что равные по величине, но противоположные по знаку воздействия $u_{\text{вх1}}$ и $u_{\text{вх2}}$ вызовут равные по величине, но различные по знаку отклонения режима транзисторов T_1 и T_2 относительно РТ, а именно: $\Delta u_{\text{бэ1}} = -\Delta u_{\text{бэ2}}$; $\Delta i_{\text{э1}} = -\Delta i_{\text{э2}}$; $\Delta i_{\text{б1}} = -\Delta i_{\text{б2}}$; $\Delta i_{\text{к1}} = -\Delta i_{\text{к2}}$; $\Delta \varphi_{K_1} = -\Delta \varphi_{K_2}$.

2. Согласно второму закону Кирхгофа

$$u_{\text{вх1}} = \Delta u_{\text{бэ1}} + (\Delta i_{\text{э1}} + \Delta i_{\text{э2}})R_{\text{э}}; \quad u_{\text{вх2}} = \Delta u_{\text{бэ2}} + (\Delta i_{\text{э1}} + \Delta i_{\text{э2}})R_{\text{э}}.$$

Так как в рассматриваемом случае $\Delta i_{\text{э1}} = -\Delta i_{\text{э2}}$, слагаемое $(\Delta i_{\text{э1}} + \Delta i_{\text{э2}})R_{\text{э}}$ обращается в ноль. Следовательно, дифференциальный входной сигнал не создает приращения напряжения на резисторе $R_{\text{э}}$, что позволяет записать очень важные соотношения для $u_{\text{вх1}}$ и $u_{\text{вх2}}$ через приращения базовых токов транзисторов:

$$u_{\text{вх1}} = \Delta u_{\text{бэ1}} = \Delta i_{\text{б1}} R_{\text{дифБЭ}}; \quad u_{\text{вх2}} = \Delta u_{\text{бэ2}} = \Delta i_{\text{б2}} R_{\text{дифБЭ}}.$$

Напряжение на дифференциальном входе. Обозначим $\Delta i_{\text{б1}} = \Delta i_{\text{б}}$ и $\Delta i_{\text{б2}} = -\Delta i_{\text{б}}$. Тогда

$$u_{\text{вхдиф}} = u_{\text{вх1}} - u_{\text{вх2}} = 2\Delta i_{\text{б}} R_{\text{дифБЭ}}. \quad (14.7)$$

Напряжение на дифференциальном выходе. С учетом выражений, связывающих потенциалы коллекторов с коллекторными токами, а именно:

$$\varphi_{K_1} = E_K - i_{K_1} R_K; \quad \varphi_{K_2} = E_K - i_{K_2} R_K$$

для соответствующих приращений можем записать

$$\Delta\varphi_{K_1} = -\Delta i_{K_1} R_K; \quad \Delta\varphi_{K_2} = -\Delta i_{K_2} R_K.$$

Обозначим $\Delta i_{K_1} = \Delta i_K$. Тогда $\Delta i_{K_2} = -\Delta i_K$, а приращения потенциалов коллекторов принимают вид

$$\Delta\varphi_{K_1} = -\Delta i_K R_K; \quad \Delta\varphi_{K_2} = \Delta i_K R_K.$$

Их разность есть напряжение на дифференциальном выходе:

$$u_{\text{вых диф}} = \varphi_{K_1} - \varphi_{K_2} = \Delta\varphi_{K_1} - \Delta\varphi_{K_2} = -2\Delta i_K R_K. \quad (14.8)$$

Поскольку $\Delta i_K = \beta \Delta i_B$, из соотношения (14.8) получаем для напряжения на дифференциальном выходе следующее равенство:

$$u_{\text{вых диф}} = -2\beta \Delta i_B R_K. \quad (14.9)$$

14.1.7. Коэффициент усиления для дифференциальной составляющей входного сигнала

Записываем отношение найденных напряжений на выходе (14.9) и входе (14.7) усилителя и приходим к выражению для искомого коэффициента усиления

$$K_{U \text{ диф}} = u_{\text{вых диф}} / u_{\text{вх диф}} = -\beta R_K / R_{\text{диф БЭ}}. \quad (14.10)$$

Выводы. 1. В отличие от однотранзисторного усилительного каскада коэффициент усиления рассмотренного дифференциального усилителя (см. рис. 14.1) находится в прямой зависимости от параметра β выбранных транзисторов и в обратной зависимости от $R_{\text{диф БЭ}}$ в рабочей точке на его входной ВАХ. Следовательно, в ДУ предъявляются повышенные требования к стабильности РТ (особенно на входной характеристике).

2. Поскольку $K_{U \text{ диф}}$ не зависит от эмиттерного сопротивления R_E , то с целью стабилизации РТ (поддерживания тока базы в РТ на неизменном уровне i_{B0}) R_E берут очень большим. Часто величину i_{B0} фиксируют, включая вместо R_E источник тока, который реализуется специальной транзисторной схемой.

Пример 14.1. Определить величину дифференциального коэффициента усиления для достаточно типичного случая параметров: $R_K = 4$ кОм; $R_{\text{диф БЭ}} = 200$ Ом; $\beta = 50$.

Решение

С учетом заданных параметров элементов в соответствии с равенством (14.10) получаем: $K_{U \text{ диф}} = -\beta R_K / R_{\text{диф БЭ}} = -50 \cdot 4000 / 200 = -1000$. Для обычного усилительного каскада такой коэффициент усиления K_U не достигим.

14.1.8. Входное и выходное сопротивления для дифференциальной составляющей входного сигнала

Рассмотренный ДУ для дифференциального входного сигнала не обладает высоким входным и низким выходным сопротивлениями. Эти параметры определяются следующими соотношениями:

$$R_{\text{вх}} = 2R_{\text{диф БЭ}}; \quad R_{\text{вых}} \approx R_K R_{\text{диф КЭ}} / (R_K + R_{\text{диф КЭ}}). \quad (14.11)$$

Пример 14.2. Определить величины входного и выходного сопротивлений для дифференциального входного сигнала, если $R_K = 4 \text{ кОм}$; $R_{\text{диф БЭ}} = 200 \text{ Ом}$; $R_{\text{диф КЭ}} = 100 \text{ кОм}$,

Решение

Пользуясь соотношениями (14.11), находим: $R_{\text{вх}} = 400 \text{ Ом}$; $R_{\text{вых}} \approx 3846 \text{ Ом}$, т.е. близко к $R_K = 4 \text{ кОм}$, не превышая его.

Главные достоинства дифференциального усилителя следующие.

1. Возможность получить гораздо больший (в десятки раз по сравнению с однотранзисторным усилителем) коэффициент усиления по напряжению.
2. Способность подавлять синфазные помехи, наводки, флюктуации, одновременно воздействующие на оба транзистора.

14.1.9. Инвертирующий и неинвертирующий входы дифференциального усилителя

Пара зажимов «Б₁ — О» называется инвертирующим входом, а пара «Б₂ — О» — неинвертирующим (см. подпараграф 14.1.1) по следующим причинам. Представим напряжение на дифференциальном выходе в виде двух слагаемых следующим образом:

$$u_{\text{выхдиф}} = K_{U_{\text{диф}}} u_{\text{вхдиф}} = K_{U_{\text{диф}}} u_{\text{вх1}} - K_{U_{\text{диф}}} u_{\text{вх2}}.$$

Рассмотрим реакцию ДУ в двух случаях:

- а) $u_{\text{вх1}} \neq 0$, $u_{\text{вх2}} = 0$, тогда $u_{\text{выхдиф}} = K_{U_{\text{диф}}} u_{\text{вх1}}$;
- б) $u_{\text{вх1}} = 0$, $u_{\text{вх2}} \neq 0$, тогда $u_{\text{выхдиф}} = -K_{U_{\text{диф}}} u_{\text{вх2}}$.

По причине отрицательного знака дифференциального коэффициента усиления $K_{U_{\text{диф}}}$ (см. формулу (14.10)) дифференциальный выходной сигнал совпадает по знаку с $u_{\text{вх2}}$ и противоположен по знаку $u_{\text{вх1}}$.

14.2. Основные свойства операционного усилителя

Операционный усилитель — многокаскадная схема с ДУ на входе и с эмиттерным повторителем на выходе, обладающая очень большим коэффициентом усиления по напряжению κ (порядка 10^4 – 10^6) в частотном диапазоне от нуля до нескольких мегагерц. Входное и выходное сопротивления ОУ имеют порядок мегаомов и омов соответственно. Перечисленные свойства позволяют при расчете схем, содержащих ОУ, считать его идеальным, приняв $\kappa \rightarrow \infty$; $R_{\text{вх}} \rightarrow \infty$; $R_{\text{вых}} \rightarrow 0$. В интегральном исполнении ОУ — малогабаритное и сравнительно недорогое устройство.

14.2.1. Условное обозначение операционного усилителя

На условном изображении ОУ (рис. 14.3, а) обычно показываются:

- два входных зажима («а» и «б»);
- один выходной зажим («в»);
- общая точка (О);
- два зажима «+Е» и «-Е» для подключения источников постоянного напряжения питания.

Последние два зажима не всегда присутствуют на условном обозначении ОУ.

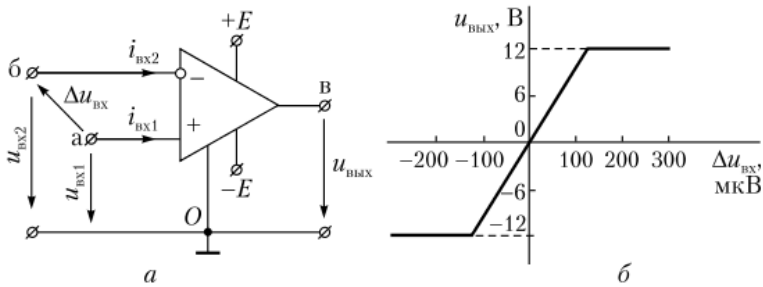


Рис. 14.3. Операционный усилитель:

a – условное изображение; *б* – зависимость напряжения на выходе ОУ от напряжения на дифференциальном входе

Зажимы «а», «б» и «в» в совокупности с общей точкой *O* выполняют роль трех пар зажимов: из них «а – *O*» и «б – *O*» – входные зажимы, а «в – *O*» – выходные зажимы. Так же как и в ДУ, один из входов ОУ называют инвертирующим, а второй – неинвертирующим. Обычно инвертирующий вход помечают кружком. Иногда дополнительно инвертирующий и неинвертирующий входы помечают знаками «минус» и «плюс» соответственно. На рис. 14.3, *a* инвертирующим является зажим «б», а неинвертирующим – «а». Пара зажимов «а – б» называется *дифференциальным входом*, а разность потенциалов

$$\varphi_a - \varphi_b = u_{вх1} - u_{вх2} = \Delta u_{вх}. \quad (14.12)$$

называется *дифференциальным входным напряжением*.

14.2.2. Особенности передаточной характеристики реального операционного усилителя

Передаточной характеристикой ОУ называется зависимость напряжения на выходе от напряжения на дифференциальном входе $u_{вх}$ ($\Delta u_{вх}$). Для типового ОУ с напряжением питания $E = \pm 15$ В она показана на рис. 14.3, *б*. Отметим особенности передаточной характеристики ОУ:

Она симметрична относительно начала координат и имеет линейный характер в диапазоне выходных напряжений $u_{вых} = \pm 12$ В. Следовательно, ОУ позволяет усилить сигналы обеих полярностей (за счет двухполярного напряжения питания $\pm E$).

Дифференциальный коэффициент усиления на линейном участке $\kappa = u_{вых} / \Delta u_{вх}$ имеет порядок $\sim 10^5$.

При $u_{вых} \geq \pm 12$ В рост напряжения на входе не приводит к увеличению напряжения на выходе ОУ. Этим режимам соответствуют горизонтальные участки передаточной характеристики, называемые **областью насыщения**.

В конкретных схемах ОУ может работать как в линейном режиме, так и в режиме насыщения. В данной главе рассматривается использование ОУ в усилительных целях, что предполагает работу в линейной области его передаточной характеристики. В этом случае напряжение на дифференциальном входе ОУ с передаточной характеристикой, представленной на рис. 14.3, *б*, не должно превышать максимального значения

$$\Delta u_{вх\max} = u_{вых\max} / \kappa = 10^{-4} \text{ В}. \quad (14.13)$$

Таким образом, согласно соотношениям (14.12) и (14.13) разность потенциалов на дифференциальном входе операционного усилителя, работающего в линейном режиме, составляет не более нескольких десятых долей милливольт.

14.2.3. Взаимодействие операционного усилителя с внешней цепью

Обычно ОУ используют только в совокупности с внешней цепью. Если источники питания $\pm E$ отнести к внутренней схеме ОУ, то можно считать, что ОУ контактирует с внешней цепью тремя парами зажимов, т.е. проявляет себя как три двухполюсника. Это обстоятельство отражено на рис. 14.4, где неинвертирующий и инвертирующий входы ОУ представлены пассивными двухполюсниками с входными сопротивлениями $R_{вх1}$ и $R_{вх2}$.

Относительно выходных зажимов «в — О» операционный усилитель является активным двухполюсником. На рис. 14.4 показана его эквивалентная схема, содержащая идеальный источник ЭДС $e_{вых}$ и резистор, обозначенный $R_{вых}$.

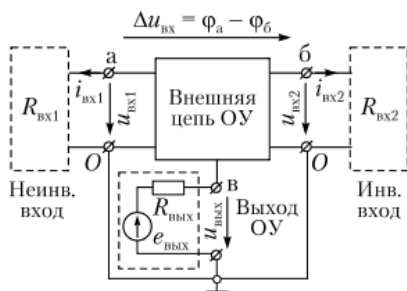


Рис. 14.4. Взаимодействие ОУ с внешней цепью

Как уже отмечалось в начале этой главы, при работе ОУ в линейном режиме его свойства близки к идеальным, а именно:

$$\alpha \rightarrow \infty; R_{вх1} \rightarrow \infty; R_{вх2} \rightarrow \infty; R_{вых} \rightarrow 0. \quad (14.14)$$

Выполнение этих условий позволяет назвать следующие важные особенности режима цепи, содержащей близкий к идеальному ОУ.

1. По причине очень большой величины дифференциального коэффициента усиления ($\alpha = 10^4 \div 10^6$) напряжение на участках внешней по отношению к ОУ цепи на несколько порядков превышает разность потенциалов на дифференциальном входе ОУ. Это позволяет при расчете режима во внешней цепи с большой степенью точности считать потенциалы на обоих входах ОУ одинаковыми, т.е.

$$\varphi_a \approx \varphi_b. \quad (14.15)$$

2. Схема близкого к идеальному ОУ обеспечивает очень большие входные сопротивления по каждому из входов. Токи $i_{вх1}$ и $i_{вх2}$ (см. рис. 14.4) имеют порядок долей микроампера. По сравнению с токами, протекающими в ветвях внешней цепи, можно считать, что

$$i_{вх1} \approx 0; i_{вх2} \approx 0. \quad (14.16)$$

Соотношения (14.14)–(14.16) используются при расчете схем, содержащих ОУ.

Выводы. Токи и напряжения в ветвях внешней по отношению к ОУ цепи наряду с законами Кирхгофа должны удовлетворять двум условиям идеальности ОУ — (14.15) и (14.16).

Первое условие идеальности ОУ (14.15) — равенство потенциалов на инвертирующем и неинвертирующем входах. Учитывается при записи уравнения по второму закону Кирхгофа для любого внешнего контура, содержащего дифференциальный вход ОУ (участок «а, б»).

Второе условие идеальности ОУ (14.16) — отсутствие токов на обоих входах ОУ. Учитывается при записи уравнения по первому закону Кирхгофа для узла, включающего ветвь с током $i_{\text{вх1}}$ или $i_{\text{вх2}}$. При этом любой из входов можно обрывать.

14.3. Методы расчета цепей, содержащих операционный усилитель

В основе любой задачи теории цепей лежат законы Кирхгофа. При наличии в цепи операционного усилителя к уравнениям Кирхгофа добавляются два условия идеальности ОУ (14.15) и (14.16). Система уравнений Кирхгофа в общем случае является системой интегро-дифференциальных уравнений. Для цепей, содержащих ОУ, можно выделить три основных подхода к ее решению.

1. Непосредственное решение уравнений Кирхгофа, составленных относительно мгновенных значений токов и напряжений, т.е. для функций времени $i(t)$ и $u(t)$. Этот способ применяется в тех случаях, когда внешняя цепь чисто резистивна либо содержит не более одного накопителя энергии (чаще — емкостной элемент).

2. Система уравнений Кирхгофа записывается для изображений по Лапласу токов в ветвях и напряжений на участках внешней (по отношению к ОУ) цепи. Условия идеальности ОУ при этом имеют вид $\varphi_a(p) = \varphi_b(p)$ и $i_{\text{вх1}}(p) = 0; i_{\text{вх2}}(p) = 0$.

Обычно в результате решения операторной системы уравнений Кирхгофа находится передаточная функция цепи

$$K(p) = u_{\text{вых}}(p)/u_{\text{вх}}(p). \quad (14.17)$$

По найденной $K(p)$ в принципе может быть определена реакция $u_{\text{вых}}(t)$ на произвольное воздействие $u_{\text{вх}}(t)$.

Этот способ имеет наиболее общий характер. Им рекомендуется пользоваться во всех случаях, когда внешняя цепь не является резистивной. А при наличии двух и большего числа накопительных элементов он наиболее рационален.

3. Если заранее известно, что заданная цепь находится в установившемся синусоидальном режиме, то целесообразен переход к ее символической модели с комплексными токами и напряжениями. К комплексным уравнениям Кирхгофа добавляются **условия идеальности ОУ в комплексной форме:**

$$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b; \quad \dot{i}_{\text{вх1}} = 0; \quad \dot{i}_{\text{вх2}} = 0. \quad (14.18)$$

Решение полученной таким образом системы уравнений Кирхгофа позволяет найти комплексный коэффициент передачи по напряжению $K(j\omega) = U_{\text{вых}}(j\omega)/U_{\text{вх}}(j\omega)$, а по нему АЧХ и ФЧХ рассматриваемой цепи. Полезно иметь в виду, что передаточная функция $K(p)$ (14.17) при подстановке в нее $p \rightarrow j\omega$ переходит в комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$.

14.4. Расчет по мгновенным значениям

14.4.1. Инвертирующий и неинвертирующий источники напряжения, управляемые напряжением

Проиллюстрируем методику расчета по мгновенным значениям на схемах, представленных на рис. 14.5, а, б, с чисто резистивными внешними цепями. Эти схемы широко используются на практике как почти идеальные источники ЭДС (источники выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t)$), интенсивность которых пропорциональна величине входного напряжения $u_{\text{вх}}(t)$.

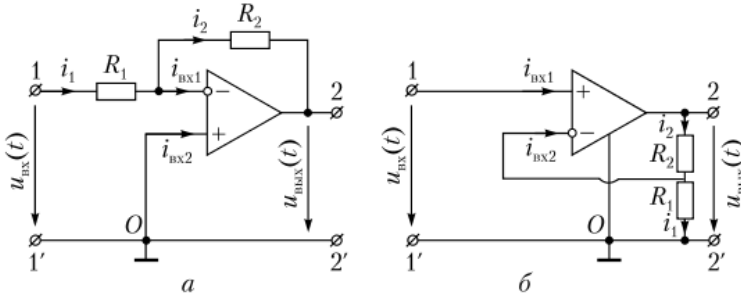


Рис. 14.5. Источники ЭДС, управляемые напряжением:

а – схема инвертирующего источника напряжения;
б – схема неинвертирующего источника напряжения

Схема рис. 14.5, а (инвертирующий источник напряжения, управляемый входным напряжением). Пользуясь первым условием идеальности $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_0 = 0$ (с учетом положительных направлений на рисунке), записываем следующие два равенства: $i_1 = u_{\text{вх}}/R_1$; $i_2 = -u_{\text{вых}}/R_2$. Из второго условия идеальности ОУ ($i_{\text{вх1}} = 0$) следует, что $i_1 = i_2$, или $u_{\text{вх}}/R_1 = -u_{\text{вых}}/R_2$.

Для коэффициента передачи по напряжению получаем

$$K = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Отсюда следует, что

$$u_{\text{вых}}(t) = -\frac{R_2}{R_1}u_{\text{вх}}(t).$$

Таким образом, выходное напряжение по форме подобно входному, а по знаку ему противоположно. Благодаря присутствию ОУ рассмотренная схема (см. рис. 14.5, а) по отношению к нагрузке, подключаемой к зажимам 2–2', обладает очень малым выходным сопротивлением (в идеале $R_{\text{вых}} \rightarrow 0$). Это приближает ее по свойствам к идеальному источнику ЭДС, величина которой зависит от напряжения на входе схемы, – *управляемому идеальному инвертирующему источнику напряжения*.

Схема рис. 14.5, б (неинвертирующий источник напряжения, управляемый напряжением). Определим реакцию цепи $u_{\text{вых}}(t)$, вызванную воздействием на ее входе напряжения $u_{\text{вх}}(t)$.

1. Из условия (14.16) $i_{\text{вх2}} \approx 0$ следует равенство токов в резисторах R_1 и R_2 :

$$i_1 = i_2 = \frac{u_{\text{вых}}}{R_1 + R_2}.$$

2. Учитывая равенство потенциалов на инвертирующем и неинвертирующем входах ОУ, записываем соотношение

$$u_{\text{вх}} = i_1 R_1 = \frac{u_{\text{вых}}}{R_1 + R_2} R_1, \quad (14.19)$$

из которого находим коэффициент усиления ОУ:

$$K = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}. \quad (14.20)$$

Вывод. Из соотношений (14.19) и (14.20) следует, что напряжение на выходе цепи, изображенной на рис. 14.5, б, по форме подобно входному напряжению и совпадает с ним по знаку. Выходное сопротивление данной схемы, как и предыдущей (см. рис. 14.5, а), определяется выходным сопротивлением ОУ, т.е. мало, $R_{\text{вых}} \rightarrow 0$. Поэтому напряжение, подаваемое на выход следующего каскада, практически не зависит от параметров нагрузки. Цепь выполняет функции источника напряжения, близкого к идеальному (управляемого напряжением).

14.4.2. Повторитель напряжения

Схема, представленная на рис. 14.6, является частым случаем цепи рис. 14.5, б, когда $R_2 = 0$; $R_1 = \infty$. При этом коэффициент передачи по напряжению обращается в единицу:

$$K = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1,$$

поэтому $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t)$, т.е. схема на рис. 14.6 обладает свойствами повторителя напряжения с очень большим входным сопротивлением и пренебрежимо малым выходным сопротивлением. Это идеальное промежуточное звено между высокоомным источником и низкоомной нагрузкой.

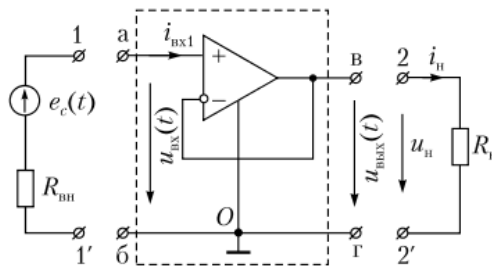


Рис. 14.6. Включение между источником сигнала и нагрузкой повторителя напряжения на ОУ

14.4.3. Схема дифференцирования

Расчетная методика, использующая соотношения, связывающие мгновенные значения тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$ в элементах внешней цепи ОУ, достаточно рациональна и в тех случаях, когда внешняя цепь наряду с резисторами содержит только один накопитель энергии (обычно это конденсатор). К таким случаям относятся схемы дифференцирования (рис. 14.7, а) и интегрирования (рис. 14.8).

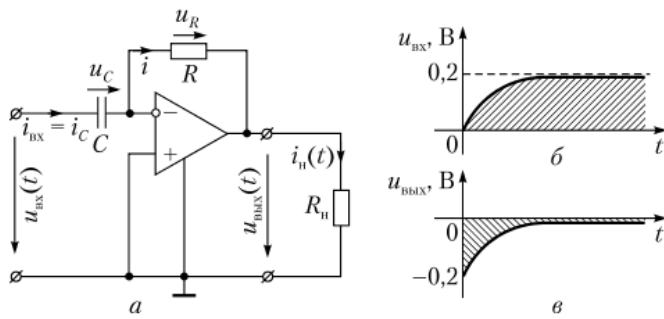


Рис. 14.7. Дифференцирующее устройство на ОУ:

a – схема устройства; *б* – график функции $u_{\text{вх}}(t)$ для примера 14.3;
в – график функции $u_{\text{вых}}(t)$ для примера 14.3

Покажем, что цепь на рис. 14.7, *a* осуществляет функцию дифференцирования входного сигнала.

Из условия равенства потенциалов на инвертирующем и неинвертирующем входах ОУ следует:

$$\text{а) } u_c(t) = u_{\text{вх}}(t), \quad i_c(t) = C \frac{du_c}{dt} = C \frac{du_{\text{вх}}}{dt};$$

$$\text{б) } Ri(t) = -u_{\text{вых}}(t), \quad i(t) = -\frac{u_{\text{вых}}(t)}{R}.$$

Второе условие для идеального ОУ (равенство нулю токов на его входах) позволяет записать двойное равенство $i(t) = i_{\text{вх}}(t) = i_c(t)$. Путем подстановки в него значений тока $i(t)$ и $i_c(t)$ получаем соотношение, связывающее $u_{\text{вых}}(t)$ и $u_{\text{вх}}(t)$:

$$-\frac{u_{\text{вых}}(t)}{R} = C \frac{du_{\text{вх}}}{dt}, \quad \text{или} \quad u_{\text{вых}}(t) = -RC \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt},$$

что и требовалось доказать.

Пример 14.3. На вход цепи, изображенной на рис. 14.7, *a*, в момент времени $t = 0$ подается напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, нарастающее по закону $u_{\text{вх}}(t) = 0,2(1 - e^{-1000t})$ (В). Определить функцию $u_{\text{вых}}(t)$ и построить ее график, если $R = 10$ кОм; $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Решение

$$\text{а) } RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ (с);}$$

$$\text{б) } \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = 0,2 \cdot (-1) \cdot (-1000)e^{-1000t} = 200e^{-1000t} \text{ (В/с);}$$

$$\text{в) } u_{\text{вых}}(t) = -RC \cdot \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = -1 \cdot 10^{-3} \cdot 200e^{-1000t} = -0,2e^{-1000t} \text{ (В).}$$

Графики функций $u_{\text{вх}}(t)$ и $u_{\text{вых}}(t)$ приведены на рис. 14.7, *б* и *в* соответственно.

14.4.4. Схема интегрирования

Покажем, что заданная на рис. 14.8 цепь осуществляет операцию интегрирования входного напряжения.

Равенство потенциалов на входах ОУ дает два уравнения:

$$i(t)R = u_{\text{вх}}(t), \quad \text{или} \quad i(t) = u_{\text{вх}}(t)/R;$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt = -u_{\text{вых}}(t).$$

Из равенства нулю токов на входах ОУ следует, что

$$i_c(t) = i(t).$$

Рассматривая совместно полученные три уравнения, приходим к окончательному выражению, связывающему $u_{\text{вых}}(t)$ и $u_{\text{вх}}(t)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = -u_c(t) = -\frac{1}{C} \int i_c(t) dt = -\frac{1}{C} \int i(t) dt = -\frac{1}{C} \int \frac{u_{\text{вх}}(t)}{R} dt.$$

Таким образом,

$$u_{\text{вых}}(t) = -\frac{1}{RC} \int u_{\text{вх}}(t) dt. \quad (14.21)$$

Итак, согласно соотношению (14.21) напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ на выходе цепи, изображенной на рис. 14.8, пропорционально интегралу от входного напряжения.

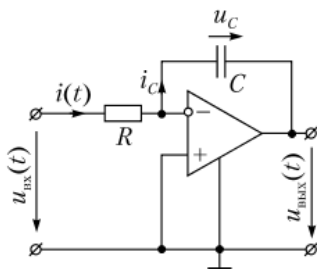


Рис. 14.8. Схема интегрирования

14.5. Операторный метод расчета переходного процесса в цепи с операционным усилителем

При расчете переходных процессов в линейных цепях с ОУ операторный метод представляется наиболее универсальным, даже в случае цепей первого порядка (с одним накопителем энергии). Присутствие ОУ достаточно просто учитывается как при построении операторной модели, так и при записи операторных уравнений Кирхгофа, что проиллюстрировано в следующем примере.

Пример 14.4. Определить передаточную функцию $K(p) = u_{\text{вых}}(p)/u_{\text{вх}}(p)$ цепи, изображенной на рис. 14.9, а, а также реакцию $u_{\text{вых}}(t)$ на воздействие $u_{\text{вх}}(t) = 0,1e^{-5000t}$ (В), если $R_1 = R_2 = 1$ кОм; $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$ Ф. Построить график функции $u_{\text{вых}}(t)$.

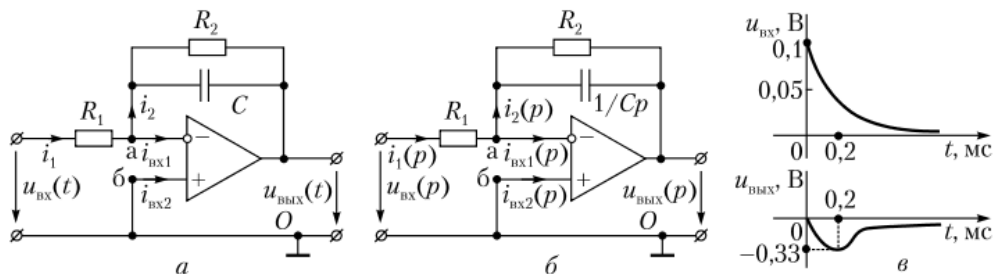


Рис. 14.9. Расчет переходного процесса в цепи первого порядка:

а — заданная схема; б — ее операторная модель; в — графики функций $u_{\text{вх}}(t)$ и $u_{\text{вых}}(t)$

Решение

1. Расчет передаточной функции $K(p)$. На рис. 14.9, б изображена операторная модель заданной цепи при нулевых начальных условиях. С учетом идеальности ОУ, т.е. выполнения условий

$$\varphi_a(p) = \varphi_b(p) = \varphi_0(p) = 0; \quad i_{\text{вх}1}(p) = 0; \quad i_{\text{вх}2}(p) = 0,$$

запишем уравнения

$$i_1(p) = \frac{u_{\text{вх}}(p)}{R_1}; \quad i_2(p) = -\frac{u_{\text{вых}}(p)}{\frac{R_2/(Cp)}{R_2 + 1/(Cp)}}; \quad i_1(p) = i_2(p),$$

из которых следует, что

$$K(p) = \frac{u_{\text{вых}}(p)}{u_{\text{вх}}(p)} = -\frac{\frac{R_2/(Cp)}{R_2 + 1/(Cp)}}{R_1} = -\frac{1/(R_1C)}{p + 1/(R_2C)}.$$

Если $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$; $C = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$, то выражение для $K(p)$ принимает вид $K(p) = -5000/(p + 5000)$ (величина безразмерная).

2. Расчет реакции $u_{\text{вых}}(t)$ на воздействие $u_{\text{вх}}(t) = 0,1e^{-5000t}$ (В).

Находим изображение по Лапласу функции $u_{\text{вх}}(t)$, пользуясь таблицами соответствия изображений $F(p)$ и оригиналов $f(t)$:

$$u_{\text{вх}}(t) \stackrel{\cdot}{=} u_{\text{вх}}(p) = \frac{0,1}{p + 5000} \text{ (В)}.$$

Находим изображение реакции:

$$u_{\text{вых}}(p) = K(p)u_{\text{вх}}(p) = -\frac{500}{(p + 5000)^2} \text{ (В)}.$$

Переход от найденного изображения $u_{\text{вых}}(p)$ к оригиналу осуществляем с помощью таблиц соответствия, согласно которым

$$F(p) = \frac{1}{(p + \alpha)^2} \stackrel{\cdot}{=} f(t) = te^{-\alpha t}.$$

Тогда для оригинала $u_{\text{вых}}(t)$ получаем $u_{\text{вых}}(t) = -500te^{-5000t}$ (В). График функции $u_{\text{вых}}(t)$ имеет вид всплеска отрицательной полярности, достигающего экстремума ($-0,33 \text{ В}$) при $t = 0,2 \text{ мс}$ (рис. 14.9, в).

14.6. Применение символического метода

Расчет установившихся синусоидальных режимов в линейных цепях, содержащих ОУ, ведется в традиционном для таких режимов порядке, описанном в гл. 3. Напомним, что символический метод включает в себя: а) переход от заданной схемы к ее символической модели и б) запись системы алгебраических уравнений Кирхгофа относительно комплексов токов и напряжений. Расчет чаще всего ведется в комплексных амплитудах и может сопровождаться построением векторных диаграмм.

Пример 14.5. На входе цепи (рис. 14.10), содержащей ОУ, действует источник синусоидального напряжения $u_{\text{вх}}(t) = 14,1 \sin 10^5 t$ (В).

Нагрузкой ОУ является колебательный LC -контур. Определить амплитуду и начальную фазу напряжения на нагрузке, а также показания идеальных ам-

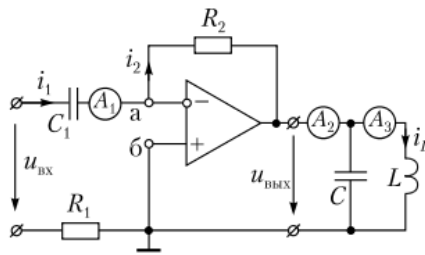


Рис. 14.10. Схема цепи к примеру 14.5

перметров, измеряющих действующее значение тока, если $R_1 = 200 \text{ Ом}$; $R_2 = 1 \text{ кОм}$; $C_1 = C = 50 \text{ нФ}$; $L = 2 \text{ мГн}$.

Решение

1. Комплексная амплитуда входного напряжения равна $\dot{U}_{\text{вх}} = 14,1e^{j0} \text{ (В)}$.
2. Комплексные сопротивления пассивных элементов таковы:

$$Z_{R_1} = 200 \text{ Ом}; \quad Z_{R_2} = 1000 \text{ Ом};$$

$$Z_{C_1} = Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-9}} = -j200 \text{ (Ом)};$$

$$Z_L = j\omega L = j200 \text{ (Ом)}.$$

3. Комплексная амплитуда тока на входе схемы \dot{I}_1 определяется по второму закону Кирхгофа для контура, включающего источник, элементы R_1 , C_1 и дифференциальный вход ОУ. С учетом равенства потенциалов точек «а» и «б» это уравнение имеет вид

$$\dot{U}_{\text{вх}} = \dot{I}_1(Z_{C_1} + Z_{R_1}).$$

Тогда получаем:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{\text{вх}} / (Z_{C_1} + Z_{R_1}) = 14,1 / (200 - j200) = 0,05e^{j45^\circ} \text{ (А)}.$$

Так как в соответствии со вторым условием идеальности ОУ (14.16) $i_2 = i_1$, то комплексную амплитуду тока в резисторе R_2 можно считать также найденной и равной $\dot{I}_2 = \dot{I}_1$.

4. По второму закону Кирхгофа для контура, содержащего выход ОУ, резистор R_2 и дифференциальный вход ОУ, справедливо уравнение

$$\dot{U}_{\text{вых}} + \dot{I}_2 R_2 = 0.$$

Отсюда получаем значение комплексной амплитуды выходного напряжения:

$$\dot{U}_{\text{вых}} = -\dot{I}_2 R_2 = -0,05 \cdot 1000 e^{j45^\circ} = 50 e^{j225^\circ} \text{ (В)}.$$

Данный комплекс позволяет определить искомые значения амплитуды $U_{\text{вых max}}$ и начальной фазы $\psi_{\text{вых}}$ синусоидального напряжения на нагрузке: $U_{\text{вых max}} = 50 \text{ В}$; $\psi_{\text{вых}} = 225^\circ$.

5. Комплексная амплитуда тока в индуктивности такова:

$$\dot{I}_L = \dot{U}_{\text{вых}} / Z_L = 50 e^{j225^\circ} / j200 = 0,25 e^{j135^\circ} \text{ (А)}.$$

Показания амперметров. Первый и третий амперметры, измеряющие действующие значения токов на входе схемы и в катушке индуктивности соответственно, покажут уменьшенные в $\sqrt{2}$ раз амплитудные значения: $A_1 \rightarrow 0,05/\sqrt{2} \text{ А}$; $A_3 \rightarrow 0,25/\sqrt{2} \text{ А}$.

Поскольку амперметр A_2 включен на входе идеального параллельного контура в состоянии резонанса ($x_L = x_C$), то его показание равно нулю: $A_2 \rightarrow 0$.

14.7. Активные фильтры

Простейший активный фильтр (рис. 14.11) представляет собой операционный усилитель, охваченный частотно-избирательной отрицательной обратной связью (ООС).

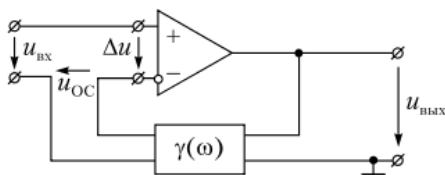


Рис. 14.11. Структурная схема активного фильтра на ОУ

В качестве частотно-избирательного четырехполюсника в цепи ОС обычно используется пассивный RC -фильтр. Некоторые из вариантов RC -звеньев и их АЧХ $\gamma(\omega)$ рассматривались в гл. 7 и приведены там на рисунках, а именно:

а) фильтр низких частот ФНЧ (ослабляющий высокие частоты) — на рис. 7.4;

б) фильтр высоких частот ФВЧ (ослабляющий низкие частоты) — на рис. 7.5;

в) полосно-заграждающий фильтр ПЗФ (ослабляющий частоты в окрестности $\omega_0 = 1/(RC)$ — на рис. 7.10, а;

г) полосно-пропускающий фильтр ППФ (передающий с наименьшим ослаблением сигналы частот, лежащих в окрестности частоты $\omega_0 = 1/(RC)$ — на рис. 7.10, б).

Обратим внимание, что величина коэффициента передачи γ пассивного RC -четырёхполюсника не превышает 1, т.е. сигнал на его выходе на всех частотах меньше входного и лишь на некоторых частотах теоретически может быть ему равен.

Напомним, что результирующий коэффициент передачи по напряжению $K_{\text{рез}}$ усилителя (с собственным коэффициентом усиления K), охваченного отрицательной обратной связью, определяется выражением (13.29)

$$K_{\text{рез}} = K(\omega)/(1 + \gamma(\omega)K(\omega)).$$

Если принять ОУ идеальным, то для него $K(\omega) \rightarrow \infty$, а $K_{\text{рез}}(\omega) = 1/\gamma(\omega)$.

Вывод. Амплитудно-частотная характеристика ОУ, охваченного ООС, обратна амплитудно-частотной характеристике четырехполюсника цепи ОС. Например, если в цепи ОС стоит RC -фильтр низкой частоты (ФНЧ), то получим четырехполюсник (активный), обладающий свойствами ФВЧ, и наоборот.

На рис. 14.12, а изображен вариант полосно-пропускающего активного фильтра (ППФ). Цепь его ОС содержит Т-образный RC -четырёхполюсник с АЧХ $\gamma(\omega)$, имеющей характерный для полосно-заграждающего пассивного RC -фильтра (ПЗФ) провал в окрестности частоты $\omega_0 = 1/(RC)$. Результирующая АЧХ активного фильтра имеет подъем на частоте ω_0 и на частотах, к ней прилегающих (рис. 14.12, б).

С целью получения высокой степени избирательности в цепи ОС применяют более сложные RC -четырёхполюсники, а также комбинируют отрицательную обратную связь с положительной. Кроме этого, используют каскадное соединение активного фильтра с пассивными RC -звеньями.

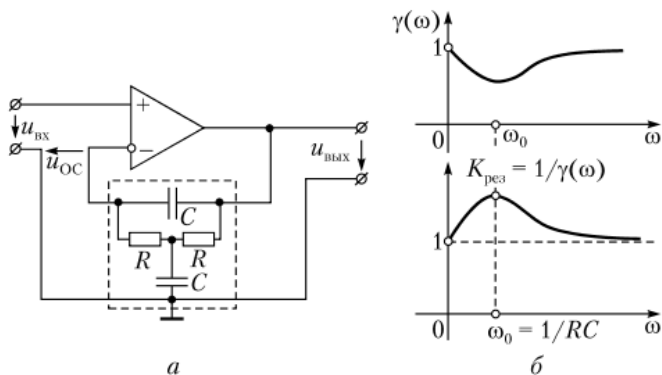


Рис. 14.12. Полосно-пропускающий активный фильтр:
a — структура фильтра; *б* — его АЧХ

Заметим, что наряду с фильтрацией входного сигнала активный фильтр при необходимости выполняет и функцию его усиления.

Контрольные вопросы и задания

1. Каково функциональное предназначение дифференциального усилителя (ДУ)?
2. Сформулируйте основные требования к параметрам элементов (резисторов, транзисторов) в схеме ДУ на рис. 14.1. Как называются пары зажимов « $B_1 - O$ », « $B_2 - O$ », « $K_1 - K_2$ » цепи на рис. 14.1?
3. Каково положение РТ на входной и выходной ВАХ ДУ (рис. 14.1) для его нормальной работы?
4. Чему равно напряжение на дифференциальном выходе ДУ (рис. 14.1) в состоянии покоя?
5. Поясните понятия синфазной и дифференциальной составляющих входного сигнала. Какова реакция ДУ на синфазное воздействие?
6. Почему реакция ДУ на дифференциальное воздействие не зависит от величины R_3 ?
7. Запишите выражение, связывающее коэффициент усиления для дифференциальной составляющей входного сигнала с величинами β , $R_{К1}$, $R_{дифБЭ}$.
8. Назовите главные достоинства ДУ.
9. Почему зажимы « $B_1 - O$ » называются инвертирующим входом, а « $B_2 - O$ » — неинвертирующим?
10. Назовите основные свойства идеального и реального ОУ. Нарисуйте его условное изображение (графическое обозначение).
11. Нарисуйте передаточную характеристику $u_{\text{вых}}(u_{\text{вх}})$ идеального и реального ОУ. Что понимается под дифференциальным коэффициентом усиления ОУ κ ? Каков порядок κ для реального ОУ?
12. Сформулируйте два условия идеальности ОУ при расчете режима в его внешней цепи.
13. Назовите главные методы расчета цепей, содержащих ОУ.
14. В каких случаях цепь с ОУ рассчитывается непосредственно относительно мгновенных значений токов и напряжений?
15. Когда режим в цепи с ОУ рассчитывается символическим методом?
16. Каким методом рационально рассчитывать переходной процесс в цепи с ОУ?
17. Определите функцию $u_{\text{вых}}(t)$ цепи на рис. 14.9, *a* при подаче на ее вход скачка напряжения величиной $u_{\text{вх}} = 0,1$ В в момент времени $t = 0$. Оцените длительность этого переходного процесса.

18. Как изменится реакция цепи, заданной на рис. 14.9, *a*, на скачок $u_{\text{вх}} = 0,1$ В при обрыве емкостной ветви?

19. Чему равны параметры $K_U, R_{\text{вх}}, R_{\text{вых}}$ для повторителя напряжения на ОУ, показанного на рис. 14.6?

20. Изобразите принципиальную схему активного фильтра на ОУ.

21. Как связана амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) активного фильтра (рис. 14.11) с АЧХ четырехполюсника цепи ОС?

Глава 15

ЭЛЕКТРОННЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ.

АВТОГЕНЕРАТОРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- принципы использования положительной обратной связи при построении автогенераторов гармонических колебаний;

уметь

- классифицировать предлагаемую схему автогенератора по виду (LC или RC);

владеть

- методикой расчета частоты и амплитуды автоколебаний в заданной схеме автогенератора.

15.1. Электронные генераторы

Электронные генераторы — это выполненные на электронных элементах источники периодического напряжения или тока синусоидального и несинусоидального вида. Они строятся на основе электронных усилителей, охваченных положительной обратной связью. Причем *процесс формирования периодических колебаний осуществляется за счет энергии постоянных источников питания.*

15.1.1. Классификация электронных генераторов

А. По типу возбуждения различают:

- 1) генераторы с самовозбуждением, называемые автогенераторами;
- 2) генераторы с внешним возбуждением.

Б. По форме выходных сигналов различают:

- 1) генераторы гармонических колебаний (близких к синусоидальным);
- 2) генераторы релаксационных колебаний (несинусоидальных). К ним относятся электронные генераторы, формирующие прямоугольные, треугольные, пилообразные импульсы, и т.д.

В. По частоте генерируемых колебаний выделяют:

- 1) генераторы инфранизкой частоты, формирующие периодические колебания, с частотой от долей герца и до 10 Гц;
- 2) генераторы низкой частоты — 10 Гц — 100 кГц;
- 3) генераторы высокой частоты — 100 кГц — 10 МГц;
- 4) генераторы сверхвысокой частоты с выходными сигналами, имеющими частоту выше 10 МГц.

15.2. Структура автогенератора гармонических колебаний

На рис. 15.1 изображена блок-схема автогенератора синусоидальных колебаний. В ее состав входят следующие узлы:

- усилительный блок с источником питания;
- четыреполюсник, осуществляющий охват усилителя положительной обратной связью (ПОС), содержащий колебательную систему (например, LC -контур).

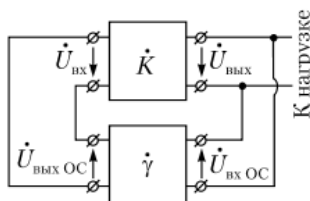


Рис. 15.1. Структура автогенератора

В установившемся режиме напряжения на входных и выходных зажимах как усилителя, так и четырехполюсника ОС — синусоидальные функции одной частоты, отличающиеся амплитудой и начальной фазой. Их удобно записывать в комплексном виде.

Напомним, что синусоидальной функции времени $U_m \sin(\omega t + \alpha)$ соответствует комплекс $\dot{U} = U_m e^{j\alpha}$, называемый комплексной амплитудой. На рис. 15.1 комплексные амплитуды входного и выходного напряжений для усилительного блока обозначены $\dot{U}_{вх}$ и $\dot{U}_{вых}$, а для цепи ОС — $\dot{U}_{вх\text{ ОС}}$ и $\dot{U}_{вых\text{ ОС}}$. Их комплексные коэффициенты передачи по напряжению равны: усилителя — $\dot{K} = \dot{U}_{вых} / \dot{U}_{вх}$, четырехполюсника ОС — $\dot{\gamma} = \dot{U}_{вых\text{ ОС}} / \dot{U}_{вх\text{ ОС}}$.

15.3. Условие существования установившихся колебаний

В соответствии со структурной схемой (см. рис. 15.1) и принятыми обозначениями справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \dot{U}_{вх} &= \dot{U}_{вых\text{ ОС}} = \dot{\gamma} \dot{U}_{вх\text{ ОС}}; \\ \dot{U}_{вых} &= \dot{K} \dot{U}_{вх} = \dot{K} \dot{U}_{вых\text{ ОС}} = \dot{K} \dot{\gamma} \dot{U}_{вых}. \end{aligned}$$

Из них следует, что

$$\dot{K} \dot{\gamma} = 1. \quad (15.1)$$

Уравнению (15.1) должны удовлетворять комплексы \dot{K} и $\dot{\gamma}$ для существования в рассматриваемой замкнутой системе устойчивых колебаний. Если учесть их показательную форму записи, а именно: $\dot{K} = K e^{j\varphi}$ и $\dot{\gamma} = \gamma e^{j\psi}$, то из комплексного уравнения (15.1) следуют два уравнения для их амплитуд и начальных фаз:

$$K\gamma = 1, \text{ или } K = 1/\gamma \quad (15.2)$$

— уравнение баланса амплитуд;

$$\varphi + \psi = 0, \text{ или } \varphi + \psi = 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15.3)$$

— уравнение баланса фаз.

Обратим внимание на то, что величина $1/\gamma$ в уравнении (15.2) означает степень ослабления сигнала, вносимого четырехполюсником ОС.

Так как в электронном усилителе напряжения на входе и на выходе обычно находятся в противофазе ($\varphi = 180^\circ$), то в этом случае фазовый сдвиг цепи ОС ψ согласно уравнению (15.3) также должен составлять $\psi = \pm 180^\circ$.

15.4. LC-автогенератор

Схема LC-генератора изображена на рис. 15.2. В качестве колебательной системы здесь используется LC-контур с малыми потерями. Он одновременно принадлежит и цепи усилителя, и цепи ОС. Кроме этого, цепи ОС принадлежат также катушка L_1 , индуктивно связанная с L , и конденсатор C_1 . Величина емкости C_1 берется настолько большой, чтобы на частоте автоколебаний ω_0 ее сопротивление $1/(\omega_0 C_1)$ было пренебрежимо мало и потенциалы точек A и O были примерно одинаковы.

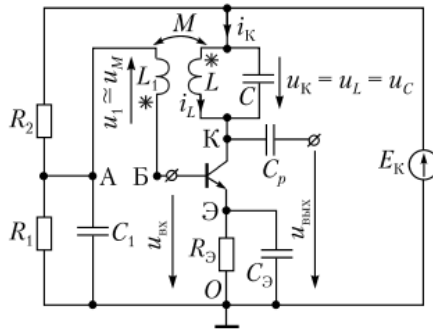


Рис. 15.2. Схема LC-автогенератора

Делитель напряжения (R_1, R_2) обеспечивает открытое состояние база-эмиттерного перехода (при подключенном источнике питания E_K).

15.4.1. Процесс установления колебаний

В исходном состоянии, когда схема отключена от источника питания, конденсатор C не заряжен, ток в индуктивности L не протекает, в LC-контуре нулевые начальные условия.

При подключении усилителя к источнику питания открывается база-эмиттерный переход, возникает эмиттерный, а следовательно, и коллекторный ток (поначалу совсем небольшой), в первые мгновения устремляющийся через незаряженный конденсатор C и способствующий его заряду, т.е. росту напряжения на конденсаторе. Поскольку $u_C = u_L = L \frac{di_L}{dt}$, то появляется ток в катушке индуктивности. В LC-контуре (цепь второго порядка) возникает переходный процесс, имеющий колебательный характер (ввиду малых резистивных потерь) с частотой, близкой к резонансной $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

С появлением переменного тока в индуктивности L начинает действовать положительная обратная связь (ПОС). Действительно, на зажимах катушки L_1 наводится напряжение взаимной индукции, которое при заданных на рис. 15.2 положительных направлениях равно

$$u_1 = \Phi_B - \Phi_A = M \frac{di_L}{dt}.$$

Если учесть, что на частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ потенциал точки A близок к потенциалу точки O , то напряжение взаимной индукции u_M можно считать приложенным между базой и общей точкой O , т.е. на вход усилительного блока. Причем оно находится в фазе с напряжением на контуре $u_K = u_L = u_C$, а значит, в противофазе с потенциалом коллектора (относительно точки O), т.е. с выходным напряжением. Это означает, что цепь ОС дает фазовый сдвиг $\psi = 180^\circ$.

Напомним, что у электронного усилителя сдвиг по фазе между выходным и входным напряжениями (снимаемым с коллектора и подаваемым на базовый вход) $\varphi = 180^\circ$. Тогда суммарный фазовый сдвиг всей петли ОС равен $\varphi + \psi = 360^\circ$. Таким образом, необходимое условие для получения положительной обратной связи здесь выполнено.

Воздействие, поданное по петле ПОС (в виде напряжения взаимной индукции) на вход усилителя, приведет к увеличению амплитуды колебаний как коллекторного тока, так и напряжения на контуре, а следовательно, и на выходе. А это, в свою очередь, вызовет дальнейший рост амплитуды колебаний, подаваемых на базовый вход, и т.д. Однако этот процесс не может продолжаться неограниченно.

При достижении амплитудой колебаний определенной величины все больше начинают проявляться нелинейные свойства электронного усилителя, а именно: снижается коэффициент передачи по напряжению K . Согласно уравнению баланса амплитуд (15.2), когда K падает до величины $1/\gamma$, рост амплитуды колебаний прекращается, процесс устанавливается.

15.4.2. Расчет амплитуды автоколебаний

На рис. 15.3 приведена типичная зависимость между амплитудами напряжений на выходе и входе электронного усилителя $U_{\text{вых}}(U_{\text{вх}})$ в виде кривой (1). Каждой точке кривой (1) соответствует определенный коэффициент усиления $K = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$. По ее характеру видим, что с ростом амплитуд колебаний на входе и выходе коэффициент усиления падает, проявляется нелинейность усилительного каскада.

Для четырехполосника ОС связь между амплитудами входного и выходного напряжений на фиксированной частоте линейна и в системе координат рис. 15.3 изображается прямой (2), проходящей через начало координат. Прямая (2) наклонена к горизонтали под углом $\arctg(1/\gamma)$. Точка пересечения прямой $1/\gamma$ и кривой $U_{\text{вых}}(U_{\text{вх}})$ усилительного каскада соответствует установившемуся режиму автогенератора и определяет амплитуды автоколебаний на входе и выходе.

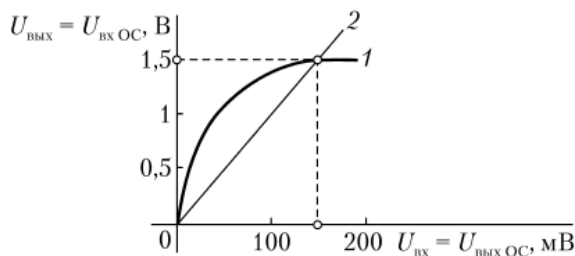


Рис. 15.3. Графический расчет установившихся колебаний автогенератора

Пример 15.1. Для традиционного усилителя, входящего в схему автогенератора (см. рис. 15.2), известна зависимость амплитуды выходного напряжения $U_{\text{вых}}$ от амплитуды напряжения на его входе $U_{\text{вх}}$. Она представлена кривой (1) на рис. 15.3 (в данном примере обычно принятый для амплитуд индекс m опущен). Требуется определить частоту и амплитуду установившихся на выходе автогенератора колебаний напряжения при условии, что $L = L_1 = 1$ мГн; $C = 1$ нФ; $C_1 = 1$ мкФ; $M = 0,1$ мГн.

Решение

1. Частота колебаний

$$\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-9}} = 10^6 \text{ рад/с;}$$

$$f_0 = \omega_0/(2\pi) \approx 157 \cdot 10^3 \text{ Гц} = 157 \text{ кГц.}$$

2. На частоте ω_0 сопротивления реактивных элементов схемы таковы:

$$\omega_0 L = \omega_0 L_1 = 1/(\omega_0 C) = 10^6 \cdot 10^{-3} = 1000 \text{ (Ом);}$$

$$1/(\omega_0 C_1) = 1/(10^6 \cdot 10^{-6}) = 1 \text{ (Ом).}$$

Поскольку сопротивление конденсатора C_1 на частоте ω_0 существенно меньше сопротивления индуктивности L_1 , то напряжением на емкости можно пренебречь и считать потенциалы точек A и O (см. рис. 15.2) одинаковыми.

3. Соотношение между мгновенными и амплитудными значениями напряжения на выходе и входе. Выходным напряжением генератора является разность потенциалов между коллектором и общей точкой O :

$$\varphi_K - \varphi_O = E_K - u_K(t).$$

Следовательно, переменная составляющая выходного напряжения генератора равна по величине, но противоположна по знаку напряжению $u_K(t)$ на LC -контуре (см. рис. 15.2).

Функция $u_K(t)$ связана с током в катушке $i_L(t)$ соотношением

$$u_K = u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (15.4)$$

Из равенства потенциалов точек A и O на частоте автоколебаний следует, что переменная составляющая напряжения на базовом входе усилителя весьма близка к напряжению на катушке индуктивности L_1 . На рис. 15.2 оно обозначено u_1 . Последнее, в свою очередь, близко к напряжению взаимной индукции, наведенному током $i_L(t)$. Его мгновенное значение (при положительных направлениях, заданных на рис. 15.2) равно

$$u_{\text{вх}} \approx u_1 = u_M = M \frac{di_L}{dt}. \quad (15.5)$$

Сравнение выражений (15.4) и (15.5) позволяет сделать следующие **выводы**.

- Напряжение взаимной индукции $u_M(t)$, подаваемое на базовый вход усилителя, и напряжение на контуре $u_K(t)$ совпадают по фазе. Тогда $u_M(t)$ и $u_{\text{вых}}(t)$ находятся в противофазе.

- Отношение амплитуды напряжения на входе усилителя $U_{\text{вх}}$ к амплитуде напряжения на контуре (а значит, и на выходе генератора) $U_K = U_{\text{вых}}$ определяется соотношением между величинами M и L , а именно: $U_{\text{вх}}/U_{\text{вых}} = M/L$.

4. Величина γ равна отношению амплитуд напряжений на выходе и на входе цепи ОС, т.е. $\gamma = U_{\text{выхОС}}/U_{\text{вхОС}}$. С учетом очевидных для замкнутой системы автогенератора (см. рис. 15.1) соотношений $U_{\text{выхОС}} = U_{\text{вх}}$; $U_{\text{вхОС}} = U_{\text{вых}}$, а также соотношения $U_{\text{вх}}/U_{\text{вых}} = M/L$ находим, что $\gamma = M/L$, и по заданным параметрам M и L вычисляем $\gamma = 0,1 \cdot 10^{-3}/1 \cdot 10^{-3} = 0,1$, следовательно, $U_{\text{выхОС}} = 0,1 U_{\text{вхОС}}$.

5. Расчет амплитуды установившихся колебаний. В системе координат на рис. 15.3, где по вертикали откладываются амплитуды $U_{\text{вх ОС}}$, а по горизонтали — $U_{\text{вых ОС}}$, строим зависимость

$$U_{\text{вх ОС}} = (1/\gamma)U_{\text{вых ОС}} = 10U_{\text{вых ОС}}.$$

Данному выражению соответствует прямая 2 на рис. 15.3. Точка пересечения ее с передаточной характеристикой усилителя (кривая 1) соответствует установившемуся режиму. Ее координаты $U_{\text{вх}} = 150$ мВ; $U_{\text{вых}} = 1,5$ В.

Ответ: на выходе заданного автогенератора установятся синусоидальные колебания с частотой $\omega_0 = 10^6$ рад/с и амплитудой 1,5 В.

15.5. RC-автогенератор

На невысоких частотах (менее 20 кГц) величины индуктивностей катушек, используемых в LC-генераторах, становятся очень большими, а сами катушки — недопустимо громоздкими. Поэтому предпочтительными являются схемы, вообще не содержащие индуктивностей. К такой категории относятся и RC-генераторы.

Простейший RC-генератор показан на рис. 15.4. Он содержит обычный однотранзисторный усилительный каскад и трехзвенный RC-четыреполюсник в цепи ОС. На его вход подается напряжение, снимаемое с коллектора (между коллектором и общей точкой), а вторичные зажимы подключены к базовому входу усилителя.

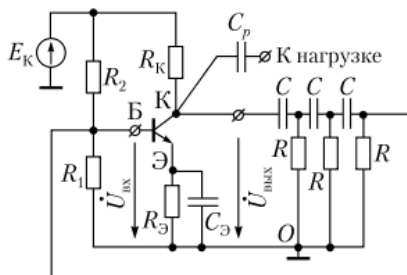


Рис. 15.4. Схема RC-автогенератора

15.5.1. Основное требование к цепи обратной связи

На заданной частоте автоколебаний RC-четыреполюсник ОС (он называется **фазовращателем**) должен обеспечивать сдвиг по фазе между напряжениями на его входе и выходе $\psi = 180^\circ$.

Напомним, что для одного RC-звена (рис. 15.5) в ненагруженном режиме, т.е. при разомкнутых зажимах 2—2', комплексный коэффициент передачи по напряжению равен (см. параграф 7.4)

$$\dot{\gamma}_1 = |\dot{\gamma}_1|e^{j\alpha_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R}{R - j/(\omega C)}. \quad (15.6)$$

Его модуль

$$|\dot{\gamma}_1| = \gamma_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega RC)^2}}. \quad (15.7)$$

определяет соотношение между амплитудой синусоидальных напряжений на выходе RC-звена и на его входе.

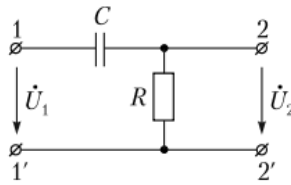


Рис. 15.5. Фазовращающее RC -звено

Аргумент комплекса (15.6)

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC} \quad (15.8)$$

представляет собой разность начальных фаз тех же напряжений и лежит в пределах $0 \leq \alpha_1 < 90^\circ$, т.е. α_1 более чем вдвое меньше 180° . Поэтому фазовращатель рассматриваемой структуры должен содержать не менее трех звеньев.

Согласно соотношению (15.8) для обеспечения фазового сдвига величиной α_1 одним ненагруженным RC -звеном его параметры должны удовлетворять равенству $RC = 1/(\omega \operatorname{tg} \alpha_1)$. Если задать $\alpha_1 = 60^\circ$, то $RC = 1/(\sqrt{3}\omega)$. Для трехзвенной структуры необходимый фазовый сдвиг одного RC -звена составляет примерно 60° , что позволяет выполнить условие баланса фаз (15.3). При фазовом сдвиге $\alpha_1 = 60^\circ$ амплитуда сигнала на входе одного ненагруженного RC -звена превышает амплитуду сигнала на его выходе ровно в два раза. Действительно, в соответствии с выражением (15.7)

$$\begin{aligned} 1/\gamma_1 &= \left| \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right| = \frac{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}}{R} = \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}} = \\ &= \sqrt{1 + (\operatorname{tg} 60^\circ)^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2. \end{aligned}$$

Такое ослабление вносит только последний (выходной) каскад трехкаскадного RC -фазовращателя (см. рис. 15.4). Ослабление нагруженных RC -звеньев фазовращателя (промежуточного и тем более входного) значительно больше. Можно показать [6], что результирующее ослабление трехкаскадного фазовращателя составляет примерно $1/\gamma \approx 29$. Соответствующие расчеты, ввиду их громоздкости, здесь не приводятся.

15.5.2. Принцип работы RC -автогенератора

Подключение источника питания приводит к возникновению в цепи усилителя переходного процесса, в результате которого появляются коллекторный ток и напряжение между коллектором и общей точкой O , т.е. выходное напряжение (см. рис. 15.4). Оно содержит множество гармоник, но только для одной из них (обозначим ее ω_0) сдвиг по фазе на выходе и входе фазовращателя составляет 180° . На частоте ω_0 действует положительная обратная связь. Гармоника ω_0 , пройдя цепь ПОС, поступает на вход усилителя, усиливается им и опять (уже в усиленном виде) возвращается на базовый вход.

В начальной стадии коэффициент усиления K превышает степень ослабления цепи ОС ($1/\gamma$), поэтому амплитуда колебаний на входе и выходе нарастает. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто соотношение баланса амплитуд. В соответствии с условием баланса ампли-

туд (15.2) ослабление сигнала, вносимое фазовращателем, в установившемся режиме должно полностью компенсироваться усилителем. Согласно подпараграфу 15.5.1 для трехзвенного RC -фазовращателя (см. рис. 15.4) коэффициент передачи по напряжению $\gamma \approx 1/29$ (сигнал ослабляется в 29 раз). Следовательно, коэффициент усиления усилительного каскада на частоте автоколебаний $K \geq 29$.

Величины R и C для трехзвенного фазовращателя, обеспечивающие требуемый фазовый сдвиг на частоте ω_0 , связаны с ω_0 соотношением [6]

$$RC = 1/(\sqrt{6}\omega_0). \quad (15.9)$$

Если частота автоколебаний задается в герцах ($f_0 = \omega_0/(2\pi)$), то формула (15.9) принимает вид

$$RC = 1/(2\pi\sqrt{6}f_0).$$

Таким образом, в RC -автогенераторе синусоидальных колебаний (см. рис. 15.4) произведение RC обратно пропорционально заданной частоте синусоидальных колебаний f_0 .

При построении RC -автогенераторов применяют также фазовращающие четырехполюсники вида, представленного на рис. 15.6.

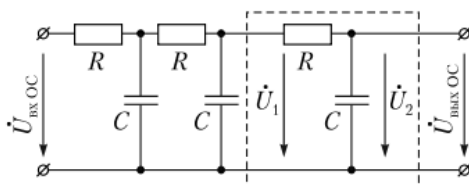


Рис. 15.6. Вариант трехзвенного RC -фазовращателя

Здесь в продольных ветвях включены резисторы R , а в поперечных — конденсаторы C . Комплексный коэффициент передачи одного ненагруженного звена такого фазовращателя равен

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-j/(\omega C)}{R - j/(\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (15.10)$$

Модуль γ_2 и аргумент α_2 комплекса (15.10) определяются следующими выражениями:

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}; \quad (15.11)$$

$$\alpha_2 = -\arctg \omega RC. \quad (15.12)$$

Если задать $\alpha_2 = -60^\circ$, то из равенства (15.12) следует, что $RC = \operatorname{tg} 60^\circ/\omega = \sqrt{3}/\omega$. В этом случае согласно выражению (15.11) ослабление амплитуды синусоидального сигнала, вносимое одним ненагруженным RC -фазовращателем (см. рис. 15.6), так же как и для RC -звена на рис. 15.5, составляет $1/\gamma_2 = 2$. Этот результат справедлив только для выходного звена фазовращателя, так как лишь оно работает практически в ненагруженном режиме. Полное ослабление составляет примерно $1/\gamma \approx 29$.

В цепи положительной обратной связи RC -автогенератора могут использоваться фазовращатели, содержащие более трех RC -звеньев (обычно 4–5). Например, четырехзвенный фазовращатель, состоящий из одинако-

вых RC -звеньев, вносит меньшее ослабление (затухание) синусоидального напряжения на частоте автоколебаний (по сравнению с трехзвенным), для него $1/\gamma$ примерно равно 18,4. Это позволяет уменьшить требуемый коэффициент усиления усилительного каскада.

С целью дальнейшего снижения затухания сигнала $1/\gamma$ применяют также RC -структуры с неодинаковыми параметрами R и C в различных звеньях. Такие RC -цепи называются **прогрессивными**. Для прогрессивных RC -фазовращателей, состоящих из 4–5 звеньев, минимальное затухание может составлять $1/\gamma \approx 11$.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите главные структурные составляющие любого электронного генератора. Чем обеспечивается энергия генерируемых колебаний?

2. Как классифицируются электронные генераторы в зависимости от формы генерируемых сигналов?

3. Назовите частотные диапазоны для генераторов НЧ, ВЧ и СВЧ.

4. Нарисуйте блок-схему автогенератора синусоидальных колебаний.

5. Запишите уравнение, связывающее комплексные коэффициенты передачи основного усилителя \dot{K} и четырехполосника ОС $\dot{\gamma}$ при условии существования установившихся колебаний. Какие соотношения принято называть балансом амплитуд и балансом фаз?

6. Поясните физический смысл уравнений баланса амплитуд и баланса фаз.

7. По какому признаку автогенератор гармонических колебаний относится к классу LC или RC ?

8. На схеме LC -генератора (см. рис. 15.2) покажите пару входных и пару выходных зажимов. Какие элементы цепи на рис. 15.2 принадлежат цепи ОС?

9. От каких параметров схемы на рис. 15.2 зависит коэффициент γ ? Определите величину γ , если $L = 2,5$ мГн, $M = 0,1$ мГн.

10. Определите частоту и амплитуду автоколебаний генератора (см. рис. 15.2) при $L = 2,5$ мГн, $C = 1,6$ нФ, $M = 0,1$ мГн. Зависимость $U_{\text{вых}}(U_{\text{вх}})$ представлена кривой на рис. 15.3.

11. Почему при построении автогенераторов гармонических колебаний с частотой менее 20 кГц пользуются схемами, не содержащими катушек индуктивности?

12. Нарисуйте блок-схему RC -генератора.

13. Нарисуйте схему четырехполосника ОС, обычно используемого в RC -генераторе. Почему этот четырехполосник называется фазовращателем? Каково основное требование, предъявляемое к схеме фазовращателя?

14. Рассчитайте частоту, на которой RC -звено на рис. 15.5 обеспечивает фазовый сдвиг $\dot{\phi}_{U_2} - \dot{\phi}_{U_1} = \alpha = 60^\circ$, если $R = 1$ кОм; $C = 0,1$ мкФ.

15. Объясните, почему в цепи автогенератора (см. рис. 15.4) после подключения питания устанавливается синусоидальный режим на частоте, определяемой параметрами R и C фазовращателя?

16. Чему равно минимальное значение коэффициента усиления K_{min} усилителя, если модуль комплексного коэффициента передачи цепи ОС $|\dot{\gamma}| = 1/40$?

Глава 16

ГЕНЕРАТОРЫ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- классификацию релаксационных генераторов;
- принцип работы заданной схемы генератора;

уметь

- определять по заданной структуре вид релаксационного генератора;

владеть

- навыками количественной оценки параметров выходного сигнала генератора (частоты и длительности импульсов).
-

Колебания, отличающиеся по форме от синусоидальных (гармонических), называются **релаксационными**. Примерами могут служить колебания прямоугольной и пилообразной формы, которые наиболее часто используются в электронной схемотехнике, а также импульсные последовательности напряжений трапецеидальной и треугольной формы. Генераторы, вырабатывающие релаксационные колебания, кроме усилительного устройства, в своей структуре обязательно содержат взаимодействующие между собой цепи положительной и отрицательной обратной связи (ПОС и ООС). В качестве усилителей могут применяться как транзисторные схемы на дискретных элементах, так и аналоговые микросхемы операционных усилителей (ОУ).

16.1. Генератор прямоугольных импульсов на операционном усилителе — мультивибратор

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов напряжения $u(t)$, которая по сути является последовательностью скачков напряжения чередующегося знака, относится к классу наиболее востребованных в схемотехнической практике. Поскольку гармонический состав рассматриваемой функции $u(t)$ весьма широк, то генераторы, формирующие такое напряжение, получили название **мультивибраторы** (генераторы многих гармоник). Первые мультивибраторы изготавливались на электронных лампах. Вслед за ними появились сначала их транзисторные аналоги, а затем и схемы на операционных усилителях (ОУ).

Схема простейшего мультивибратора на ОУ (рис. 16.1, а) содержит ОУ, охваченный комбинированной ОС — отрицательной и положительной. Принцип его работы основан на двух главных особенностях передаточной характеристики ОУ (рис. 16.1, б):

- 1) большой коэффициент усиления на линейном участке — $\kappa \approx 10^4 \div 10^6$;
- 2) постоянство величины $u_{\text{вых}}$ вне линейного участка — $u_{\text{вых}} = \pm u_{\text{вых max}}$.

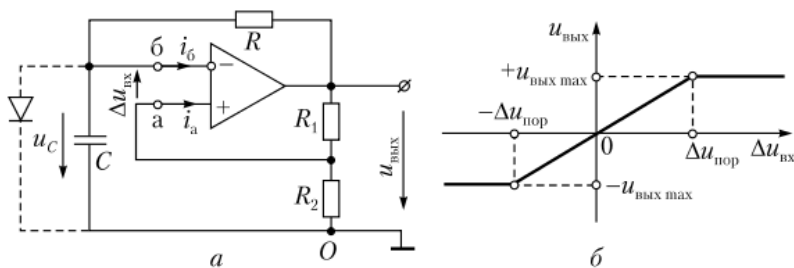


Рис. 16.1. Мультивибратор на ОУ:

a – его схема; *б* – передаточная характеристика ОУ

При надлежащем выборе параметров элементов в данной схеме возникает автоколебательный режим, при котором напряжение на выходе имеет вид симметричных двухполярных прямоугольных импульсов. Важной особенностью этого процесса является то, что большую часть периода ОУ работает вне линейного участка его характеристики, т.е. при больших величинах напряжения на дифференциальном входе (того же порядка, что и на выходе). Поэтому при анализе этих режимов мы не имеем права считать справедливым первое условие идеальности ОУ (14.15): равенство потенциалов инвертирующего и неинвертирующего входов. Оно, как известно, имеет место только, когда напряжение на дифференциальном входе не превышает порогового значения: $\Delta u_{\text{вх}} \leq \Delta u_{\text{пор}}$.

В то же время второе условие идеальности (14.16), т.е. равенство нулю входных токов ОУ, сохраняется в течение всего периода работы схемы. Следовательно, резисторы R_1 и R_2 можно считать включенными последовательно. Это же относится и к резистору R и конденсатору C .

16.1.1. Структурные особенности схемы мультивибратора

Схема мультивибратора имеет следующие структурные особенности.

1. Выходное напряжение приложено к участку, содержащему резисторы R_1 и R_2 . Напряжение на резисторе R_2 определяет потенциал неинвертирующего входа ОУ, точки «а» на рис. 16.1, *a* по отношению к общей точке O :

$$\varphi_a = u_{\text{вых}} R_2 / (R_1 + R_2) = \alpha u_{\text{вых}}, \quad (16.1)$$

где $\alpha = R_2 / (R_1 + R_2)$ – коэффициент положительной обратной связи.

Таким образом, величина φ_a пропорциональна $u_{\text{вых}}$ и изменяется с ним синхронно.

2. Потенциал на инвертирующем входе «б» (см. рис. 16.1, *a*) равен напряжению на конденсаторе C , т.е.

$$\varphi_b = u_C \quad (16.2)$$

и синхронно с ним изменяется.

3. Функции цепи ПОС в рассматриваемой схеме выполняет делитель напряжения (R_1 , R_2), так как напряжение с его выхода подается на *неинвертирующий* вход ОУ.

4. Функции ООС выполняет RC -цепь, напряжение с ее выхода (u_C) подается на *инвертирующий* вход ОУ.

16.1.2. Принцип работы

Каждый полупериод работы схемы содержит две стадии:

- 1) короткая (почти мгновенная), определяющая длительность фронтов;
- 2) длинная, от которой зависят длительность импульсов, а следовательно, и частота автоколебаний.

Рассмотрим каждую из этих стадий. Допустим, что в момент времени $t = 0$ произошло подключение схемы ОУ к источнику питания. Конденсатор предполагаем незаряженным, т.е. $u_c(0_-) = 0$.

1-я стадия. При подключении схемы к источнику питания неизбежно появление на входе усилителя хотя бы незначительной разности потенциалов $\varphi_a - \varphi_b$, порядка долей микровольта, положительного либо отрицательного знака. Для определенности положим

$$\Delta u_{\text{вх}} = \varphi_a - \varphi_b > 0. \quad (16.3)$$

Благодаря высокому дифференциальному коэффициенту усиления $\alpha \approx 10^6$ и положительной ОС, обеспечиваемой резистором R_2 в совокупности с R_1 , напряжение на выходе почти мгновенно установится равным $+u_{\text{вых max}}$. Это состояние есть результат лавинообразного процесса, очень быстро протекающего. Действительно, тысячные доли микровольта (напряжение порядка 10^{-9} В) при $\alpha \approx 10^6$ на выходе превращаются в милливольты. Существенная часть этого напряжения $\alpha u_{\text{вых}}$ возвращается на дифференциальный вход. Милливольты на дифференциальном входе, будучи усиленными, выводят состояние ОУ за пределы линейного участка его характеристики, где

$$u_{\text{вых}} = u_{\text{вых max}} = U_m = \text{const}. \quad (16.4)$$

Когда $u_{\text{вых}}$ становится постоянным, прекращает расти и потенциал неинвертирующего входа:

$$\varphi_a = \alpha u_{\text{вых}} = \alpha U_m = \text{const}. \quad (16.5)$$

Нужно принять во внимание, что потенциал инвертирующего входа φ_b (16.2), поддерживаемый конденсатором, в течение первой стадии практически не успевает измениться:

$$\varphi_a = u_c(0_-) = u_c(0_+) = 0. \quad (16.6)$$

Уравнениями (16.4)–(16.6) определяется состояние схемы (см. рис. 16.1, а) в момент окончания 1-й стадии, которая практически почти не заняла временного интервала. Будем считать, что ее начало соответствует моменту времени $t = 0_-$, а окончание — $t = 0_+$.

2-я стадия. Начиная с момента времени $t = 0_+$ справедлива эквивалентная схема (рис. 16.2). В ней учтено, что входные токи ОУ пренебрежимо малы, поэтому оба входа ОУ (точки «а» и «б») обрваны. Два идеальных источника ЭДС обеспечивают неизменные по величине и постоянные во времени напряжения на выходе и на неинвертирующем входе:

$$u_{\text{вых}} = U_m = \text{const}; \quad \varphi_a = \alpha U_m = \text{const}.$$

Согласно построенной эквивалентной схеме в контуре, содержащем конденсатор C , резистор R и выходные зажимы ОУ, созданы условия для зарядки конденсатора (по условию разряженного) до принужденного зна-

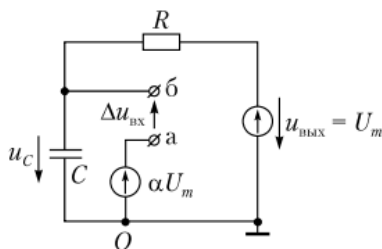


Рис. 16.2. Эквивалентная расчетная схема на интервале времени $0-t_1$

чения $+U_m$. Следовательно, при $t \geq 0_+$ возникает переходный процесс первого порядка с постоянной времени $\tau = RC$. Напряжение на конденсаторе $u_C(t)$ изменяется по экспоненте, стремясь к $+U_m$ (рис. 16.3, а). По тому же закону изменяется во времени и потенциал инвертирующего входа $\varphi_6(t) = u_C(t)$. Напомним, что потенциал точки «а» в рассматриваемой стадии остается неизменным и равным αU_m . Процесс зарядки конденсатора продолжается до тех пор, пока напряжение на нем не достигнет величины, близкой к αU_m , т.е. пока потенциал точки «а» не сравняется с потенциалом точки «б». В этот момент времени (обозначим его t_1) заканчиваются 2-я стадия и первый полупериод.

3-я стадия (второй полупериод). При $t \approx t_1$ напряжение на дифференциальном входе становится настолько малым, что режим ОУ сначала перемещается на линейный участок передаточной характеристики, а затем, когда потенциал точки «б» начинает превышать потенциал точки «а», $\Delta u_{вх}$ становится отрицательным, т.е. меняет знак. Почти мгновенно напряжение на выходе сначала изменит знак, а затем, благодаря наличию ПОС и возникшему лавинообразному процессу, $u_{вых}$ достигает наибольшего отрицательного значения $-U_m$. На этом завершается третья стадия, почти не занимающая временного интервала.

Состояние схемы к моменту ее окончания таково:

$$u_{вых} = -U_m = \text{const}; \quad \varphi_a = -\alpha U_m = \text{const};$$

$$\varphi_6 = u_C(t_1) = +\alpha U_m.$$

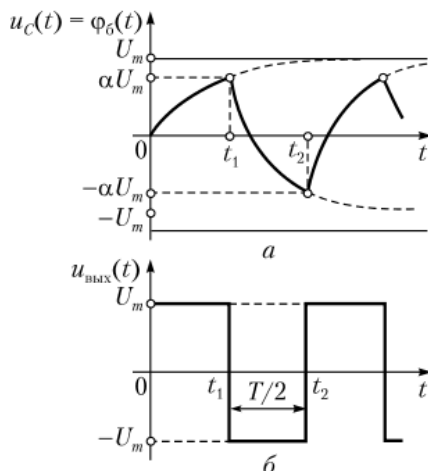


Рис. 16.3. Временные диаграммы для мультивибратора на ОУ:

а — напряжение на конденсаторе; б — напряжение на выходе мультивибратора

Напряжение на дифференциальном входе ОУ $\varphi_a - \varphi_b = \Delta u_{\text{вх}} = -2\alpha U_m$ существенно превышает пороговое значение, поэтому режим ОУ находится далеко за пределами линейного участка его передаточной характеристики (на отрицательной ветви).

4-я стадия (второй полупериод). Она подобна 2-й стадии, будучи противоположной ей по знаку, с той разницей, что конденсатор C перезаряжается от значения $u_c(t_1) = +\alpha U_m$ до $u_c(t_2) = -\alpha U_m$ (см. рис. 16.3, а). Начиная с момента t_1 устанавливается периодический процесс перезарядки конденсатора (от $+\alpha U_m$ до $-\alpha U_m$ и обратно). Напряжение на выходе схемы в этом случае имеет форму двухполярных импульсов, весьма близкую к прямоугольной, величиной $\pm U_m$ (рис. 16.3, б). Временной интервал $(t_2 - t_1)$ равен половине его периода T . Как показывает расчет, величина T связана с параметрами элементов цепи следующим выражением:

$$T = RC \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}. \quad (16.7)$$

Пример 16.1. Определить частоту следования импульсов на выходе мультивибратора, представленного на рис. 16.1, а, при следующих параметрах элементов: $R = R_1 = R_2 = 1$ кОм; $C = 0,1$ мкФ.

Решение

1. Вычисляем коэффициент обратной связи

$$\alpha = R_2 / (R_1 + R_2) = 0,5.$$

2. По формуле (16.7) находим период колебаний

$$T = 2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \ln(1,5/0,5) \text{ (с)}.$$

Поскольку $\ln(1,5/0,5) \approx 1$, получаем

$$T = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ (с)} = 0,2 \text{ (мс)}.$$

3. Искомая частота следования импульсов:

$$f = 1/T = 10^3/0,2 = 5 \cdot 10^3 \text{ (Гц)} = 5 \text{ (кГц)}.$$

16.2. Ждущий мультивибратор (одновибратор)

В отличие от обычного, ждущий мультивибратор формирует на выходе один-единственный прямоугольный импульс (рис. 16.4, а) при воздействии на его входе кратковременного запускающего импульса (рис. 16.4, б). Обычный мультивибратор превращается в ждущий, если в цепи на рис. 16.1, а конденсатор зашунтировать диодом (показан пунктиром). При этом положительное напряжение на конденсаторе не может превысить напряжение на открытом диоде. Данная цепь имеет состояние устойчивого равновесия, совпадающее со второй стадией в схеме обычного мультивибратора, при котором в соответствии с выражениями (16.3)–(16.6)

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}} &= U_m; \quad \varphi_a = \alpha U_m; \quad \varphi_b = u_c \approx 0; \\ \Delta u_{\text{вх}} &= \varphi_a - \varphi_b = \alpha U_m \gg 0. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Через открытый диод (если считать его близким к идеальному) протекает прямой ток, приблизительно равный $u_{\text{вых}}/R = U_m/R$. Состояние, заданное равенствами (16.8), может быть нарушено принудительным понижением потенциала точки «а» — неинвертирующего входа ОУ (см. рис. 16.1, а). Такую функцию выполняет кратковременный отрицательный импульс за-

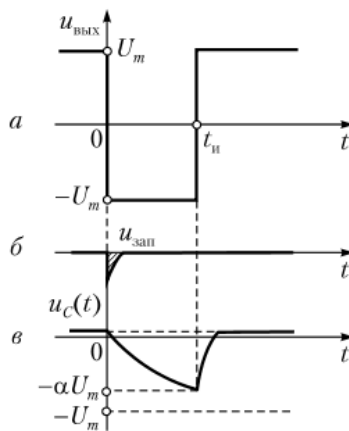


Рис. 16.4. Временные диаграммы для ждущего мультивибратора на ОУ:

a – напряжение на выходе; *б* – запускающий импульс; *в* – напряжение на конденсаторе

пуска (см. рис. 16.4, б), создающий небольшое напряжение на дифференциальном входе $\Delta u_{\text{вх}} = \varphi_a - \varphi_b < 0$.

Величина и длительность запускающего импульса должны быть достаточными для возникновения лавинообразного процесса, который приведет схему к состоянию

$$u_{\text{вых}} = -U_m; \varphi_a = -\alpha U_m; \varphi_b = u_c \approx 0,$$

так как напряжение на конденсаторе во время лавинообразного опрокидывания не успевает существенно измениться. В контуре, содержащем конденсатор C , резистор R и выходные зажимы ОУ, созданы условия для перезарядки конденсатора (практически разряженного) до принужденного значения $-U_m$. Ток через резистор R меняет знак, диод запирается, так как через диод ток такого направления протекать не может. Поэтому далее следует режим, совпадающий с тем, который наблюдается в обычном мультивибраторе на интервалах времени, где $u_c < 0$ (рис. 16.4, в). Когда напряжение на конденсаторе достигает величины $-\alpha U_m$, происходит обратное лавинообразное возвращение схемы к состоянию устойчивого равновесия: $u_{\text{вых}} = U_m; \varphi_a = \alpha U_m$. Дальнейший разряд конденсатора от $-\alpha U_m$ до величины напряжения, не превышающего напряжение на открытом диоде, не изменит этого состояния.

16.3. Генератор пилообразного напряжения на операционном усилителе

Основной принцип, лежащий в основе действия генератора пилообразного напряжения (ГПН), состоит прежде всего в создании линейно нарастающего напряжения $u(t) = kt$. Такая зависимость обычно получается путем интегрирования постоянного напряжения $U_0 = \text{const}$, а именно:

$$u(t) = \int_0^t U_0 dt = U_0 t.$$

Функции интегрирования чаще всего выполняет конденсатор C , через который пропускается постоянный ток

$$i_c(t) = \frac{U_0}{R} = I_0 = \text{const.}$$

Действительно:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt = \frac{1}{C} \int_0^t I_0 dt = \frac{I_0}{C} t = \frac{U_0}{RC} t.$$

Получение же из линейно нарастающего напряжения пилообразного схемных сложностей не представляет. Покажем, что в цепи на рис. 16.5, а при условии идеальности ОУ и запертом транзисторе, шунтирующем конденсатор, обеспечивается протекание неизменного во времени тока через конденсатор и по этой причине имеет место линейное нарастание напряжения на конденсаторе C .

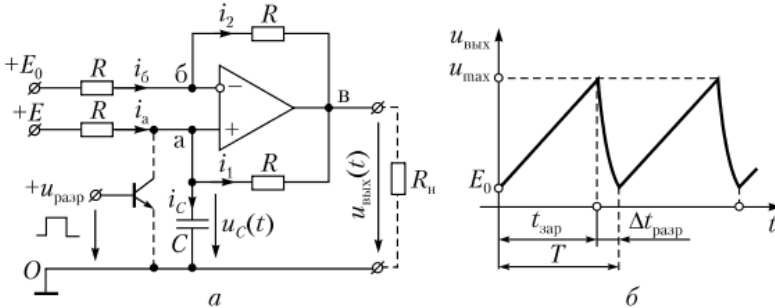


Рис. 16.5. Генератор пилообразного напряжения на ОУ:

а – схема генератора; б – напряжение на выходе $u_{\text{вых}}(t)$

Согласно условиям идеальности ОУ (14.15) и (14.16) для заданной цепи можем записать $\varphi_a = \varphi_6 = u_c(t)$; $i_2 = i_6$. Поскольку $\varphi_6 - \varphi_b = \varphi_a - \varphi_b$, то

$$i_1 = (\varphi_a - \varphi_b)/R = (\varphi_6 - \varphi_b)/R = i_2 = i_6;$$

$$i_a = (E - u_c(t))/R; \quad i_6 = (E_0 - u_c(t))/R.$$

По первому закону Кирхгофа ток, протекающий через конденсатор C , равен

$$i_c = i_a - i_1 = i_a - i_6. \quad (16.9)$$

После подстановки записанных для i_a и i_6 равенств в выражение (16.9) получим

$$i_c = (E - E_0)/R = \text{const.} \quad (16.10)$$

Тогда

$$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt = u_c(0) + (E - E_0)t/(RC). \quad (16.11)$$

Таким образом, главной особенностью цепи рассматриваемой структуры является *изменение напряжения на конденсаторе $u_c(t)$ по линейному закону* (16.11). Хотя через емкостной элемент течет постоянный ток (16.10), данный режим не принадлежит к стационарному.

Для формирования из линейного напряжения пилообразного параллельно конденсатору подключается транзистор, который при отсутствии положительного напряжения на база-эмиттерном переходе находится в за-

пертом состоянии. Под действием периодической последовательности положительных прямоугольных импульсов $u_{\text{разр}}(t)$ достаточно большой величины, поданных на базовый вход транзистора (на рис. 16.5, а показан один такой импульс, обозначенный как $+u_{\text{разр}}$), он периодически открывается до состояния насыщения. При этом сопротивление участка коллектор – эмиттер составляет всего несколько ом. Через открытый транзистор конденсатор сравнительно быстро разряжается до минимально возможного уровня $u_{C\text{min}}$. Длительность разрядных импульсов $\Delta t_{\text{разр}}$ (рис. 16.5, б) для этого должна быть достаточной, но по возможности минимальной, так как она определяет время заднего фронта генерируемых импульсов.

Величина $u_{C\text{min}}$ примерно равна E_0 . Действительно, при $u_C(t) = E_0$ «обнуляется» прежде всего ток $i_6 = (E_0 - u_C(t))/R$, а следовательно, $i_2 = i_1 = 0$. Если прямоугольный импульс продолжает действовать, то ток i_a почти полностью замыкается через открытый транзистор. Ток в емкости практически прекращается, а значит, напряжение на емкостном элементе остается неизменным. По окончании действия импульса $u_{\text{разр}}(t)$ входной транзистор запирается, что приводит к повторному заряду конденсатора.

Напряжение на выходе генератора связано с напряжением на конденсаторе следующим соотношением:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) &= u_C(t) - i_2(t)R = u_C(t) - R(E_0 - u_C(t))/R = \\
 &= 2u_C(t) - E_0 = E_0 + 2(E - E_0)t/(RC).
 \end{aligned}$$

График функции $u_{\text{вых}}(t)$ приведен на рис. 16.5, б. Величина наибольшего выходного напряжения u_{max} не должна выводить режим работы ОУ за пределы линейного участка его передаточной характеристики $u_{\text{вых}}(\Delta u_{\text{вх}})$.

16.4. Мультивибратор на биполярных транзисторах

Один из вариантов схемы мультивибратора на биполярных транзисторах приведен на рис. 16.6. Выходным напряжением здесь является разность потенциалов между любым из коллекторов и общей точкой O : $u_{K_1} = \Phi_{K_1} - \Phi_O$ или $u_{K_2} = \Phi_{K_2} - \Phi_O$. При правильном подборе параметров элементов схемы функции $u_{K_1}(t)$ и $u_{K_2}(t)$ представляют собой периодическую последовательность однополярных прямоугольных импульсов с максимальным значением амплитуды, близким к ЭДС коллекторного питания E_K .

В отличие от мультивибратора на ОУ (см. рис. 16.1) схема на рис. 16.6 позволяет изменять скважность выходных импульсов. Под **скважностью** $n_{\text{скв}}$ понимается отношение периода следования импульсов T к их длительности

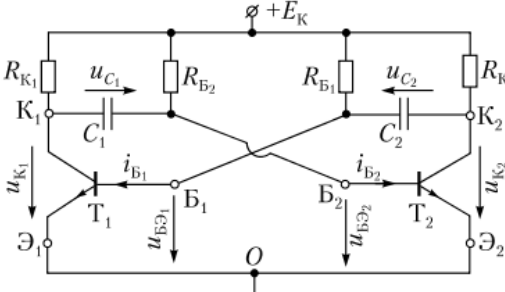


Рис. 16.6. Схема мультивибратора на биполярных транзисторах

$t_{и}$, т.е. $n_{скв} = T/t_{и}$. Например, при $t_{и} = T/2$ скважность $n_{скв} = 2$. Такая скважность характерна для случая полной симметрии параметров цепи на рис. 16.6.

16.4.1. Главные особенности схемы мультивибратора

Главные особенности исследуемой схемы мультивибратора (см. рис. 16.6) таковы.

1. Она содержит два усилительных каскада, взаимодействующих при помощи емкостной положительной обратной связи (сигнал с выхода одного усилителя подается через конденсатор на вход второго). Математически емкостная обратная связь определяется двумя уравнениями по второму закону Кирхгофа для контуров, содержащих базовый вход одного транзистора, подключенный к этому входу конденсатор и участок коллектор — эмиттер противоположного транзистора, а именно:

$$\begin{aligned} u_{БЭ1} - u_{К2} + u_{C2} &= 0; \\ u_{БЭ2} - u_{К1} + u_{C1} &= 0. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Из уравнений (16.12) следует, что

$$\begin{aligned} u_{БЭ1} &= u_{К2} - u_{C2}; \\ u_{БЭ2} &= u_{К1} - u_{C1}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Соотношения (16.13) лежат в основе анализа процессов, происходящих в цепи исследуемого мультивибратора (см. рис. 16.6).

2. Заданная схема симметрична по структуре и, если принять $R_{Б1} = R_{Б2}$, $R_{К1} = R_{К2}$, $C_1 = C_2$, то имеет место полная ее симметрия. Такой мультивибратор называется симметричным.

3. Начальное смещение транзистора в каждом из усилительных каскадов обеспечивается от источника коллекторного питания E_K и задается базовыми токами $i_{Б10} = i_{Б20} \approx E_K/R_{Б1} = E_K/R_{Б2}$. Причем величина $R_{Б1} = R_{Б2}$ берется значительно больше, чем $R_{К1} = R_{К2}$. При этом условии рабочая точка для каждого отдельно взятого усилительного каскада располагается на начальном (пологом) участке входной ВАХ транзистора — точка M на рис. 16.7.

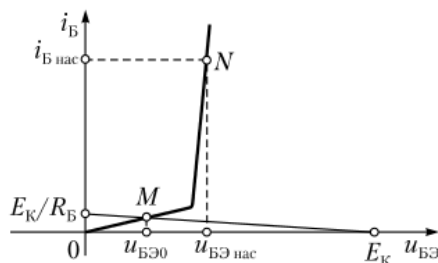


Рис. 16.7. Положение РТ на входной ВАХ транзисторов (точка M)

16.4.2. Неустойчивость стационарного режима

Покажем, что в цепи заданной структуры (см. рис. 16.6) по причине наличия емкостной обратной связи стационарный режим не является устойчивым. Напомним, что стационарный режим возникает под действием постоянных источников и для него характерны неизменные во времени токи в ветвях и напряжения на участках цепи.

Допустим, что заданная схема мультивибратора (см. рис. 16.6) абсолютно симметрична и при обрыве конденсаторов состояние на входе каждого усилительного каскада определяется точкой M на входной ВАХ каждого из двух транзисторов (см. рис. 16.7). В идеально симметричной схеме *при отсутствии несимметричных воздействий* наличие конденсаторов $C_1 = C_2$ не должно привести к изменению названного стационарного состояния.

В реальной цепи неизбежны кратковременные несимметричные изменения режима транзисторов. Предположим, что произошло небольшое кратковременное (почти скачкообразное) увеличение коллекторного тока первого транзистора T_1 на величину Δi_{K_1} , вызвавшее уменьшение потенциала коллектора (точки K_1) на Δu_{K_1} , т.е.

$$\Delta u_{K_1} = -\Delta i_{K_1} R_{K_1}. \quad (16.14)$$

На основании равенств (16.13) можно записать уравнение для приращений напряжений

$$\Delta u_{BЭ_2} = \Delta u_{K_1} - \Delta u_{C_1}. \quad (16.15)$$

По условию изменение коллекторного тока произошло почти скачкообразно, и напряжение на конденсаторе, согласно второму закону коммутации (8.4), за время скачка не успело существенно измениться, т.е. $\Delta u_{C_1} \approx 0$. Тогда из соотношений (16.14) и (16.15) следует, что

$$\Delta u_{BЭ_2} \approx \Delta u_{K_1} = -\Delta i_{K_1} R_{K_1}.$$

Вывод. Кратковременное изменение коллекторного напряжения одного из транзисторов Δu_K по емкостной обратной связи с тем же знаком передается на базовый вход второго транзистора.

В рассматриваемом нами случае отрицательное приращение $\Delta u_{BЭ_2}$ приведет к уменьшению базового тока i_{B_2} , т.е. к перемещению рабочей точки транзистора T_2 — точки M на входной ВАХ (см. рис. 16.7) по направлению к точке O . Следовательно, потенциал коллектора транзистора T_2 получит положительное приращение Δu_{K_2} , которое через конденсатор C_2 будет передано на вход первого транзистора $\Delta u_{BЭ_1} \approx \Delta u_{K_2}$ и вызовет увеличение как его базового, так и коллекторного тока. На входной ВАХ рабочая точка первого транзистора перемещается по направлению к точке N (см. рис. 16.7).

За счет ПОС, обеспечиваемой конденсаторами C_1 и C_2 , возникает лавинообразный процесс, в результате которого транзистор T_1 перейдет в открытое состояние (насыщения), а транзистор T_2 — в закрытое состояние (глубокой отсечки). В данном случае потенциал на коллекторе открытого транзистора T_1 становится близким к нулю ($\varphi_{K_1} \approx 0$), а потенциал на коллекторе закрытого транзистора немного меньше напряжения источника коллекторного питания $\varphi_{K_2} \approx E_K$. Аналогично кратковременное увеличение коллекторного тока в транзисторе T_2 приведет почти мгновенно к отпиранью T_2 и запиранью T_1 . В этом случае $\varphi_{K_1} \approx E_K$, а $\varphi_{K_2} \approx 0$.

Таким образом, в цепи заданной структуры невозможно одновременно открытое или же одновременно закрытое состояние транзисторов T_1 и T_2 . Благодаря присутствию в схеме конденсаторов любое из названных состояний (T_1 — открыт, T_2 — закрыт или T_1 — закрыт, T_2 — открыт) не является устойчивым. Его называют **квазистойчивым**. *Квазистойчивому режиму свойственно периодическое изменение состояний транзисторов на противо-*

положное. Поэтому напряжение на каждом из коллекторов имеет форму прямоугольных однополярных импульсов. Рассмотрим одну из квазиустойчивых стадий схемы на рис. 16.6 более подробно.

16.4.3. Квазиустойчивый режим работы мультивибратора

Допустим, что в момент времени $t = 0$ в схеме мультивибратора произошло «опрокидывание» транзисторов, приведшее к открыванию T_1 и закрытию T_2 . Скачкообразное изменение состояний транзисторов можно считать коммутацией, которая в цепи, содержащей не только резистивные элементы, но и накопители энергии — конденсаторы, неизбежно вызывает возникновение переходного процесса. Напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 изменяются. Причем зависимости этих напряжений от времени $u_{C_1}(t)$ и $u_{C_2}(t)$ определяют важнейшие параметры рассматриваемого квазиустойчивого (автоколебательного) режима, а именно: а) период автоколебаний и б) длительность переднего фронта импульсов выходного напряжения, снимаемого с любого из двух коллекторов.

Проведем приближенную оценку функций $u_{C_1}(t)$ и $u_{C_2}(t)$ в заданной квазиустойчивой стадии. Начиная с момента времени $t = 0_+$ транзистор T_1 открыт, а T_2 — закрыт, что отражено на эквивалентной схеме мультивибратора (рис. 16.8), где участок коллектор — эмиттер T_1 представлен короткозамкнутой перемычкой, а аналогичный участок T_2 оборван.

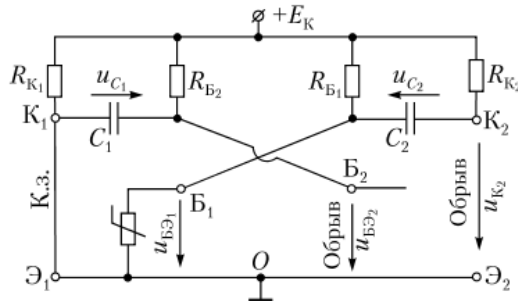


Рис. 16.8. Эквивалентная схема мультивибратора на биполярных транзисторах для случая, когда транзистор T_1 открыт, а T_2 — закрыт

Искомые функции $u_{C_1}(t)$ и $u_{C_2}(t)$ обязаны удовлетворять своим начальным условиям: $u_{C_1}(0_+)$ и $u_{C_2}(0_+)$. Эти величины в соответствии со вторым законом коммутации (см. гл. 8), определяются по состоянию конденсаторов в конце предыдущей стадии, т.е. при $t = 0_-$: $u_{C_1}(0_+) = u_{C_1}(0_-)$; $u_{C_2}(0_+) = u_{C_2}(0_-)$. Выразим напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 при $t = 0_-$ через потенциалы коллекторов и базовых входов транзисторов T_1 и T_2 :

$$\begin{aligned} u_{C_1}(0_-) &= \varphi_{K_1}(0_-) - \varphi_{B_2}(0_-); \\ u_{C_2}(0_-) &= \varphi_{K_2}(0_-) - \varphi_{B_1}(0_-). \end{aligned} \quad (16.16)$$

Так как при $t \leq 0_-$ транзистор T_1 был закрыт, а T_2 — открыт, то

$$\varphi_{K_1}(0_-) \approx E_K; \quad \varphi_{K_2}(0_-) \approx 0. \quad (16.17)$$

Потенциалы базовых входов транзисторов T_1 и T_2 при $t = 0_-$ определяем из следующих соображений: $\varphi_{B_2}(0_-) = u_{BЭ_{нас}} \approx 0,6$ В, поскольку T_2 находился еще в открытом режиме. В виду того что момент времени $t = 0_-$ непо-

средственно предшествует переходу транзистора T_1 в открытое состояние, напряжение на его базовом входе $u_{БЭ_1}(0_-)$ обязано быть положительным и лежать в пределах $0 < u_{БЭ_1}(0_-) \ll u_{БЭ_{нас}}$. Для качественной оценки переходного процесса можно принять: $u_{БЭ_1}(0_-) = \varphi_{Б_1}(0_-) \approx 0$. Тогда из соотношений (16.16) и (16.17) находим, что

$$u_{C_1}(0_-) \approx (E_K - 0,6) \approx E_K; \quad u_{C_2}(0_-) \approx 0. \quad (16.18)$$

На рис. 16.9 приведены эквивалентные схемы цепей заряда конденсаторов C_1 и C_2 для случая, когда транзистор T_1 открыт, а T_2 — закрыт. Они справедливы на временном интервале $0_+ \div t_1$, где t_1 — момент окончания рассматриваемой квазиустойчивой стадии, нами пока не определенный. Заметим, что в цепи заряда конденсатора C_1 (рис. 16.9, а) резистор R_{K_1} не влияет на переходное напряжение $u_{C_1}(t)$. Этот конденсатор перезаряжается через сопротивление $R_{Б_2}$ от напряжения $u_{C_1}(0_+) = u_{C_1}(0_-) = E_K$, стремясь к принужденному значению $u_{C_1пр} = -E_K$.

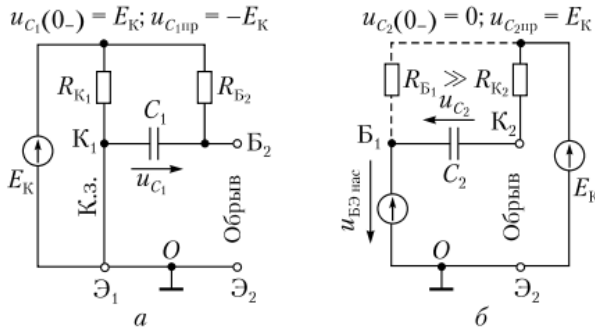


Рис. 16.9. Эквивалентные схемы для расчета переходных напряжений на конденсаторах C_1 и C_2 в цепи мультивибратора (рис. 16.6), когда транзистор T_1 открыт, а T_2 — закрыт:

а — для расчета напряжения $u_{C_1}(t)$; б — для расчета напряжения $u_{C_2}(t)$

В цепи на рис. 16.9, б, содержащей конденсатор C_2 , вход открытого транзистора T_1 представлен источником ЭДС с напряжением, равным $\sim u_{БЭ_{нас}}$. Перезаряд конденсатора C_2 здесь происходит через резистор R_{K_2} от напряжения $u_{C_2}(0_-) \approx 0$ до принужденного значения $u_{C_2пр} \approx E_K - u_{БЭ_{нас}}$. Так как $u_{БЭ_{нас}} \ll E_K$, то можно принять $u_{C_2пр} \approx E_K$. Резистор $R_{Б_1}$ не оказывает влияния на переходной процесс в конденсаторе C_2 . С учетом начальных условий (16.18) расчет переходных процессов по эквивалентным схемам (см. рис. 16.9, а, б) дает следующие выражения для функций $u_{C_1}(t)$ и $u_{C_2}(t)$:

$$\begin{aligned} u_{C_1}(t) &= -E_K + 2E_K e^{-t/(R_{Б_2}C_1)}; \\ u_{C_2}(t) &= E_K - E_K e^{-t/(R_{K_2}C_2)}. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Ввиду того что $R_{Б_1} = R_{Б_2} \gg R_{K_1} = R_{K_2}$, перезарядка конденсатора C_1 протекает много медленнее, чем C_2 . Постоянная времени $\tau = R_{Б_2}C_1$ на порядок и более превышает величину $\tau_{\phi} = R_{K_2}C_2$.

Конденсатор C_1 подключен одной обкладкой к открытому коллектору — точке K_1 , потенциал которой $\varphi_{K_1} \approx 0$. Другая обкладка этого конденсатора соединена с базой закрытого транзистора T_2 . Тогда из соотношений (16.12) следует, что $u_{C_1} + u_{Б_2} = 0$, или $u_{Б_2} = -u_{C_1}$. Таким образом, напряжение на базовом входе закрытого транзистора равно по величине и противоположно

по знаку напряжению на конденсаторе, подключенном к этому входу. Следовательно, на рассматриваемом временном интервале в соответствии с соотношениями (16.19) можно записать

$$u_{B_2}(t) = -u_{C_1}(t) \approx E_K - 2E_K e^{-t/\tau}, \quad (16.20)$$

где $\tau = R_{B_2} C_1$.

Длительность квазиустойчивой стадии. В начале стадии при $t = 0_+$ из формулы (16.20) следует, что $u_{B_2}(0_+) \approx -E_K$, т.е. транзистор T_2 находится в состоянии глубокой отсечки. В некоторый момент времени t_1 напряжение на конденсаторе $u_{C_1}(t)$ достигает нулевого значения и меняет знак с положительного на отрицательный. При этом напряжение $u_{B_2}(t)$ становится положительным, транзистор T_2 начинает приоткрываться и создаются условия для нового лавинообразного процесса, ведущего к опрокидыванию режима работы транзисторов мультивибратора (транзистор T_2 переходит в открытое, а T_1 — в закрытое состояние). Определим момент времени t_1 из условия $u_{C_1}(t_1) = 0$. С этой целью в выражение для $u_{C_1}(t)$ системы (16.19) подставляем $t = t_1$ и приходим к уравнению $E_K - 2E_K e^{-t_1/\tau} = 0$. Решая его, находим

$$t_1 = \tau \ln 2 = R_{B_2} C_1 \ln 2 \approx 0,7 R_{B_2} C_1. \quad (16.21)$$

Длительность переднего фронта импульса напряжения $u_{K_2}(t)$, снимаемого с коллектора закрытого транзистора T_2 . Начиная с момента $t = 0_+$ в соответствии с (16.12) справедливо уравнение $u_{K_2} - u_{B\bar{E}1} - u_{C_2} = u_{K_2} - u_{B\bar{E}нас} - u_{C_2} = 0$, из которого для напряжения на коллекторе закрытого транзистора T_2 следует

$$u_{K_2}(t) = u_{C_2}(t) + u_{B\bar{E}нас}. \quad (16.22)$$

Соотношение (16.22) свидетельствует о том, что быстрота нарастания напряжения $u_{K_2}(t)$ на коллекторе закрытого транзистора определяется функцией (16.19), а следовательно, постоянной времени $\tau_\phi = R_{K_2} C_2$. За время $3\tau_\phi$ напряжение $u_{C_2}(t)$ практически устанавливается, поэтому интервал времени

$$t_\phi = 3\tau_\phi = 3R_{K_2} C_2 \quad (16.23)$$

можно считать длительностью переднего фронта импульсов напряжения на выходе мультивибратора.

Период следования импульсов мультивибратора T включает в себя две квазиустойчивые стадии, поэтому для симметричной схемы мультивибратора, когда $C_1 = C_2 = C$; $R_{B_1} = R_{B_2} = R_B$; $R_{K_1} = R_{K_2} = R_K$, согласно формуле (16.21) можно записать

$$T = 2t_1 = 2R_B C \ln 2 \approx 1,4 R_B C. \quad (16.24)$$

Момент времени t_1 окончания рассматриваемой квазиустойчивой стадии с открытым T_1 и закрытым T_2 транзисторами является началом следующей квазиустойчивой стадии, когда T_1 закрыт, а T_2 открыт. Для симметричного мультивибратора отличие нового квазиустойчивого режима от предыдущего состоит только в том, что транзисторы T_1 и T_2 , а также элементы C_1 и C_2 ; R_{B_1} и R_{B_2} ; R_{K_1} и R_{K_2} , меняются местами. Все временные зависимости здесь подобны аналогичным функциям предшествующей стадии. Это обстоятельство учтено при построении графиков функций $u_{C_1}(t)$, $u_{C_2}(t)$, $u_{K_1}(t)$, $u_{K_2}(t)$, приведенных на рис. 16.10.

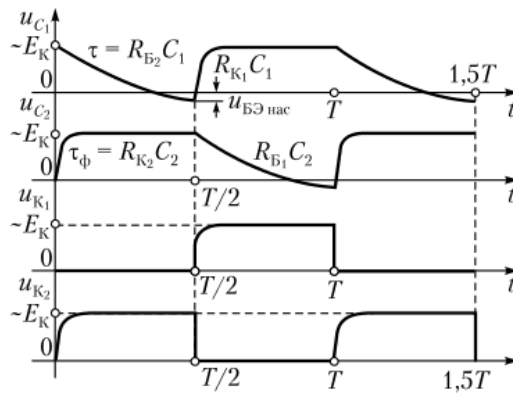


Рис. 16.10. Временные диаграммы для мультивибратора на биполярных транзисторах

Проведенный анализ позволяет сделать следующие **выводы**.

1. Для симметричного мультивибратора (см. рис. 16.6) в результате периодической смены состояний транзисторов T_1 и T_2 напряжение $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{к}}(t)$, снимаемое с их коллекторов, представляет собой последовательность импульсов, форма которых близка к прямоугольной (см. рис. 16.10). Частота следования этих импульсов равна

$$f = 1/T = 1/(2 \ln R_B C). \quad (16.25)$$

2. Передний фронт импульсов $u_{\text{к}}(t)$ соответствует переходу транзисторов из открытого в закрытое состояние. Длительность переднего фронта для симметричного мультивибратора согласно формуле (16.23) равна

$$t_{\text{ф}} \approx 3R_K C. \quad (16.26)$$

3. Задний фронт периодической последовательности импульсов на выходе мультивибратора (см. рис. 16.6) соответствует переходу транзистора из закрытого в открытое состояние. Длительность заднего фронта в основном определяется физическими процессами в структуре самого транзистора и существенно меньше длительности переднего фронта (16.26).

4. Максимальное значение прямоугольных импульсов напряжения на выходе мультивибратора (см. рис. 16.6) близко к величине напряжения коллекторного питания $E_{\text{к}}$.

5. Как уже отмечалось, схема на рис. 16.6 позволяет изменять скважность последовательности прямоугольных импульсов. Для этого достаточно ввести несимметрию в параметры элементов: $C_1 \neq C_2$ и $R_{B1} \neq R_{B2}$.

Пример 16.2. Для симметричного мультивибратора (см. рис. 16.6), у которого $R_{K1} = R_{K2} = R_K = 500 \text{ Ом}$; $R_{B1} = R_{B2} = R_B = 20 \text{ кОм}$; $C_1 = C_2 = C = 0,1 \text{ нФ}$; $E_{\text{к}} = 14,1 \text{ В}$, требуется определить период T , частоту следования f , длительность переднего фронта $t_{\text{ф}}$ импульсов напряжения на выходе, а также максимальное и действующее значения этого напряжения.

Решение

1. Находим период следования импульсов выходного напряжения, пользуясь формулой (16.24):

$$T = 2R_B C \ln 2 \approx 1,4 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-9} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ (с)} = 2,8 \text{ мкс.}$$

2. Частота следования импульсов равна

$$f = 1/T = 1/(2,8 \cdot 10^{-6}) \approx 357 \text{ кГц.}$$

3. Длительность переднего фронта импульсов экспоненциально нарастающего напряжения $u_K(t)$ с постоянной времени $\tau_\phi = R_K C$ принимаем равной $3\tau_\phi$. Тогда получаем

$$t_\phi = 3 \cdot 500 \cdot 0,1 \cdot 10^{-9} = 0,15 \cdot 10^{-6} = 0,15 \text{ мкс.}$$

4. Максимальное значение импульсов выходного напряжения $u_K(t)$ близко к напряжению коллекторного питания E_K , т.е. $U_m \approx E_K = 14,1 \text{ В}$.

5. Действующее значение напряжения U_K периодической последовательности однополярных прямоугольных импульсов с амплитудой U_m и длительностью $T/2$ равно

$$U_K = \sqrt{\int_0^T u_K^2(t) dt / T} = \sqrt{\int_0^{T/2} U_m^2(t) dt / T} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 10 \text{ В.}$$

16.5. Триггер

Триггерами называется специальный класс электронных схем, обладающих двумя устойчивыми состояниями. Их строят либо на основе транзисторных усилителей, либо на логических элементах. Простейший транзисторный триггер показан на рис. 16.11. Он содержит два усилительных каскада, связанных друг с другом цепочками ПОС: (R_{OC1}, C_1) и (R_{OC2}, C_2) . Через цепи ОС напряжение с коллекторного выхода одного транзисторного каскада подается на базовый вход второго, и наоборот. Параметры схемы триггера подобраны таким образом, что оба ее транзистора работают в ключевом режиме, т.е. каждый транзистор находится либо в состоянии насыщения, когда $i_B = i_{B_{\max}}$ (точка P_2 на рис. 16.12), либо в режиме отсечки, когда транзистор заперт и $i_B \approx 0$ (точка P_1 на рис. 16.12).

Как и в случае мультивибратора на биполярных транзисторах, при качественном анализе схемы триггера (см. рис. 16.11) можно принять, что:

1) сопротивление участка коллектор — эмиттер открытого транзистора примерно равно нулю (короткое замыкание), а запертого — бесконечно велико (обрыв);

2) потенциал коллектора открытого транзистора близок к потенциалу эмиттера, т.е. в нашем случае равен 0;

3) потенциал коллектора закрытого транзистора имеет высокий уровень, близкий к ЭДС источника коллекторного питания E_K (см. ниже).

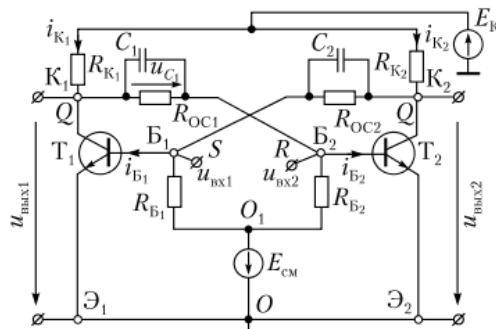


Рис. 16.11. Схема триггера

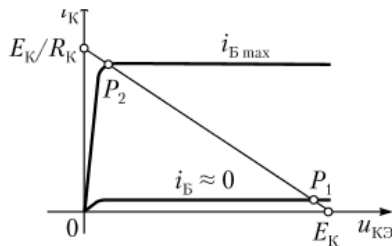


Рис. 16.12. Состояние транзистора в ключевом режиме

16.5.1. Статический режим

Главной особенностью рассматриваемой схемы триггера (см. рис. 16.11) является различное одновременное статическое состояние транзисторов T_1 и T_2 , а именно: когда один из транзисторов открыт, второй — закрыт. Действительно, режим каждого из транзисторов цепи на рис. 16.11 зависит от двух факторов: а) запирающее воздействие от ЭДС смещения $E_{см}$ через собственное базовое сопротивление ($R_{Б1}$ или $R_{Б2}$); б) воздействие обратного знака от источника $E_{К}$, передаваемое цепью ОС с противоположного коллектора. Преобладание одного из этих факторов и определяет состояние конкретного транзистора. Предположим, что в исходном режиме открыт транзистор T_1 , потенциал его коллектора близок к нулю, а следовательно, не зависит от $E_{К}$. Поэтому напряжение на базовом входе T_2 создается только ЭДС $E_{см}$, которая обеспечивает его надежное запираение. Аналогично при открытом T_2 запертым становится транзистор T_1 .

16.5.2. Режим «опрокидывания»

Рассмотренный статический режим работы триггера может быть изменен только внешним воздействием, которое принудительно переведет («опрокинет») открытый транзистор в запертое состояние. Допустим, что в момент времени $t = 0$ на базу транзистора T_1 (в исходном состоянии открытого) от некоторого источника подается отрицательный импульс напряжения $u_{вх1}(t)$, уменьшающий ток через его БЭ-переход, а следовательно, и КБ-переход почти до нуля. Это равносильно обрыву участка коллектор — эмиттер транзистора T_1 . Если транзистор T_2 продолжает быть запертым (ток $i_{Б2}$ равен нулю), то образуется последовательный замкнутый контур, содержащий $E_{К}$, $R_{К1}$, C_1 , $R_{Б2}$, $E_{см}$, в котором $E_{К}$ и $E_{см}$ действуют согласно и создают ток в резисторе $R_{Б2}$, определяющийся выражением

$$i_{R_{Б2}}(0_+) = (E_{К} + E_{см} - u_{C_1}(0_+)) / (R_{К1} + R_{Б2}).$$

Этот ток обусловит на базовом входе второго транзистора напряжение, превышающее в несколько раз величину, соответствующую открытому БЭ-переходу, т.е. T_2 почти мгновенно открывается. Потенциал его коллектора падает почти до нуля, поддерживая запертое состояние транзистора T_1 . В это же время потенциал на коллекторе запертого транзистора T_1 близок к $E_{К}$. Этим обеспечивается высокий положительный потенциал на базовом входе транзистора T_2 .

Полученное состояние (T_1 — заперт, T_2 — открыт) поддерживается схемой после окончания внешнего воздействия и теоретически может длиться

бесконечно долго. Схема как бы «запоминает» приобретенное ею состояние. Следовательно, по уровню напряжений на коллекторах схемы можно судить о предшествующем состоянии входов.

16.5.3. Простейшая запоминающая ячейка

Для двух базовых входов и двух коллекторных выходов обычно используются следующие обозначения:

- 1) вход $T_1 - S$; вход $T_2 - R$;
- 2) выход $T_1 - Q$; выход $T_2 - \bar{Q}$.

Их состояния условимся также обозначать:

- $S = 1$ и $S = 0$ — наличие и отсутствие импульса напряжения на входе T_1 соответственно;
- $R = 1$ и $R = 0$ — наличие и отсутствие импульса напряжения на входе T_2 соответственно;
- $Q = 1$ и $Q = 0$ — высокий и низкий уровень напряжения на выходе T_1 соответственно;
- $\bar{Q} = 1$ и $\bar{Q} = 0$ — высокий и низкий уровень напряжения на выходе T_2 соответственно.

Совокупность данных о соответствующих друг другу состояниях на входах и выходах рассматриваемой схемы триггера, выраженную «нулями» и «единицами», представим в виде табл. 16.1, которая называется **таблицей истинности**. Такая таблица является первичной характеристикой любого цифрового устройства (см. гл. 18).

Согласно табл. 16.1 состояние выходов Q и \bar{Q} повторяет состояние входов S и R соответственно, т.е. уровень Q (или \bar{Q}) позволяет судить об уровнях S и R на временном интервале, предшествующем моменту наблюдения. Следовательно, схема триггера (см. рис. 16.11) способна выполнять функции *запоминания* величин S и R и использоваться в качестве простейшей запоминающей ячейки. Общепринятые для триггеров подобного вида обозначения входов S и R являются начальными буквами английских слов *Set* — установка и *Reset* — сброс.

Таблица 16.1

Таблица истинности

Входы		Выходы	
S	R	Q	\bar{Q}
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	Сохраняется предыдущее состояние	

Контрольные вопросы и задания

1. Какого вида колебания называются релаксационными? Приведите их примеры.
2. Почему генераторы, формирующие на выходе последовательность прямоугольных импульсов напряжения, называются мультивибраторами?
3. На каких элементах обычно строятся схемы мультивибраторов?
4. Какие элементы схемы мультивибратора (см. рис. 16.1) реализуют ПОС, а какие — ООС?

5. Каковы особенности режима работы ОУ в цепи мультивибратора (см. рис. 16.1)? Которое из двух условий идеальности ОУ (см. параграф 14.3) здесь нарушается? Почему напряжение на выходе ОУ имеет форму прямоугольных импульсов?

6. По какому признаку в каждом полупериоде работы схемы на рис. 16.1 выделяются две различные стадии: а) лавинообразный процесс; б) квазистойчивый режим? Которая из этих стадий определяет длительность импульса выходного напряжения, а которая — длительность его фронта?

7. Как влияют на частоту следования выходных импульсов мультивибратора (см. рис. 16.1): а) величина коэффициента ПОС $\alpha = R_2/(R_1 + R_2)$; б) постоянная времени $\tau = RC$ цепи ООС?

8. Что такое ждущий мультивибратор? Как из мультивибратора на рис. 16.1 получить ждущий?

9. Какова структура схемы мультивибратора на биполярных транзисторах? Почему в цепи мультивибратора на биполярных транзисторах (см. рис. 16.6) невозможен стационарный режим? Какова роль конденсаторов C_1 и C_2 в этой схеме?

10. В каком случае схема на рис. 16.6 является симметричным мультивибратором?

11. Каковы основные отличия выходных напряжений мультивибраторов на биполярных транзисторах (см. рис. 16.6) и на ОУ (см. рис. 16.1)? Которая из схем позволяет изменять скважность импульсов?

12. Сформулируйте основной принцип, положенный в основу построения генераторов, формирующих напряжение пилообразной формы.

13. По какому закону изменяются ток $i_C(t)$ и напряжение $u_C(t)$ конденсатора C в цепи генератора пилообразного напряжения (ГПН) на ОУ (см. рис. 16.5, а)?

14. Какова роль транзисторного каскада в цепи генератора на рис. 16.5, а?

15. Назовите основные требования, предъявляемые к параметрам импульса напряжения $u_{\text{разр}}$, подаваемого на базовый вход транзистора в цепи на рис. 16.5, а (к его длительности и величине).

16. От чего зависит частота импульсов с выхода ГПН (см. рис. 16.5, а)?

17. Чем определяется длительность заднего фронта «пилы» (см. рис. 16.5, б) для ГПН на рис. 16.5, а?

18. Охарактеризуйте структуру схемы триггера на рис. 16.11.

19. Чем объясняется существование двух устойчивых статических состояний цепи на рис. 16.11. Каковы величины $u_{\text{вых1}}$ и $u_{\text{вых2}}$ в каждом из них?

20. По какой причине в цепи на рис. 16.11 возможен переход от одного устойчивого состояния к другому?

21. Почему схема на рис. 16.11 может выполнять функцию запоминающей ячейки?

Глава 17

ИСТОЧНИКИ ВТОРИЧНОГО ЭЛЕКТРОПИТАНИЯ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- структуру и назначение основных блоков источника вторичного электропитания;

уметь

- оценивать основные количественные характеристики заданных схем выпрямительных устройств, сглаживающих фильтров, стабилизаторов;

владеть

- навыками выбора типа выпрямителя, фильтра и стабилизатора в зависимости от решаемой задачи.

Источники, применяемые для электропитания электронной аппаратуры, делятся на два класса: **первичного электропитания** (ИПЭП) и **вторичного электропитания** (ИВЭП), причем ИВЭП обязательно предполагают наличие первичного источника, используя его энергию.

17.1. Источники первичного электропитания

К источникам первичного электропитания относят:

- 1) промышленную сеть;
- 2) генераторы постоянного и переменного тока различной частоты;
- 3) химические и гальванические элементы (аккумуляторы, батарейки и т.п.);
- 4) солнечные батареи.

Использование того или иного вида ИПЭП определяется конкретными условиями его эксплуатации:

- 1) в стационарных условиях, т.е. на неподвижных объектах;
- 2) на подвижных объектах.

В стационарных условиях электропитание осуществляется от промышленной сети, с выхода которой обычно поступает синусоидальное напряжение частотой 50 Гц. Номинальное (действующее) значение этого напряжения (по международному стандарту МЭК 38-83) 230 В (амплитудой $230\sqrt{2}$ В). В нашей стране используется также номинальное значение напряжения 220 В (ГОСТ 21128—83).

На подвижных объектах, например в авиационной бортовой аппаратуре, или же там, где нет возможности воспользоваться промышленной сетью, применяют:

- а) генераторы постоянного или переменного тока (чаще повышенной частоты 400 Гц и более);
- б) химические и гальванические элементы;
- в) солнечные батареи.

17.2. Источники вторичного электропитания, их структура и назначение основных блоков

ИВЭП — это источники постоянного напряжения, которые обеспечивают работу всех без исключения электронных схем, в том числе и полупроводниковых. Конечно, в принципе возможно использование в этих целях гальванических элементов (батарей). Однако они не в состоянии поддерживать требуемые значения напряжения и мощности достаточно длительное время.

При построении ИВЭП обязательно используется энергия первичного источника. Чаще всего это промышленная сеть, дающая синусоидальное напряжение частотой 50 Гц. Таким образом, ИВЭП — это *промежуточное звено между первичным источником (сетью) и нагрузкой*.

Типичная блок-схема ИВЭП содержит следующие элементы (рис. 17.1): трансформатор (ТР), выпрямитель (В), сглаживающий фильтр (СФ), стабилизатор (СТ).

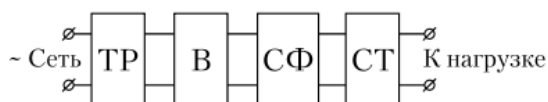


Рис. 17.1. Блок-схема источника вторичного электропитания

1. Трансформатор. Его главные функции таковы:

- осуществляет гальваническую развязку приемной цепи от первичного источника (сети);
- изменяет амплитуду синусоидального напряжения по сравнению с напряжением первичного источника, чаще понижая ее. Но это не всегда так. Например, для питания электронно-лучевых трубок в мониторах и телевизорах требуется более высокое по сравнению с бытовой сетью напряжение, например ≈ 1000 В.

2. Выпрямитель превращает подаваемое на него синусоидальное напряжение (не имеющее постоянной составляющей) в однополярную последовательность импульсов, содержащую постоянную составляющую. Ее доля (относительная величина) зависит от схемы выпрямителя.

3. Сглаживающий фильтр уменьшает степень пульсаций напряжения, подаваемого с выхода выпрямителя, и тем самым увеличивает долю постоянной составляющей.

4. Стабилизатор — четырехполюсник, включаемый между сглаживающим фильтром и нагрузкой. Он принимает на свой вход напряжение с выходных зажимов сглаживающего фильтра (практически не содержащее пульсаций) и подает его на нагрузку. Его функции — поддерживать величину постоянного напряжения на нагрузке с заданной точностью при воздействии дестабилизирующих факторов. Главные из них: 1) изменение напряжения сети; 2) изменение сопротивления нагрузки; 3) изменение температуры окружающей среды.

Рассмотрим подробнее основные блоки ИВЭП.

17.3. Выпрямители

Как уже упоминалось, основное назначение выпрямителя — превращать двухполярное напряжение в однополярное. Для такого преобразования используются элементы, обладающие односторонней проводимостью, называемые **вентильными**. К ним относятся и полупроводниковые диоды.

Выполненные на полупроводниковых диодах выпрямители делятся на два вида: однофазные и трехфазные.

17.3.1. Однофазные выпрямители

Любой однофазный выпрямитель содержит два входных зажима. На них через трансформатор подается синусоидальное напряжение. Оно может сниматься с однофазного источника либо с одной из фаз трехфазного.

Среди схем однофазных выпрямителей наиболее распространены два варианта:

- а) однополупериодного выпрямления;
- б) двухполупериодного выпрямления.

Они отличаются структурой, количеством используемых диодов и гармоническим составом функции $u_{\text{вых}}(t)$, а точнее, долей постоянной составляющей в выходном напряжении.

Однополупериодное выпрямление. Схема, реализующая однополупериодное выпрямление, изображена на рис. 17.2, а. Она содержит:

- однофазный трансформатор, осуществляющий гальваническую развязку выпрямителя от первичного синусоидального источника $u_1(t)$;
- выпрямитель — четырехполюсник, включенный между зажимами (1—1') и (2—2'), содержащий диод и выполняющий функции выпрямления;
- резистивную нагрузку R_n , напряжение на которой $u_n(t)$ равно напряжению на выходе выпрямителя $u_{\text{вых}}(t)$.

При анализе процессов в цепи на рис. 17.2, а будем считать диод идеальным. Его ВАХ показана на рис. 17.2, б. Активный двухполюсник, образо-

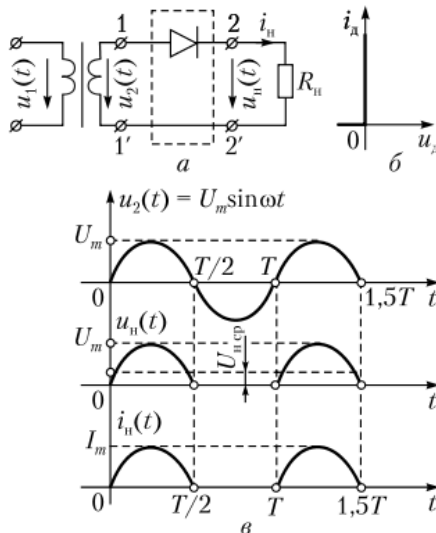


Рис. 17.2. Однополупериодное выпрямление:

а — принципиальная схема; б — ВАХ идеального диода; в — временные диаграммы

ванный первичным источником напряжения $u_1(t)$ и трансформатором, также будем рассматривать как идеальный синусоидальный источник ЭДС с напряжением $u_2(t)$ (рис. 17.2, в). При положительной полуволне напряжения на входе выпрямителя $u_2(t)$ напряжение на идеальном диоде равно нулю. Поэтому напряжение на нагрузке в течение этого временного интервала равно $u_n(t) = u_{\text{вых}}(t) = u_2(t)$. При отрицательном напряжении $u_2(t)$ ток через диод и сопротивление нагрузки R_n не течет, т.е. $u_n(t) = 0$. Все входное напряжение приложено к диоду. Графики зависимостей от времени напряжения $u_n(t)$ и тока $i_n(t)$ в рассматриваемой цепи представлены на рис. 17.2, в.

Используя известную формулу для среднего значения периодической функции, оценим величину постоянной составляющей напряжения на нагрузке $U_{\text{ср1}}$ на выходе однополупериодного выпрямителя:

$$U_{\text{ср1}} = \int_0^T u_n(t) dt / T = \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t dt / T = U_m / \pi \approx 0,318 U_m. \quad (17.1)$$

Двухполупериодное выпрямление. Один из вариантов схемы двухполупериодного выпрямителя показан на рис. 17.3, а. Функции выпрямления здесь выполняет диодный мост, содержащий диоды $D_1 - D_4$. На одну диагональ с зажимами 1—1' подается входное напряжение $u_2(t)$. К зажимам второй диагонали 2—2' подключено сопротивление нагрузки R_n . Принцип работы схемы на рис. 17.3, а следующий.

Под действием положительного напряжения $u_2(t)$ создается ток в контуре $D_3 - R_n - D_4$ (в указанном на рис. 17.3, а направлении). В этом случае при условии идеальности диодов все входное напряжение приложено к нагрузке.

Под действием отрицательного напряжения $u_2(t)$ в контуре $D_2 - R_n - D_1$ протекает ток, для резистора R_n направленный так же, как и в предыдущей стадии.

Таким образом, напряжение на нагрузке $u_n(t)$ связано с входным напряжением $u_2(t)$ следующим соотношением: $u_n(t) = |u_2(t)|$, что отражено на рис. 17.3, б. Постоянная составляющая в этом случае в два раза больше, чем при однополупериодном выпрямлении (17.1) и равна

$$U_{\text{ср2}} \approx 0,636 U_m. \quad (17.2)$$

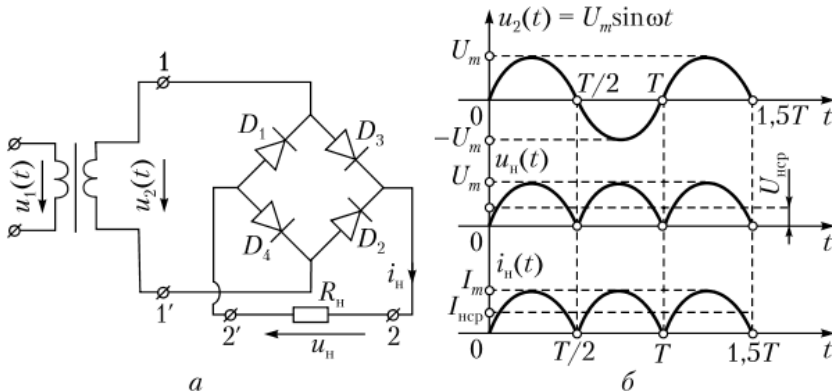


Рис. 17.3. Двухполупериодное выпрямление: а — принципиальная схема; б — временные диаграммы

17.3.2. Трехфазный выпрямитель

Трехфазный выпрямитель (рис. 17.4) имеет три входных зажима (a, b, c) и два выходных (N и N'). Зажимы a, b, c подсоединяются к трехфазному источнику напряжения либо непосредственно (рис. 17.4, а), либо через трехфазный трансформатор (рис. 17.4, б). Трехфазный трансформатор содержит три первичных обмотки и три вторичных, которые размещены на одном магнитном сердечнике.

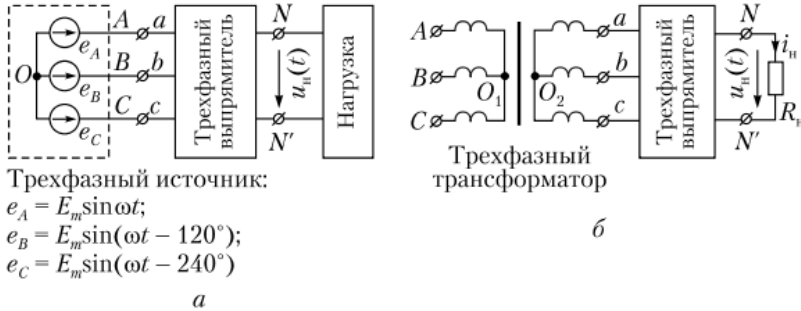


Рис. 17.4. Подключение трехфазного выпрямителя:

а — к трехфазному источнику (сети); б — к трехфазному трансформатору

Наибольшее распространение получили трехфазные выпрямители, выполненные по так называемой мостовой схеме (рис. 17.5, а). Она содержит шесть диодов и нагрузку, которая представляет собой входное сопротивление следующего каскада. Наличие на входе схемы трех синусоидальных ЭДС, сдвинутых по фазе симметрично, обеспечивает напряжение и ток в резистивной нагрузке со сравнительно большой постоянной составляющей и малыми пульсациями (рис. 17.5, б), а именно:

$$U_{\text{иср}} = (3\sqrt{3}/\pi)E_m \approx 1,67E_m, \quad (17.3)$$

где E_m — амплитуда фазной ЭДС (или фазного напряжения).

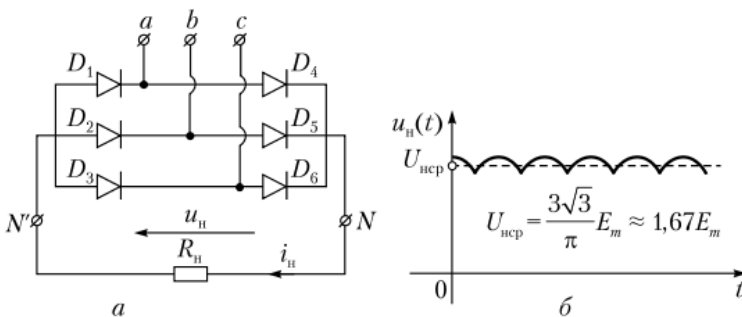


Рис. 17.5. Трехфазный выпрямитель:

а — мостовая схема; б — график напряжения на нагрузке

17.3.3. Коэффициент пульсации

Качество работы выпрямителя оценивается величиной коэффициента пульсации $K_{\text{пульс}}$. Он рассчитывается по формуле

$$K_{\text{пульс}} = U_{\text{м.осн. гарм}}/U_{\text{ср}}, \quad (17.4)$$

где $U_{\text{мосн. гарм}}$ — амплитуда основной гармонической составляющей напряжения на сопротивлении нагрузки выпрямителя при разложении функции $u_n(t)$ в ряд Фурье; $U_{\text{ср}}$ — среднее значение (или постоянная составляющая) функции $u_n(t)$ в том же разложении, т.е.

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T u_n(t) dt. \quad (17.5)$$

Например, для функции $u(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$ по формулам (17.4) и (17.5) находим, что

$$U_{\text{ср}} = U_0; \quad K_{\text{пульс}} = U_m/U_0.$$

В соответствии с формулами (17.1)–(17.5) коэффициент пульсации на выходе рассмотренных схем выпрямителей равен следующим значениям.

1. Однофазный выпрямитель, однополупериодное выпрямление:

$$U_{\text{мосн. гарм}} = U_m/2; \quad U_{\text{ср}} = U_m/\pi; \quad K_{\text{пульс}} = \pi/2 \approx 1,57.$$

2. Однофазный выпрямитель, двухполупериодное выпрямление:

$$U_{\text{мосн. гарм}} = 4U_m/(3\pi); \quad U_{\text{ср}} = 2U_m/\pi; \quad K_{\text{пульс}} = 2/3 \approx 0,667.$$

3. Трехфазный выпрямитель, по сравнению с однофазными, позволяет получать напряжение на нагрузке с гораздо меньшими пульсациями: $K_{\text{пульс}} \approx 0,057$.

17.4. Сглаживающие фильтры

Сглаживающий фильтр — это четырехполюсник, включаемый между источником пульсирующего напряжения и некоторой нагрузкой (рис. 17.6, а). Его функция заключается в снижении пульсаций напряжения (тока) в нагрузке по сравнению с пульсациями на входе до требуемого значения (рис. 17.6, б, в). Чаще всего источником пульсирующего напряжения является выход выпрямителя, а нагрузкой служит вход стабилизатора.

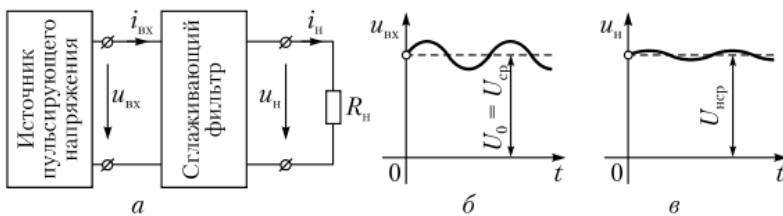


Рис. 17.6. Сглаживающий фильтр:

а — схема включения; б — график пульсирующего воздействия;
в — график напряжения (тока) в нагрузке

Коэффициент сглаживания. При оценке качества сглаживающего фильтра вводится понятие коэффициента сглаживания K_c . Он определяется как отношение коэффициентов пульсации на входе сглаживающего фильтра и на его выходе:

$$K_c = K_{\text{пульс вх}}/K_{\text{пульс вых}}. \quad (17.6)$$

Для функций сглаживания могут использоваться как пассивные, так и активные четырехполюсники.

17.4.1. Пассивные сглаживающие фильтры

Несколько вариантов простейших пассивных сглаживающих фильтров представлены на рис. 17.7 и 17.8.

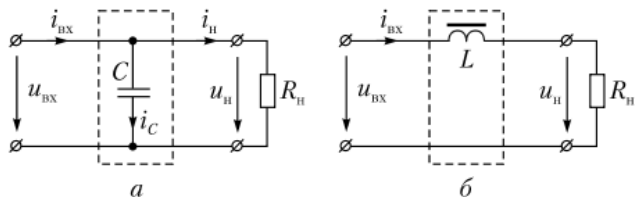


Рис. 17.7. Одноэлементные пассивные сглаживающие фильтры:

a — емкостной; *б* — индуктивный

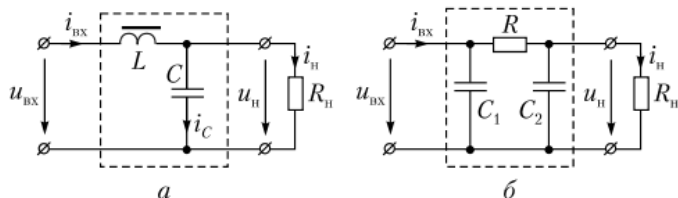


Рис. 17.8. Пассивные сглаживающие фильтры:

a — LC-фильтр; *б* — RC-фильтр

Рассмотрим их.

1. В схеме сглаживающего фильтра на рис. 17.7, *a* степень снижения пульсаций тока в сопротивлении R_H (по сравнению с уровнем пульсаций тока на входе) зависит от емкости конденсатора C . Пусть ток на входе пассивного фильтра содержит синусоидальную гармонику $I_{m1} \sin \omega t$ наряду с постоянной составляющей I_0 , т.е. $i_{\text{вх}}(t) = I_0 + I_{m1} \sin \omega t$. Если величина емкости C на частоте пульсаций удовлетворяет условию $X_C = 1/(\omega C) \ll R_H$, то амплитуда синусоидальной составляющей тока в сопротивлении нагрузки много меньше, чем в емкости. Конденсатор забирает на себя большую часть пульсирующей составляющей $I_{m1} \sin \omega t$. В то же время постоянная составляющая тока полностью проходит на нагрузку.

Схема на рис. 17.7, *a* применяется для целей сглаживания пульсаций при сравнительно низкоомной нагрузке, когда внутреннее сопротивление источника пульсирующего воздействия (ИПВ) значительно больше сопротивления нагрузки, т.е. когда ИПВ можно рассматривать как источник тока.

2. Сглаживающий фильтр на рис. 17.7, *б* содержит один элемент — катушку, обладающую достаточно большой индуктивностью L . Для этого она наматывается на ферромагнитный сердечник. Если на частоте основной гармоники входного воздействия сопротивление индуктивности $X_L = \omega L$ значительно больше сопротивления нагрузки, т.е. $X_L \gg R_H$, то синусоидальная составляющая входного напряжения в значительной степени приложена к индуктивности. Тогда амплитуда переменной составляющей напряжения на нагрузке сравнительно мала. Постоянная же составляющая этого напряжения почти такая же, как и на входе.

Одноэлементный L -фильтр на рис. 17.7, *б* используется для сглаживания в тех случаях, когда внутреннее сопротивление ИПВ по сравнению с R_H невелико и ИПВ является источником напряжения (ЭДС).

3. Схему на рис. 17.8, *a* можно рассматривать как каскадное соединение сглаживающих фильтров, изображенных на рис. 17.7, *a* и *б*. Обозначим комплексное сопротивление параллельно включенных в схеме на рис. 17.8, *a* R_n и C как Z_3 :

$$Z_3 = \frac{R_n(-jX_C)}{R_n - jX_C}. \quad (17.7)$$

Для обеспечения режима сглаживания величины индуктивности L и емкости C в схеме на рис. 17.8, *a* при заданном сопротивлении нагрузки R_n должны выбираться следующим образом:

$$X_C = 1/(\omega C) \ll R_n; \quad (17.8)$$

$$\omega L \gg |Z_3|. \quad (17.9)$$

Из соотношений (17.7) и (17.8) следует, что $|Z_3| \approx X_C$. Тогда в соответствии с неравенством (17.9) находим, что $\omega L \gg |Z_3| \approx X_C = 1/(\omega C)$, или

$$L \gg 1/(\omega^2 C). \quad (17.10)$$

В формулах (17.7)–(17.10) под частотой ω подразумевается частота основной гармоники при разложении входного воздействия в ряд Фурье.

4. Схема сглаживающего фильтра на рис. 17.8, *б* не содержит индуктивности. Принцип сглаживающего действия емкостей C_1 и C_2 аналогичен функции конденсатора C в фильтре на рис. 17.7, *a*. Величины C_1 и C_2 должны выбираться из следующих последовательных условий:

$$X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} \ll R_n; \quad X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} \ll |R_n - jX_{C_2}|.$$

Необходимо иметь в виду, что резистор R забирает на себя часть постоянной составляющей входного напряжения, что снижает КПД схемы сглаживающего фильтра на рис. 17.8, *б*.

Пример 17.1. На вход сглаживающего фильтра на рис. 17.8, *a* от некоторого источника с близким к нулю внутренним сопротивлением подается пульсирующее напряжение

$$u_{\text{вх}}(t) = 50 + 25\sin 400t \text{ (В)}.$$

Нагрузкой фильтра является резистор $R_n = 1$ кОм. Требуется подобрать величины индуктивности L и емкости C фильтра, обеспечивающие амплитуду пульсаций на выходе не более 0,25 В.

Решение

1. Выразим коэффициент сглаживания через параметры элементов фильтра и частоту пульсаций. Для этой цели:

- введем обозначения для постоянной составляющей и амплитуды переменной составляющей напряжения на входе и выходе, а именно: $U_{\text{вх0}}$, $U_{\text{вхт}}$ и $U_{\text{вых0}}$, $U_{\text{выхт}}$ соответственно;

- элементы сглаживающего фильтра L и C принимаем идеальными, т.е. не обладающими резистивными потерями, что позволяет считать постоянное напряжение на выходе фильтра таким же, как и на входе, тогда $U_{\text{вых0}} = U_{\text{вх0}}$.

Коэффициент сглаживания (17.6) при выполнении принятых условий равен

$$K_c = \frac{K_{\text{пульс вх}}}{K_{\text{пульс вых}}} = \frac{U_{\text{вхт}}/U_{\text{вх0}}}{U_{\text{выхт}}/U_{\text{вх0}}} = \frac{U_{\text{вхт}}}{U_{\text{выхт}}}.$$

Следовательно, в соответствии с условиями примера 17.1 сглаживающий фильтр должен обеспечить коэффициент сглаживания

$$K_c = \frac{U_{вхм}}{U_{выхм}} = \frac{25}{0,25} = 100.$$

Емкость конденсатора C предполагаем настолько большой, что ее сопротивление $X_c = 1/(\omega C)$ много меньше сопротивления нагрузки $R_{н}$. Тогда для комплексного сопротивления Z_{Σ} параллельно соединенных элементов $R_{н}$ и C , определяемого выражением (17.7) справедливо приближенное равенство $Z_{\Sigma} \approx -jX_c$. С учетом этого равенства комплексные амплитуды напряжений на входе $\dot{U}_{вхм}$ и выходе $\dot{U}_{выхм}$ сглаживающего фильтра можно выразить через комплексную амплитуду входного тока $\dot{I}_{вхм}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{вхм} &= \dot{I}_{вхм}(Z_L + Z_{\Sigma}) \approx \dot{I}_{вхм}j(X_L - X_c); \\ \dot{U}_{выхм} &= \dot{I}_{вхм}Z_{\Sigma} \approx \dot{I}_{вхм}(-jX_c).\end{aligned}$$

Коэффициент сглаживания определяется как отношение модулей записанных комплексов, т.е.

$$K_c = \frac{|\dot{U}_{вхм}|}{|\dot{U}_{выхм}|} = \left| \frac{X_L - X_c}{X_c} \right| = \left| \frac{X_L}{X_c} - 1 \right|. \quad (17.11)$$

Так как при $K_c \gg 1$ должно соблюдаться неравенство $X_L \gg X_c$, то знак модуля в формуле (17.11) можно опустить. Это равносильно соотношению между частотой резонанса в последовательном LC -контуре ω_0 и заданной частотой пульсаций ω ($\omega_0 \ll \omega$).

Пользуясь формулой (17.11), находим

$$K_c = \frac{X_L}{X_c} - 1 = \omega^2 LC - 1 \approx \omega^2 LC.$$

2. Полученный результат свидетельствует о том, что условиями примера 17.1 однозначно определяется только произведение параметров LC сглаживающего фильтра, а именно:

$$LC = K_c / \omega^2. \quad (17.12)$$

3. Величину емкости конденсатора выберем из условия (17.8) $X_c \ll R_{н}$. Пусть $X_c = R_{н}/40 = 25$ Ом. На заданной частоте пульсации $\omega = 400$ рад/с таким сопротивлением обладает емкость $C = 1/(\omega X_c) = 1/(400 \cdot 25) = 100$ мкФ.

4. При выбранной емкости конденсатора из формулы (17.12) находим требуемую величину индуктивности катушки:

$$L = K_c / (\omega^2 C) = 100 / (400^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}) = 6,25 \text{ Гн}.$$

17.4.2. Активный сглаживающий фильтр на биполярном транзисторе

Четырехполюсник, собранный по схеме, показанной на рис. 17.9, *а*, обладает более высокими сглаживающими свойствами, чем пассивные RC -фильтры. Подаваемое на его вход пульсирующее напряжение $u_{вх}(t)$ используется для коллекторного питания усилительного каскада, собранного на биполярном транзисторе. Выходное напряжение $u_{вых}(t)$ снимается с сопротивления нагрузки $R_{н}$, стоящего в коллекторной ветви. Механизм подавления пульсаций входного напряжения в данной схеме основан не только на сглаживающих свойствах емкостных элементов (C_1 и C_2), но также на осо-

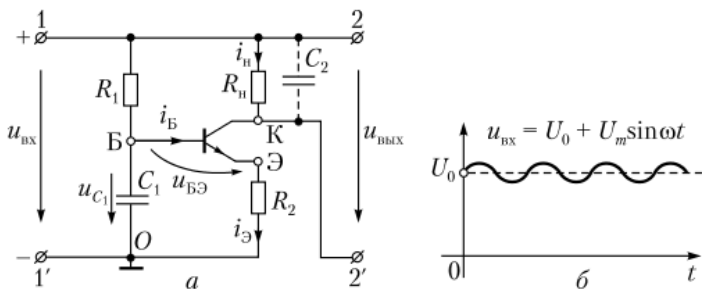


Рис. 17.9. Активный сглаживающий фильтр на биполярном транзисторе:
 а — схема фильтра; б — входное пульсирующее напряжение.

бенностях биполярного транзистора как нелинейного элемента (его выходных ВАХ). Поясним это.

С целью упрощения допустим, что $u_{вх}(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$, т.е. пульсирующее напряжение представляет собой наложение постоянной составляющей U_0 и гармоники $U_m \sin \omega t$ (рис. 17.9, б). Состояние схемы при $u_{вх}(t) = U_0$ назовем рабочей точкой, а соответствующие ей базовый и коллекторный токи обозначим $i_{Б0}$ и $i_{К0}$ соответственно.

Требования к режиму в РТ. Параметры используемых в схеме элементов выбирают такими, чтобы при $u_{вх}(t) = U_0$ транзистор работал:

а) в активном режиме (т.е. на пологом участке его выходной ВАХ);

б) с большим коллекторным током $i_{К0}$, обеспечивающим напряжение на сопротивлении R_n , т.е. на выходе, того же порядка, что и на входе. Для этого базовый ток $i_{Б0}$ (точка P_1 на рис. 17.10, а) должен быть достаточно большим.

Конкретное значение $i_{Б0}$ связано с параметрами схемы и величиной U_0 следующим соотношением:

$$i_{Б0} \approx U_0 / [R_1 + (\beta + 1)R_2]$$

(если пренебречь сопротивлением участка база — эмиттер по сравнению с величиной $(\beta + 1)R_2$).

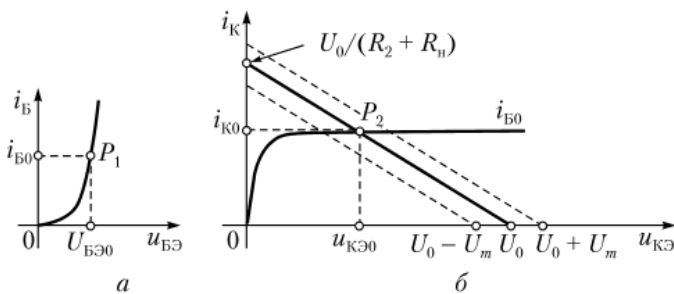


Рис. 17.10. Расположение РТ транзисторного каскада в схеме активного сглаживающего фильтра:

а — на входной ВАХ; б — на выходной ВАХ

Влияние пульсаций входного напряжения на базовый ток. Емкость C_1 , соединяющая базу с общей точкой O , берется настолько большой, чтобы ее сопротивление на частоте пульсаций ω было существенно меньше сопротивления резистора R_1 : $1/(\omega C) \ll R_1$. В этом случае почти все напряжение пульсации $U_m \sin \omega t$ приложено к резистору R_1 , а на базовый вход приходит-

ся лишь малая его доля. Поэтому ток базы поддерживается практически неизменным, равным $i_B \approx i_{B0} = \text{const}$.

Влияние пульсации входного напряжения на коллекторный ток. Из постоянства тока базы следует весьма важный результат: *при изменении (пульсации) входного напряжения состояние транзисторного усилителя на выходе определяется точками, принадлежащими только одной из кривых в семействе выходных ВАХ, а именно: $i_K(u_{КЭ})$ при $i_B = i_{B0}$* . Она показана на рис. 17.10, б. Здесь же проведена «нагрузочная» прямая, определяющая положение РТ (точка P_2) на выходной ВАХ и величину тока в нагрузке $i_n = i_{K0}$ при постоянном напряжении на входе $u_{вх}(t) = U_0$. Она отсекает по оси напряжений отрезок U_0 , а по оси тока — $U_0/(R_2 + R_n)$. Если напряжение коллекторного питания наряду с постоянной составляющей содержит и пульсирующую $U_m \sin \omega t$, нагрузочная прямая перемещается параллельно самой себе (пульсируя с частотой ω), отсекая по оси напряжений отрезки в пределах от $(U_0 - U_m)$ до $(U_0 + U_m)$.

Благодаря пологому характеру выходной ВАХ пульсации коллекторного тока, а следовательно, и напряжения на выходе невелики.

Конденсатор C_2 дает дополнительное сглаживание.

17.5. Стабилизаторы напряжения

Стабилизаторы напряжения делятся на два класса:

- 1) параметрические;
- 2) компенсационные.

Параметрические стабилизаторы выполняются на основе специальных нелинейных элементов. Их ВАХ содержат участок, где напряжение мало зависит от протекающего тока. Таким свойством обладает, например, ВАХ кремниевого стабилитрона. Схема и принцип действия параметрического стабилизатора напряжения на кремниевом стабилитроне были рассмотрены в параграфе 11.3.

Компенсационные стабилизаторы обязательно содержат сравнивающее (вычитающее) устройство, которое «сравнивает» выходное напряжение с некоторым эталоном. Его называют опорным напряжением и обычно обозначают $U_{оп}$. Разность $U_{вых} - U_{оп} = \Delta U$ сначала усиливается, а затем подается на устройство регулировки выходного напряжения с целью его приближения к заданному номиналу. Стабилизаторы этого класса подразделяются на два вида:

- 1) линейные;
- 2) импульсные.

Рассмотрим конкретные реализации компенсационных стабилизаторов обоих видов.

17.5.1. Компенсационный стабилизатор напряжения линейного вида

На рис. 17.11, а показана схема простейшего линейного компенсационного стабилизатора напряжения. Она содержит усилительный каскад на биполярном транзисторе (собранный по схеме эмиттерного повторителя). Последний выполняет одновременно три функции: сравнения, усиления и регулировки.

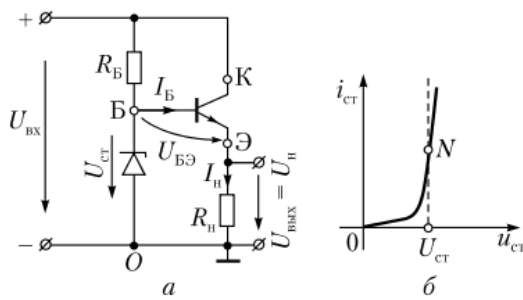


Рис. 17.11. Компенсационный стабилизатор линейного типа:
 а – схема стабилизатора; б – расположение РТ на ВАХ стабилитрона

Входное (стабилизируемое) напряжение используется для коллекторного питания усилителя. Опорное напряжение обеспечивается тем же входным источником, но снимается со стабилитрона, включенного между базой и общей точкой O .

Параметры схемы, изображенной на рис. 17.11, а, подобраны так, что в режиме, принятом за номинальный, т.е. при $U_{вх} = U_{вхном}$, РТ транзистора располагается на крутом участке входной ВАХ (точка P на рис. 17.12, а) и на пологом участке выходной ВАХ (точка P_1 на рис. 17.12, б), а РТ стабилитрона – на участке стабилизации (точка N на рис. 17.11, б).

Рассмотрим, как реагирует схема, изображенная на рис. 17.11, а на отклонение режима от номинального для двух случаев.

1. $U_{вх} = \text{const}$; $R_n = \text{var}$. Предположим, что сопротивление нагрузки R_n уменьшилось. Первоначальной реакцией схемы на такое изменение будет уменьшение напряжения на нагрузке $U_{ввых} = U_n$. Так как опорное напряжение $U_{ст} = U_{БЭ} + U_n$ поддерживается стабилитроном на неизменном уровне, то снижение U_n должно вызвать увеличение напряжения на база-эмиттерном переходе, а это приведет к возрастанию базового и эмиттерного токов, т.е. I_n . Тогда произведение $I_n R_n = U_n$ приблизится к своему прежнему значению.

Вывод. Уменьшение сопротивления нагрузки R_n компенсируется увеличением тока в нагрузке I_n и наоборот. Это проиллюстрировано графически на рис. 17.12, б.

2. $R_n = \text{const}$; $U_{вх} = \text{var}$. Если при изменении входного напряжения РТ транзистора не выходит за пределы пологого участка его выходной ВАХ, то коллекторный и эмиттерный токи получают *незначительные* прираще-

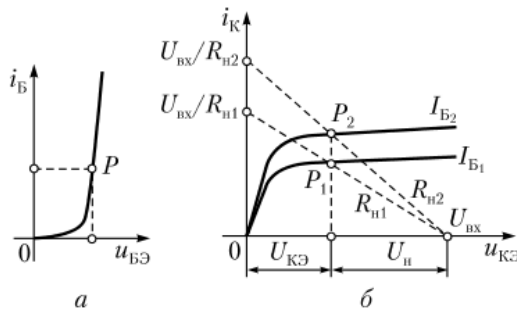


Рис. 17.12. Расположение РТ на ВАХ биполярного транзистора в схеме компенсационного стабилизатора линейного вида (см. рис. 17.11, а):
 а – на входной ВАХ; б – на выходных ВАХ

ния. Следовательно, и напряжение на нагрузке $U_n = I_n R_n$ поддерживается почти на неизменном уровне.

17.5.2. Импульсный стабилизатор напряжения

В инженерной практике часто возникает задача стабилизации *среднего значения напряжения на нагрузке*

$$U_{н\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T u_n(t) dt.$$

При этом допускаются пульсации мгновенного значения функции $u_n(t)$ в заданных пределах. Таковую стабилизацию осуществляет импульсный стабилизатор напряжения.

Идея импульсной стабилизации среднего значения напряжения такова. Стабилизируемое напряжение подается через стабилизатор на нагрузку не непрерывно, а только в течение некоторого интервала времени внутри периода T (периодически, то подключается к нагрузке, то отключается от нее).

Таким образом, период работы импульсного стабилизатора T состоит из двух стадий:

- 1) t_n — интервал времени, в течение которого нагрузка подключена к источнику стабилизируемого напряжения;
- 2) $T - t_n$ — временной интервал, на котором нагрузка отключена от источника.

В результате импульсный стабилизатор, принимая на свой вход постоянное нестабильное по величине напряжение, выдает на выход стабилизатора напряжение $u_{\text{вых}}(t)$, не являющееся постоянным. Оно пульсирует относительно некоторого среднего уровня $U_{\text{ср}}$. Величина $U_{\text{ср}}$ зависит от соотношения длительностей t_n и $(T - t_n)$, а именно: с ростом t_n среднее значение напряжения $U_{\text{ср}}$ увеличивается, а с уменьшением t_n уровень $U_{\text{ср}}$ понижается. Следовательно, для поддержания величины $U_{\text{ср}}$ на заданном уровне при изменении входного напряжения необходимо изменять время его подключения t_n к нагрузке. При увеличении $U_{\text{вх}}$ интервал t_n необходимо уменьшать, а при уменьшении — увеличивать. Для осуществления изложенного принципа стабилизатор должен содержать устройство, выполняющее преобразование уровня постоянного напряжения в длительность временного интервала. Такое преобразование называется **широтно-импульсной модуляцией** (ШИМ), а само устройство — широтно-импульсным модулятором.

Принцип работы широтно-импульсного модулятора. Блок-схема ШИМ-преобразователя изображена на рис. 17.13, *а*, и включает в себя устройство сравнения (вычитания) и ключевую схему.

Один из входов схемы сравнения подключается к генератору пилообразного напряжения $u_{\text{пил}}(t)$, а на другой ее вход подается преобразуемое постоянное напряжение U . Оба входных напряжения показаны на рис. 17.14, *а*.

Устройство сравнения выполняет операцию вычитания напряжений, поданных на его входы. На выходе устройства получаем разность $u_{\text{пил}}(t) - U$, представляющую собой периодическую последовательность двухполярных импульсов. На рис. 17.14, *б* длительность отрицательных импульсов обозначена t_1 , тогда длительность положительных импульсов равна $T - t_1$. Со-

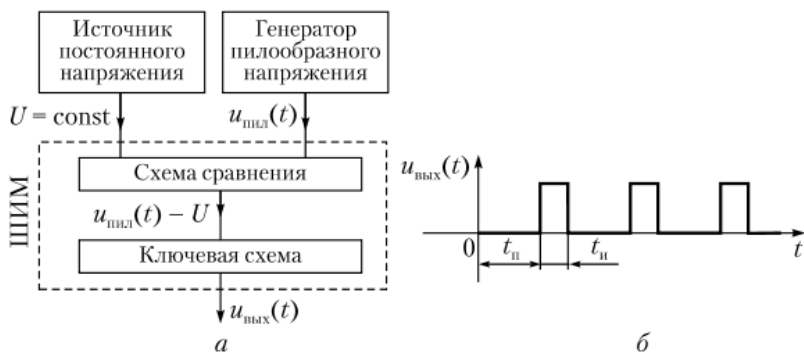


Рис. 17.13. Широтно-импульсный преобразователь постоянного уровня U в длительность временного интервала:

a – блок-схема преобразователя; b – напряжение с выхода ключевой схемы

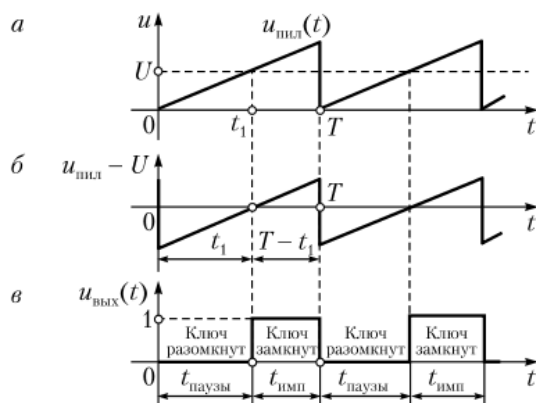


Рис. 17.14. Принцип широтно-импульсной модуляции – преобразования «вольты в секунды»:

a – пилообразное напряжение $u_{\text{пил}}(t)$ и уровень $U = \text{const}$; b – график разности $u_{\text{пил}} - U$; c – напряжение с выхода ключевой схемы

отношение между временными интервалами t_1 и $T - t_1$ зависит от уровня постоянного напряжения U и параметров «пилы».

Разностное напряжение (см. рис. 17.14, б) подается на ключевую схему, реагирующую на полярность входного напряжения, а именно:

- при $u_{\text{пил}}(t) - U < 0$ $u_{\text{вых}} = 0$;
- при $u_{\text{пил}}(t) - U > 0$ $u_{\text{вых}} = 1$.

Тогда на выходе ключевой схемы имеем последовательность прямоугольных импульсов (рис. 17.14, в). Их период задается генератором пилообразного напряжения. Пауза между импульсами пропорциональна уровню постоянного напряжения U .

Широтно-импульсный модулятор является составной частью импульсного стабилизатора напряжения и задает периодический характер его работы.

Схема импульсного стабилизатора напряжения. Импульсный стабилизатор напряжения (рис. 17.15) содержит транзисторный ключ, собранный на биполярном $p-n-p$ -транзисторе.

По структуре схема транзисторного ключа является четырехполюсником, входными зажимами которого являются эмиттер и общая точка O , выходными – коллектор и точка O , а участок эмиттер – коллектор выполня-

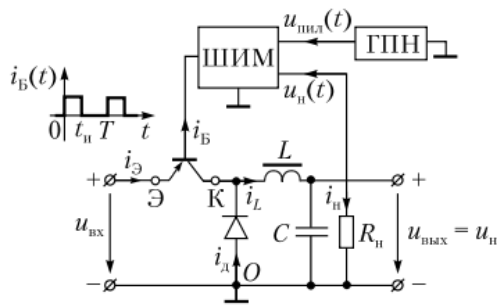


Рис. 17.15. Импульсный стабилизатор напряжения

ет роль ключевого элемента. Вход ключевой схемы подсоединен к источнику стабилизируемого напряжения, а напряжение с ее выхода подается на сопротивление нагрузки R_n через сглаживающий LC -фильтр.

При *замкнутом ключе* потенциал коллектора близок к потенциалу эмиттера. Сопротивление нагрузки (через LC -звено) практически подключено к источнику входного напряжения. Дiode при этом заперт, поэтому его присутствие схемой не ощущается. Этому режиму соответствует эквивалентная схема на рис. 17.16, а. На ней участок коллектор — эмиттер представлен короткозамкнутой (к.з.) перемычкой.

При *разомкнутом ключе* нагрузка отключена от источника стабилизируемого напряжения; двухполюсник, содержащий R_n, L, C , пребывает в свободном режиме. Индуктивный ток (в рассматриваемой схеме при размыкании транзисторного ключа он не меняет своего направления) вынужден замыкаться через открытый диод. Эквивалентная схема для этого случая показана на рис. 17.16, б. Управление состоянием транзисторного ключа (открыт или закрыт) производится от широтно-импульсного модулятора, который обеспечивает протекание на базовом входе транзистора периодической последовательности прямоугольных импульсов тока длительностью t_n с периодом T (см. рис. 17.15). Амплитуда импульсов должна быть достаточной для надежного открытия БЭ-перехода. При таком воздействии на базовый вход состояние транзисторного ключа в течение одного периода изменяется дважды: в соответствии с рис. 17.15 в момент времени $t = 0$

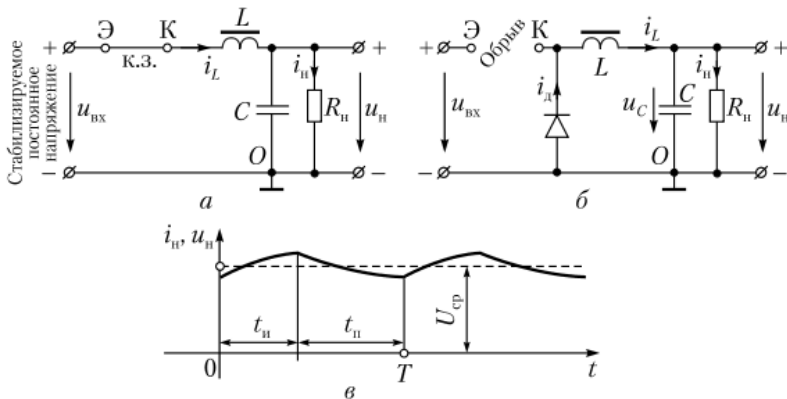


Рис. 17.16. К анализу работы импульсного стабилизатора напряжения:

а — эквивалентная схема при замкнутом ключе; б — эквивалентная схема при разомкнутом ключе; в — график напряжения (тока) на выходе стабилизатора

двухполюсник ($R_{\text{н}}, L, C$) подключается к источнику постоянного напряжения $u_{\text{вх}}$, а при $t = t_{\text{н}}$ — отключается. Каждое переключение (считаем, что оно происходит мгновенно) приводит к возникновению переходного процесса в нагрузочной цепи ($R_{\text{н}}, L, C$). Это цепь второго порядка.

На временном интервале $0 \leq t < t_{\text{н}}$, когда транзистор открыт (ключ замкнут), функция $u_{\text{вых}}(t)$ рассчитывается по эквивалентной схеме на рис. 17.16, а. Во время паузы $t_{\text{н}} \leq t < T$, когда транзистор закрыт, участок коллектор — эмиттер проявляет себя как обрыв цепи — ключ разомкнут. Напряжение на нагрузке $u_{\text{вых}}(t)$ находится по эквивалентной схеме на рис. 17.16, б.

На рис. 17.16, в приведен график функции $u_{\text{вых}}(t)$, полученный в результате расчета обоих переходных процессов. Напряжение на выходе стабилизатора плавно (без скачков) колеблется около своего среднего уровня.

Механизм стабилизации. На входы широтно-импульсного модулятора (см. рис. 17.15) воздействуют два напряжения: 1) с выхода генератора пилообразного напряжения $u_{\text{пил}}(t)$; 2) с сопротивления нагрузки $u_{\text{вых}}(t)$. Особенностью используемого ШИМ является то, что он реагирует не на мгновенное значение $u_{\text{вых}}(t)$, а на его среднее значение $U_{\text{ср}}$. Небольшие пульсации $u_{\text{вых}}(t)$ не снижают его качество как преобразователя уровня напряжения в длительность.

Схема на рис. 17.15 позволяет стабилизировать среднее значение напряжения на нагрузке при изменении как сопротивления нагрузки, так и входного напряжения. Рассмотрим эти случаи.

1. $U_{\text{вх}} = \text{const}$; $R_{\text{н}} = \text{var}$. Допустим, что в некоторый момент времени произошло увеличение сопротивления нагрузки $R_{\text{н}}$. Так как L и C воспрепятствуют быстрому изменению тока в $R_{\text{н}}$, то первоначальной реакцией схемы на такое изменение будет возрастание выходного напряжения, а следовательно, и его среднего значения $U_{\text{ср}}$.

Увеличенное напряжение $U_{\text{ср}}$, поданное на соответствующий вход ШИМ, вызовет уменьшение длительности импульсов $t_{\text{н}}$, поступающих на базовый вход транзисторного ключа, и одновременно возрастание паузы между импульсами. А это в свою очередь приведет к уменьшению среднего значения тока в нагрузке $I_{\text{ср}}$. Обратный эффект будем иметь при уменьшении $R_{\text{н}}$.

Таким образом, увеличение $R_{\text{н}}$ вызывает уменьшение тока $I_{\text{ср}}$, а уменьшение $R_{\text{н}}$ вызывает увеличение тока $I_{\text{ср}}$. Тогда для напряжения на выходе получаем

$$U_{\text{ср}} = I_{\text{ср}} R_{\text{н}} \approx \text{const}.$$

2. $U_{\text{вх}} = \text{var}$; $R_{\text{н}} = \text{const}$. Поскольку величина тока базы $i_{\text{б}}(t)$, подаваемого на вход транзисторного ключа с ШИМ, на вершине прямоугольного импульса поддерживается постоянной, то транзистор на интервале $0-t_{\text{н}}$ работает, не выходя за пределы одной кривой в семействе выходных ВАХ, на ее пологом участке. Здесь ток коллектора $i_{\text{к}}$ слабо зависит от напряжения $u_{\text{кэ}}$, а следовательно, от напряжения источника коллекторного питания. По этой причине схема стабилизатора мало критична к величине $U_{\text{вх}}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что понимается под источниками первичного (ИПЭП) и вторичного (ИВЭП) электропитания?
2. Назовите основные блоки ИВЭП и их функции.

3. Нарисуйте схемы простейших однофазных выпрямителей на полупроводниковых диодах: однополупериодного и двухполупериодного. Сравните их по уровню постоянной составляющей напряжения на нагрузке.

4. Сколько входных зажимов имеет трехфазный выпрямитель? От какого источника он питается?

5. Сколько выходных зажимов имеет трехфазный выпрямитель? Как соотносится постоянная составляющая напряжения на нагрузке трехфазного выпрямителя $U_{\text{н ср}}$ с фазной ЭДС трехфазного источника, питающего выпрямитель?

6. Дайте определение коэффициенту пульсации $K_{\text{пульс}}$. Сравните коэффициенты пульсации, обеспечиваемые однофазными выпрямителями (одно- и двухполупериодным) и трехфазным.

7. Какие устройства называются сглаживающими фильтрами? Какова их главная функция?

8. Дайте определение коэффициенту сглаживания $K_{\text{с}}$.

9. Приведите примеры пассивных четырехполюсников, применяемых для целей сглаживания пульсаций напряжения и тока.

10. Поясните работу активного сглаживающего фильтра на биполярном транзисторе (см. рис. 17.9, а). На какие элементы в цепи четырехполюсника (см. рис. 17.9, а) возлагаются сглаживающие функции?

11. Каковы требования к емкостям конденсаторов C_1 и C_2 , а также к положению РТ на входной и семействе выходных ВАХ транзистора цепи на рис. 17.9, а?

12. Назовите главную функцию стабилизатора напряжения.

13. Какие стабилизаторы относятся к параметрическим?

14. Назовите основной признак принадлежности стабилизатора к разряду компенсационных устройств.

15. Каковы разновидности стабилизаторов компенсационного типа?

16. Поясните механизм стабилизации компенсационного стабилизатора линейного вида, показанного на рис. 17.11, а.

17. Как называется стабилизатор, выполняющий функцию стабилизации среднего значения напряжения?

18. Изложите идею импульсной стабилизации среднего значения напряжения на нагрузке.

19. Каков принцип работы широтно-импульсного модулятора (ШИМ)? Нарисуйте блок-схему ШИМ.

20. Поясните работу импульсного стабилизатора напряжения (см. рис. 17.15).

21. Каким состояниям транзисторного ключа в схеме стабилизатора на рис. 17.15 соответствуют эквивалентные схемы, изображенные на рис. 17.16, а, б? Поясните механизм стабилизации среднего значения напряжения на нагрузке при изменении: а) сопротивления нагрузки и б) выходного напряжения.

Глава 18

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- свойства простейших логических операций, а также их алгебраическую запись;
- основные теоремы алгебры логики;

уметь

- записывать алгебраически логическую функцию, заданную в виде таблицы истинности;
- проводить структурную реализацию логической функции в универсальных базисах;

владеть

- методикой минимизации заданных логических выражений.
-

Все электронные устройства делятся на два основных класса:

- 1) аналоговые;
- 2) цифровые.

Аналоговые устройства являются преобразователями электрических сигналов с непрерывно изменяющимися во времени токами $i(t)$ и напряжениями $u(t)$. Такие устройства рассмотрены в гл. 11–17 учебника.

Цифровые устройства выполняют функции формирования, преобразования и передачи информации имеющей вид двоичного кода, т.е. совокупности «нулей» и «единиц». Их анализу посвящены гл. 18–21.

Особое положение при названной классификации занимают электронные узлы, содержащие одновременно как аналоговую, так и цифровую части. К ним относятся аналого-цифровые (АЦП) и цифро-аналоговые (ЦАП) преобразователи. Они рассмотрены в гл. 20.

18.1. Цифровое устройство и его таблица истинности

Цифровое устройство — это преобразователь информации, представленной в виде двоичного кода, т.е. совокупностью «нулей» и «единиц». На рис. 18.1 дано условное изображение цифрового устройства, реализующего функцию n переменных $y(x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n)$. Оно имеет n входов и один выход. Причем как входные переменные (x_1, x_2, \dots, x_n) , так и выходная величина y могут принимать лишь два значения — 0 и 1.

Чтобы однозначно определить функцию y , необходимо задать ее значения (0 или 1) для всех возможных комбинаций аргументов (x_1, x_2, \dots, x_n) . Как известно, число различных наборов из n величин, каждая из которых

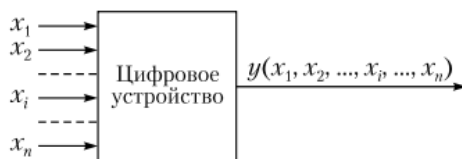


Рис. 18.1. Цифровое устройство с n входами и одним выходом

может принимать только два значения (0 или 1) равно 2^n . Следовательно, для функции двух переменных должны быть заданы четыре значения выходной величины, трех — восемь, четырех — 16 и т.д.

Эта информация, представленная в табличном виде, называется **таблицей переключений** или **таблицей истинности**. Для функции n переменных она представлена табл. 18.1. Функцию $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ часто называют булевой функцией.

Таблица 18.1

Таблица истинности для функции n переменных

№	Аргументы						Функция y
	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	
1	0	1	...	0	...	1	1
2	0	1	...	1	...	0	0
...
k	1	0	...	0	...	1	1
...
2^n	1	1	...	1	...	0	1

Таким образом, таблица истинности является наиболее простым и понятным способом задания информации о функции y , выполняемой некоторым цифровым устройством. Однако ее форма довольно громоздка и недостаточно наглядна. Менее громоздкими и существенно более наглядными являются таблицы Карно, называемые чаще **картами Карно** [6, 7, 9, 13].

Самой компактной формой изображения информации, содержащейся в таблице истинности, является запись через символы алгебры логики.

18.2. Алгебраическая запись логической функции, выполняемой цифровым устройством

Аппарат алгебры логики (булевой алгебры) позволяет информацию, представленную в табличной форме, записать в виде математического уравнения, содержащего простейшие логические операции. Каждой из таких операций соответствует своя элементарная таблица истинности.

18.2.1. Простейшие логические операции и их алгебраическая запись

Существует три наиболее простые операции над логическими переменными, которые относят к основным.

1. **Логическое умножение — конъюнкция (логическое «И»)**. Это функция нескольких переменных $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Она принимает значение, равное 1, только в том случае, когда все аргументы равны 1.

2. **Логическое сложение** — дизъюнкция (логическое «ИЛИ»). Логическое сложение также является функцией нескольких переменных. Она принимает значение 0 только в одном случае — когда все переменные равны 0.

3. **Логическое отрицание** — инверсия (логическое «НЕ»). Логическое отрицание — функция одной переменной, принимающая противоположное (по отношению к переменной) значение.

Три перечисленные простейшие логические операции (логическое умножение «И», логическое сложение «ИЛИ», логическое отрицание «НЕ») представляют собой полный набор логических действий, через которые могут быть выражены логические связи, задаваемые любой таблицей истинности. Математические обозначения простейших логических функций, принятые в настоящее время, представлены в табл. 18.2.

Таблица 18.2

Математические обозначения простейших логических функций

Логическая функция y	Математическое обозначение
Умножение (конъюнкция) «И»	$y = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$
Сложение (дизъюнкция) «ИЛИ»	$y = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$
Отрицание (инверсия) «НЕ»	$y = \bar{x}$

18.2.2. Основные законы и теоремы алгебры логики

Необходимо помнить, что, несмотря на внешнее сходство в записи операций логического умножения и сложения с одноименными алгебраическими действиями, их нельзя отождествлять. В логических уравнениях заложен свой (особенный) смысл. Тем более это относится к сложным логическим уравнениям, например к аксиомам и теоремам булевой алгебры, которые приведены в табл. 18.3.

Таблица 18.3

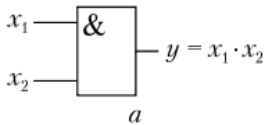
Законы булевой алгебры

Закон	Пояснение
Переместительный (коммутативный) а) $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$; б) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	—
Сочетательный (ассоциативный) а) $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$; б) $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$	Скобки, как и в обычной алгебре, указывают на порядок действий
Распределительный (дистрибутивный) а) $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$; б) $(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) = x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3 = x_1(1 + x_3 + x_2) + x_2 \cdot x_3 = x_1 + x_2 \cdot x_3$	Учтены соотношения: а) $x \cdot x = x$; б) $1 + x = 1$
Закон поглощения а) $x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1(1 + x_2) = x_1$; б) $x_1(x_1 + x_2) = x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1(1 + x_2) = x_1$	То же

Закон	Пояснение
Теорема де Моргана а) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$; б) $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	Используется при переходе от логического произведения к логической сумме и обратно
Правило повторения $x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x = x$; $x + x + \dots + x = x$	—
Правило отрицания а) $x \cdot \overline{x} = 0$; б) $x + \overline{x} = 1$	а) Невозможное событие. б) Всегда существующее событие
Правило двойного отрицания $\overline{(\overline{x})} = x$	—
Логические соотношения в случае определенности одного из аргументов а) $x_1 \cdot 1 = x_1$; $x_1 + 1 = 1$; б) $x_1 \cdot 0 = 0$; $x_1 + 0 = x_1$	а) Случай $x_2 = 1$. б) Случай $x_2 = 0$
Инверсии «нуля» и «единицы» $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$	—

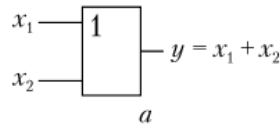
18.2.3. Условное изображение устройств, реализующих простейшие логические действия, и их таблицы истинности

На рис. 18.2–18.4 показаны условные изображения, принятые для устройств, выполняющих логические операции «И», «ИЛИ», «НЕ», и соответствующие таблицы истинности.



x_1	x_2	$y = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

б



x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

б

Рис. 18.2. Устройство, выполняющее операцию логического умножения (конъюнкции) двух логических аргументов:

а — условное обозначение;
б — таблица истинности

Рис. 18.3. Устройство, выполняющее операцию логического сложения (дизъюнкции) двух логических аргументов:

а — условное обозначение;
б — таблица истинности

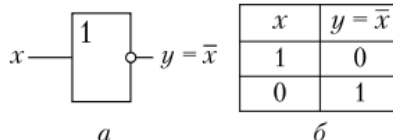


Рис. 18.4. Устройство, выполняющее логическую операцию отрицания (инверсии):

а — условное обозначение; б — таблица истинности

18.3. Две канонические формы алгебраической записи логической функции

Логическая функция $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданная таблицей истинности, может быть записана математически в двух канонических видах [6, 7, 9]:

1) **совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)** — логическая сумма логических произведений;

2) **совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)** — логическое произведение логических сумм.

В обоих видах заключена информация о количестве наборов аргументов, при которых функция y принимает значения 1 и 0, а также о содержании этих наборов. Проиллюстрируем методику получения дизъюнктивной и конъюнктивной канонических форм на примере функции двух переменных по ее таблице истинности (табл. 18.4).

Таблица 18.4

Пример таблицы истинности для функции двух переменных

№ набора	Аргументы		Функция	
	x_1	x_2	y	\bar{y}
1	0	0	0	1
2	0	1	1	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1

18.3.1. Методика получения СДНФ

Дизъюнктивная каноническая форма представляет собой записанное по правилам алгебры логики утверждение о том, что функция $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает единичное значение только при указываемых наборах аргументов. К такой форме приводят следующие шаги.

1. Из таблицы истинности выделяем наборы аргументов, при которых функция y равна «единице». В табл. 18.4, это строки № 2 и 3.

2. Для каждой из выделенных строк записываем логическое произведение, в котором представлены все n аргументов набора. Аргумент x_i присутствует «собственной персоной», если в рассматриваемом наборе он равен 1. Если же в данном наборе $x_i = 0$, он учитывается в виде инверсии \bar{x}_i . Таким образом, строкам № 2 и 3 табл. 18.4 соответствуют произведения $\bar{x}_1 \cdot x_2$; $x_1 \cdot \bar{x}_2$.

3. Составляем логическую сумму записанных произведений: $y(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2$.

Эта сумма и является искомым алгебраическим выражением функции y в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

Отметим характерные признаки СДНФ: число слагаемых равно числу «единиц» в столбце y таблицы истинности; каждое слагаемое есть произведение из n сомножителей, где n — число аргументов.

18.3.2. Методика получения СКНФ

Один из способов нахождения конъюнктивной канонической формы заключается в применении методики, изложенной в подпараграфе 18.3.1, к инверсии заданной логической функции y с последующим преобразова-

нием по теореме де Моргана. Проиллюстрируем его на примере данных табл. 18.4.

1. От функции y переходим к ее инверсии \bar{y} , заменив в столбце y (см. табл. 18.4) «нули» на «единицы» и наоборот.

2. Записываем дизъюнктивную каноническую форму функции \bar{y} по методике, рекомендованной в подпараграфе 18.3.1 (выделив наборы аргументов для единичных значений \bar{y}): $\bar{y} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2$.

3. Находим инверсию от найденного алгебраического выражения:

$$\overline{\bar{y}} = y = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2}.$$

4. Преобразуем записанное равенство по формуле де Моргана, заменив инверсию суммы произведением инверсий ($\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$):

$$y = (\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}) \cdot (\overline{x_1 \cdot x_2}).$$

Пользуясь той же формулой, произведения $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ и $x_1 \cdot x_2$ заменяем эквивалентными суммами, а именно $\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_1} + \overline{\bar{x}_2}$; $\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$. И наконец, для функции y получаем следующее выражение:

$$y = (\overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}) \cdot (\overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}) = (x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

Оно имеет совершенную конъюнктивную нормальную форму — логическое произведение логических сумм. Обратим внимание на то, что число сомножителей в получаемом произведении равно числу «нулевых» значений функции y , заданных в таблице истинности. А каждый сомножитель есть сумма n слагаемых, где n — число аргументов.

Следствием рассмотренной нами методики получения СКНФ является ее укороченный вариант [6, 12]. Он содержит такие действия.

В столбце y таблицы истинности выделяем строки, где функция y принимает «нулевое» значение.

Для каждой такой строки записываем логическую сумму, включающую «представителей» всех аргументов набора. Причем аргумент x_i записывается в неинвертированном виде, если в данном наборе $x_i = 0$. Если же $x_i = 1$, то в логической сумме присутствует его инверсия \bar{x}_i .

Найденные логические суммы перемножаем и сразу приходим к выражению для функции y в совершенной нормальной конъюнктивной форме (СКНФ).

В рассматриваемом нами случае по таблице истинности 18.4 записываем $y = (x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$, что совпадает с ранее полученным результатом.

Пример 18.1. Для логической функции трех переменных $y(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей истинности (табл. 18.5), получить алгебраические выражения в совершенных нормальных формах: дизъюнктивной и конъюнктивной.

Решение

1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. В соответствии с изложенной в подпараграфе 18.3.1 методикой выполняем следующие операции.

По табл. 18.5 находим наборы аргументов, при которых $y = 1$. Это строки № 3, 5, 7:

№ 3: $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0;$

№ 5: $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 1;$

№ 7: $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1.$

К примеру 18.1

№ набора	Аргументы			Функция y
	x_1	x_2	x_3	
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	1	0	1
4	1	1	1	0
5	0	0	1	1
6	1	0	1	0
7	0	1	1	1
8	1	1	0	0

Для указанных наборов записываем логические произведения «представителей» аргументов:

$$\text{№ 3} \rightarrow \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3; \quad \text{№ 5} \rightarrow \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3; \quad \text{№ 7} \rightarrow \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Логическая сумма составленных произведений является искомой совершенной дизъюнктивной нормальной формой функции $y(x_1, x_2, x_3)$:

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

2. Совершенная конъюнктивная нормальная форма. Воспользуемся рекомендованной в подпараграфе 18.3.2 укороченной методикой.

В таблице истинности выделяем строки, где $y = 0$:

$$\text{№ 1 (0, 0, 0); № 2 (1, 0, 0); № 4 (1, 1, 1); № 6 (1, 0, 1); № 8 (1, 1, 0)}.$$

Для каждой из выделенных строк записываем логическую сумму «представителей» всех аргументов:

$$\begin{aligned} \text{№ 1} &\rightarrow x_1 + x_2 + x_3; & \text{№ 2} &\rightarrow \bar{x}_1 + x_2 + x_3; & \text{№ 4} &\rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3; \\ \text{№ 6} &\rightarrow \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3; & \text{№ 8} &\rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3. \end{aligned}$$

3. Перемножим записанные логические суммы и приходим к выражению функции $y(x_1, x_2, x_3)$ в совершенной конъюнктивной нормальной форме:

$$\begin{aligned} y(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3). \end{aligned}$$

В приведенном примере конъюнктивная форма является более громоздкой, чем дизъюнктивная. Этот результат понятен, так как в столбце y табл. 18.5 «нулей» больше, чем «единиц». Если в табличном представлении функции y число «нулей» меньше числа «единиц», то конъюнктивная форма проще дизъюнктивной.

18.4. Минимизация логических функций

18.4.1. Постановка задачи. Способы минимизации

При построении цифрового устройства, выполняющего логическую функцию, заданную некоторым аналитическим выражением (либо таблицей истинности), возникает необходимость ее преобразования с целью приведения к виду, наиболее пригодному для реализации. Такое преобразование называется **минимизацией**. Требования, которым стремятся удовлетворить в процессе минимизации, могут быть различными. В подавляющем большинстве случаев они направлены на следующие цели:

- 1) уменьшение количества используемых элементов;
- 2) возможность построения схемы на однотипных элементах.

Уменьшение числа используемых элементов достигается приведением логической функции к виду, имеющему минимальное количество символов и логических действий. Наиболее универсальный способ упрощения логического выражения основан на применении теорем и формул алгебры логики. Он проиллюстрирован ниже в примере 18.2.

При количестве аргументов у логической функции не более пяти кратчайшим путем минимизации является использование карт Карно. Соответствующая методика рассмотрена в [7, 13].

18.4.2. Минимизация по формулам алгебры логики

Процесс алгебраического преобразования логического выражения с целью его минимизации может осуществляться различными путями и приводить к отличающимся результатам (хотя и эквивалентным). К наиболее распространенным и действенным приемам такого преобразования относятся следующие:

- вынесение за скобки общих членов;
- применение теоремы де Моргана;
- повторение слагаемых в логической сумме и сомножителей в логическом произведении;
- двойное отрицание и др.

Пример 18.2. Пользуясь формулами алгебры логики (см. табл. 18.3), минимизировать логическое выражение функции трех аргументов $y(x_1, x_2, x_3)$, полученное в примере 18.1 и имеющее совершенную дизъюнктивную нормальную форму

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Решение

1. Воспользуемся приемом вынесения за скобки общего сомножителя \bar{x}_1 :

$$y = \bar{x}_1(x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3).$$

2. В сумме, заключенной в круглые скобки, повторяем слагаемое $x_2 x_3$ (см. правило повторения в табл. 18.3) и производим группировку слагаемых:

$$y = \bar{x}_1(x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = \bar{x}_1[x_2(\bar{x}_3 + x_3) + x_3(\bar{x}_2 + x_2)].$$

3. Из тождества $x + \bar{x} = 1$ (табл. 18.3) следуют равенства $\bar{x}_3 + x_3 = 1$; $\bar{x}_2 + x_2 = 1$. Учитывая их, приходим к достаточно простому логическому выражению

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1(x_2 + x_3) = \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot x_3.$$

18.5. Универсальные базисы «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ»

Логические функции «И-НЕ» (функция Пирса) и «ИЛИ-НЕ» (функция Шеффера) являются результатом инверсии операций логического сложения «ИЛИ» и логического умножения «И» соответственно. Они занимают особое положение в цифровой технике и называются **универсальными базисами** (так же как и элементы, их реализующие). Причина заключается

в следующем: *цифровое устройство, выполняющее любую логическую функцию, можно построить, имея элементы только одного вида («ИЛИ-НЕ» либо «И-НЕ»)*. При интегральной технологии с точки зрения надежности и стоимости использование однотипных элементов весьма предпочтительно.

18.5.1. Операции «ИЛИ-НЕ», «И-НЕ»

Операция «ИЛИ-НЕ» математически обозначается стрелкой « \downarrow » (стрелка Пирса) и для функции двух переменных записывается так:

$$\text{ИЛИ-НЕ}(x_1, x_2) = \overline{x_1 + x_2} = x_1 \downarrow x_2.$$

Операция «И-НЕ» изображается значком штрих « $|$ » (штрих Шеффера), и согласно определению в случае двух аргументов для нее применяется запись

$$\text{И-НЕ}(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2} = x_1 | x_2.$$

На рис. 18.5, а, б даны таблицы истинности и условные изображения соответствующих элементов на структурных схемах.

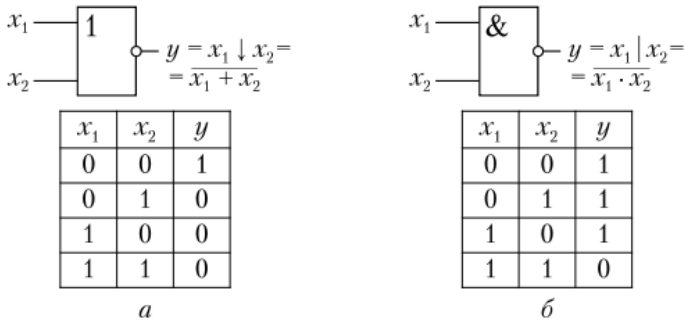


Рис. 18.5. Условные изображения и таблицы истинности элементов, выполняющих логические операции: «ИЛИ-НЕ» (а); «И-НЕ» (б)

18.5.2. Универсальность функций «ИЛИ-НЕ» и «И-НЕ»

Обоснованием универсального характера функций Пирса и Шеффера являются алгебраические выражения, связывающие простейшие логические действия (сложение, умножение и инверсию) с любой из этих функций. Их несложно получить при помощи законов алгебры логики (и прежде всего закона де Моргана). Эти соотношения (включая краткий вывод) помещены в табл. 18.6 и 18.7, там же изображены функциональные схемы, выполняющие логические действия «ИЛИ», «И», «НЕ», построенные на однотипных универсальных базисах.

Таблица 18.6

Реализация простейших логических операций «НЕ», «ИЛИ», «И» в универсальном базисе «ИЛИ-НЕ»

Логическая операция	Алгебраическая связь	Структурная реализация
НЕ(x) $y = \bar{x}$	$y = \bar{x} = \overline{x + x} =$ $= x \downarrow x = x_1 \downarrow x_2$ при $x_1 = x_2 = x$	

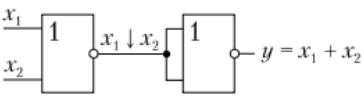
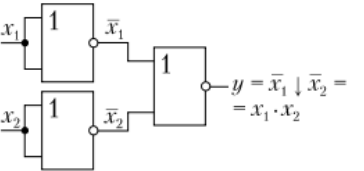
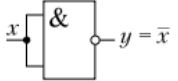
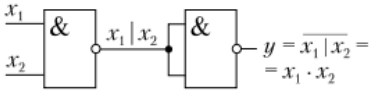
Логическая операция	Алгебраическая связь	Структурная реализация
ИЛИ(x_1, x_2) $y = x_1 + x_2$	$y = x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}}$ – инверсия от функции Пирса	
И(x_1, x_2) $y = x_1 \cdot x_2$	$y = x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}}$ – функция Пирса от инверсных значений аргументов	

Таблица 18.7

Реализация простейших логических операций «НЕ», «ИЛИ», «И» в универсальном базисе «И-НЕ»

Логическая операция	Алгебраическая связь	Структурная реализация
НЕ(x) $y = \bar{x}$	$y = \bar{x} = \overline{x \cdot x} = x x = x_1 x_2$ при $x_1 = x_2 = x$	
ИЛИ(x_1, x_2) $y = x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1} \overline{x_2}}$ (функция Шеффера от инверсных значений аргументов)		
И(x_1, x_2) $y = x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{x_1 x_2}$ (инверсия от функции Шеффера)		

18.6. Методика записи и структурной реализации логических функций в универсальных базисах «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ»

Если поставлена задача построения цифрового устройства на однотипных универсальных базисных элементах, то целесообразно заданную ему логическую функцию записать через операцию выбранного базиса («И-НЕ» либо «ИЛИ-НЕ»). Получаемое при этом выражение уже содержит наглядную информацию о структуре цифрового устройства.

Предположим, что логическая функция, возложенная на цифровое устройство, представлена в табличном виде (например, таблицей истинности). Структурная реализация в этом случае может быть проведена в следующем порядке.

1. От табличного изображения функции y переходят к ее алгебраическому виду (например, в одной из совершенных канонических форм).

2. Проводится минимизация функции y (либо по формулам алгебры логики, либо по карте Карно).

3. Минимизированное выражение функции y преобразуется с помощью теорем алгебры логики (и прежде всего закона де Моргана) к виду, удобному для реализации в выбранном базисе, а именно:

- при реализации в базисе «И-НЕ» функция y приводится к выражению, не содержащему логических сумм, т.е. $y = \overline{A \cdot B \cdot C \cdot \dots}$, причем каждый из сомножителей (A, B, C, \dots) должен иметь аналогичный вид.

- при реализации в базисе «ИЛИ-НЕ» функция y преобразуется к виду, не содержащему логических произведений, т.е. $y = \overline{A + B + C + \dots}$, такой же вид должно иметь и каждое из слагаемых под знаком инверсии.

Первоначальным и общим для обоих случаев приемом, применяемым для приведения функции y к требуемому виду, является операция двойного отрицания (двойной инверсии) по отношению к исходному выражению функции y .

Рассмотрим изложенный порядок на конкретных примерах.

Пример 18.3. Логическая функция двух аргументов задана алгебраическим выражением $y = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$. Требуется:

- выразить функцию y через универсальные базисы обоих видов – «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ»;
- построить структурные схемы устройства, реализующего заданную функцию в элементах «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ».

Решение

1. Запись и реализация в базисе «ИЛИ-НЕ».

Подвергаем функцию y воздействию двойного отрицания:

$$y = \bar{\bar{y}} = \overline{\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2}.$$

Инверсию заданной функции $\bar{y} = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$ преобразуем к виду, не содержащему логических произведений, пользуясь теоремой де Моргана $a \cdot b = \overline{\bar{a} + \bar{b}}$. Согласно записанной формуле

$$\bar{x}_1 \cdot x_2 = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = \overline{x_1 + \bar{x}_2} = x_1 \downarrow \bar{x}_2 \text{ — функция Пирса от аргументов } x_1 \text{ и } \bar{x}_2;$$

$$x_1 \cdot \bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 + x_2} = \overline{\bar{x}_1 + x_2} = \bar{x}_1 \downarrow x_2 \text{ — функция Пирса от аргументов } \bar{x}_1 \text{ и } x_2.$$

Тогда для функции \bar{y} получаем выражение

$$\bar{y} = \overline{(x_1 \downarrow \bar{x}_2) + (\bar{x}_1 \downarrow x_2)} = (x_1 \downarrow \bar{x}_2) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_2).$$

Оно имеет вид функции Пирса от аргументов $x_1 \downarrow \bar{x}_2$ и $\bar{x}_1 \downarrow x_2$. Следовательно, справедливо равенство

$$y = \bar{\bar{y}} = \overline{(x_1 \downarrow \bar{x}_2) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_2)}. \quad (18.1)$$

Оно удобно для реализации в базисе «ИЛИ-НЕ».

Пользуясь полученным выражением (18.1), строим структурную схему соответствующего цифрового устройства. Согласно (18.1) оно должно выполнять три операции Пирса (по числу стрелок Пирса) и одну операцию инверсии. Последняя операция также может быть осуществлена элементом «ИЛИ-НЕ» путем объединения двух его входов (см. табл. 18.6). Таким образом, искомая схема может быть построена на четырех элементах «ИЛИ-НЕ». Она показана на рис. 18.6, а.

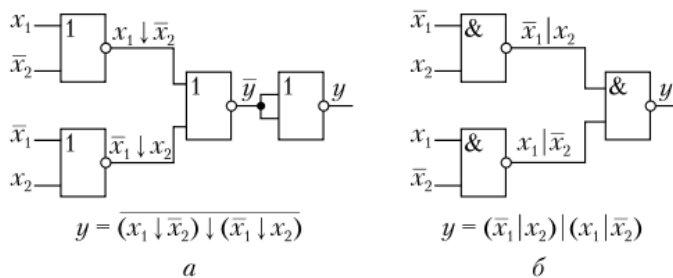


Рис. 18.6. Структурная схема устройства, реализующего логическую функцию $y = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2$ в элементах: «ИЛИ-НЕ» (а) и «И-НЕ» (б)

2. Запись и реализация в базисе «И-НЕ».

В качестве исходного по-прежнему рассматриваем выражение для функции y , подвергнутое операции двойного отрицания $y = \bar{\bar{y}} = \overline{\bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2}$.

Преобразуем функцию \bar{y} к виду, не содержащему логических сумм. В соответствии с теоремой де Моргана $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ получаем

$$\bar{y} = \overline{\bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2} = \overline{(\bar{x}_1 \cdot x_2)} \cdot \overline{(x_1 \cdot \bar{x}_2)}.$$

Замечаем, что в последнем выражении каждый из сомножителей есть функция Шеффера («И-НЕ»), и согласно принятым обозначениям можем записать его через штрих Шеффера: $\overline{\bar{x}_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 | x_2$; $\overline{x_1 \cdot \bar{x}_2} = x_1 | \bar{x}_2$. Тогда

$$y = \bar{\bar{y}} = \overline{(\bar{x}_1 | x_2) \cdot (x_1 | \bar{x}_2)}.$$

Полученное логическое выражение также можно рассматривать как функцию Шеффера от сложных аргументов $\bar{x}_1 | x_2$ и $x_1 | \bar{x}_2$, следовательно, $y = (\bar{x}_1 | x_2) | (x_1 | \bar{x}_2)$.

На рис. 18.6, б приведена блок-схема устройства, построенного на элементах Шеффера, выполняющего заданную логическую функцию. Она содержит три элемента «И-НЕ», т.е. меньше, чем при реализации в базисе «ИЛИ-НЕ».

Обращаем внимание, что в обеих структурных схемах (рис. 18.6, а, б) с целью большей наглядности входные инверторы (преобразующие x_1 в \bar{x}_1 и x_2 в \bar{x}_2) не показаны.

Пример 18.4. Логическая функция четырех аргументов $y(a, b, c, d)$ задана алгебраическим выражением $y = a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + d$. Построить структурные схемы цифрового устройства, выполняющего функцию y : а) на элементах «ИЛИ-НЕ»; б) на элементах «И-НЕ».

Решение

1. Реализация в элементах «ИЛИ-НЕ».

Преобразуем функцию y к виду, не содержащему логических произведений. Для этого переходим от логических произведений $a\bar{c}$ и $\bar{a}bc$ к выражениям, где фигурируют логические суммы (пользуясь правилом де Моргана), а именно:

$$a\bar{c} = \overline{\bar{a} + \bar{\bar{c}}} = \overline{\bar{a} + c} = \bar{a} \downarrow c \text{ — функция Пирса от аргументов } \bar{a} \text{ и } c;$$

$$\bar{a} \cdot b \cdot c = \overline{a + \bar{b} + \bar{c}} = a \downarrow \bar{b} \downarrow \bar{c} \text{ — функция Пирса от аргументов } a, \bar{b} \text{ и } \bar{c}.$$

Тогда для инверсии заданной функции имеем равенство

$$\bar{y} = \overline{a\bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + d} = \overline{(\bar{a} \downarrow c) + (a \downarrow \bar{b} \downarrow \bar{c}) + d}.$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что инверсия функции y имеет структуру функции Пирса от трех аргументов $a \downarrow \bar{c}$, $a \downarrow \bar{b} \downarrow \bar{c}$, d и может быть записана в виде

$$\bar{y} = (\bar{a} \downarrow c) \downarrow (a \downarrow \bar{b} \downarrow \bar{c}) \downarrow d.$$

Инвертируя это логическое равенство, приходим к искомому выражению функции y :

$$y = \overline{(\bar{a} \downarrow c) \downarrow (a \downarrow \bar{b} \downarrow \bar{c})} \downarrow d.$$

По полученному логическому уравнению строим структурную схему цифрового устройства. Она содержит три элемента, выполняющих операцию Пирса («ИЛИ-НЕ») и один элемент, осуществляющий инверсию, как показано на рис. 18.7, а.

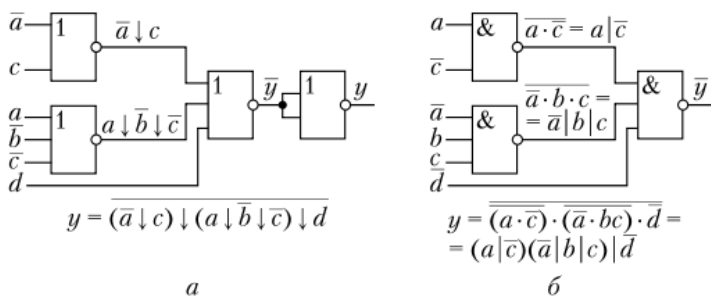


Рис. 18.7. Реализация логической функции $y = a\bar{c} + \bar{a}bc + d$ в универсальных базисах: «ИЛИ-НЕ» (а) и «И-НЕ» (б)

2. Реализация в элементах «И-НЕ».

Выражение заданной функции y приводим к виду, не содержащему действий логического сложения. Для инверсии функции y по теореме де Моргана можем записать $\bar{y} = \overline{a\bar{c} + \bar{a}bc + d} = \overline{(a\bar{c}) \cdot (\bar{a}bc) \cdot d}$. Тогда для самой функции y справедливо равенство

$$y = \bar{\bar{y}} = \overline{\overline{(a\bar{c}) \cdot (\bar{a}bc) \cdot d}}.$$

Замечаем, что $\overline{a \cdot \bar{c}} = a|\bar{c}$ — функция Шеффера от аргументов a и \bar{c} ; $\overline{\bar{a}bc} = \bar{a}|b|c$ — функция Шеффера от аргументов \bar{a} , b , c ; $\overline{(a\bar{c}) \cdot (\bar{a}bc) \cdot d}$ — функция Шеффера от сложных аргументов $\overline{a\bar{c}}$, $\overline{\bar{a}bc}$, \bar{d} .

Следовательно, пользуясь принятым для операции Шеффера («И-НЕ») обозначением, приходим к окончательному логическому выражению заданной функции $y(a, b, c, d)$:

$$y = (a|\bar{c})|(\bar{a}|b|c)|(\bar{d}).$$

По полученному уравнению строим структурную схему устройства, выполняющего заданную логическую функцию. Она состоит из трех элементов Шеффера и приведена на рис. 18.7, б.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение цифрового устройства.
2. Что понимается под таблицей истинности? Какие величины она связывает?
3. Что понимается под алгебраической записью логической функции $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$? Какие величины она связывает?
4. Назовите все известные вам простейшие логические операции, а также охарактеризуйте их логические свойства.
5. Изобразите таблицы истинности элементов, реализующих операции логического умножения «И» и сложения «ИЛИ» двух переменных. Какова таблица истинности элемента, осуществляющего логическое отрицание «НЕ»?

6. Нарисуйте условное изображение (графическое обозначение) инвертора «НЕ».
7. Нарисуйте условные изображения элементов, выполняющих логические умножение и сложение трех аргументов x_1, x_2, x_3 .
8. Запишите алгебраические выражения, обозначающие операции:
- логического умножения трех логических переменных x_1, x_2, x_3 ;
 - логического сложения трех логических переменных x_1, x_2, x_3 ;
 - логического отрицания переменной x .
9. Пользуясь теоремой де Моргана, перейдите от логического произведения $a \cdot \bar{b} \cdot c$ к эквивалентной логической сумме.
10. Пользуясь теоремой де Моргана, перейдите от логической суммы $\bar{a} + b$ к эквивалентному логическому произведению.
11. Пользуясь табл. 18.3, приведите выражение

$$(x_1 + x_2 + x_1 x_2)(x_1 + x_2)$$

к виду:

- не содержащему логических произведений;
 - не содержащему логических сумм.
12. Чему равны логические функции: $y = x \cdot \bar{x}$; $y = x + \bar{x}$; $y = 0 \cdot \bar{x}$; $y = 0 + \bar{x}$?
13. Что понимается под совершенными формами логической функции $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$: дизъюнктивной (СДНФ) и конъюнктивной (СКНФ)?
14. Получите выражение функции $y(x_1, x_2)$, заданной таблицей истинности (табл. 18.8), в СДНФ и СКНФ (рекомендуется воспользоваться методикой, изложенной в параграфе 18.3).

Таблица 18.8

К заданию 14

№ набора	Аргументы		Функция	
	x_1	x_2	y	\bar{y}
1	0	0	1	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	0	1

5. Каковы цели минимизации заданного для функции $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ алгебраического уравнения при построении цифрового устройства?
16. Минимизируйте алгебраическое выражение функции трех логических переменных $y(a, b, c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$.
17. Почему логические функции «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ» называются универсальными базисами?
18. Изобразите структурную схему, реализующую функцию: а) $y = x_1 + x_2$; б) $y = x_1 \cdot x_2$ в элементах «И-НЕ».
19. Изобразите структурную схему, содержащую только элементы «ИЛИ-НЕ», выполняющую логическую операцию $y = x_1 + x_2$.
20. Как на двухвходовых универсальных базисах «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ» построить инвертор $y = \bar{x}$?
21. Реализуйте на универсальных базисах «И-НЕ» логическую функцию двух переменных $y = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Глава 19

СХЕМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- схемы, реализующие простейшие логические операции на биполярных и полевых транзисторах;

уметь

- оценивать качество работы логических элементов на биполярных и полевых транзисторах с точки зрения надежности и быстродействия;

владеть

- методикой оценки уровней логических «нуля» и «единицы» для простейших ключевых схем.

19.1. Ключевые схемы. Позитивная и негативная логики

Вся цифровая схемотехника базируется на схемах, которые могут иметь два четко различимых состояния. Такие схемы называют **ключевыми** ввиду их аналогии с механическим ключом (замкнут или разомкнут). Ключ считается *идеальным*, если его резистивное сопротивление в замкнутом положении равно нулю, а в разомкнутом — бесконечности.

Выполняемая устройством логическая функция может быть определена однозначно только при условии принятия конкретных правил соответствия между состоянием схемы (на входе и на выходе) и значениями логических величин (аргументов и функции). Например:

- 1) замкнутый ключ $\rightarrow x = 1$; разомкнутый ключ $\rightarrow x = 0$;
- 2) высокий уровень $u_{\text{вых}} \rightarrow y = 1$; низкий уровень $u_{\text{вых}} \rightarrow y = 0$.

Принятые нами правила, когда высокому уровню напряжения соответствует «единичное» значение логической величины ($y = 1$), а низкому уровню — «нулевое» значение ($y = 0$), называют **позитивной логикой**. Применяется также и **негативная логика**. Ее положения таковы:

- 1) замкнутый ключ $\rightarrow x = 0$;
- 2) разомкнутый ключ $\rightarrow x = 1$;
- 3) высокий уровень $u_{\text{вых}} \rightarrow y = 0$;
- 4) низкий уровень $u_{\text{вых}} \rightarrow y = 1$.

Роль ключей в цифровой схемотехнике обычно выполняют полупроводниковые приборы — диоды, биполярные транзисторы и полевые транзисторы. Замкнутое или разомкнутое (условно) состояние этих ключей достигается величиной и полярностью управляющего напряжения.

Полупроводниковые ключи не являются идеальными (их резистивное сопротивление в замкнутом положении не равно нулю, а в разомкнутом не

равно бесконечности). Однако их быстроедействие по сравнению с механическими ключами несоизмеримо выше.

При оценке качества реального ключевого устройства важными характеристиками являются уровни входных сигналов, на которые данное устройство реагирует как на логический «ноль» или логическую «единицу», а также допустимые пределы их изменения:

1) $u_{\text{вх max}}^0$ — наибольшее допустимое значение напряжения на входе, воспринимаемое как логический «ноль»;

2) $u_{\text{вх min}}^1$ — наименьшее допустимое значение входного напряжения, которое воспринимается как логическая «единица». Величины $u_{\text{вх max}}^0$ и $u_{\text{вх min}}^1$ обуславливают требования к реальным уровням сигналов $u_{\text{вх}}^0$ и $u_{\text{вх}}^1$, подаваемым на вход ключа, а именно: $u_{\text{вх}}^0 < u_{\text{вх max}}^0$; $u_{\text{вх}}^1 > u_{\text{вх min}}^1$.

Разность $(u_{\text{вх max}}^0 - u_{\text{вх}}^0)$ обозначается как S^0 и называется **запасом помехоустойчивости для логического «нуля»**. Разность $(u_{\text{вх}}^1 - u_{\text{вх min}}^1)$ обозначается как S^1 и называется **запасом помехоустойчивости для логической «единицы»**. Таким образом,

$$S^0 = u_{\text{вх max}}^0 - u_{\text{вх}}^0; \quad S^1 = u_{\text{вх}}^1 - u_{\text{вх min}}^1.$$

К параметрам ключевой схемы относятся также и уровни выходных напряжений, соответствующих логическому «нулю» $u_{\text{вых}}^0$ и логической «единице» $u_{\text{вых}}^1$.

Среди ключевых полупроводниковых схем особое положение ввиду своей значимости занимают схемы, осуществляющие логическую операцию $y = \bar{x}$ («НЕ»), — **инверторы**. Простейшие инверторы на биполярном и на полевом транзисторах могут быть построены по схемам с общим эмиттером (см. параграф 19.2) и с общим истоком (см. параграф 19.4) соответственно. Принципы их действия во многом аналогичны.

19.2. Инвертор на биполярном транзисторе

Цепь, изображенная на рис. 19.1, выполняет логическую операцию инверсии $y = \bar{x}$, если значению переменной x поставить в соответствие уровень напряжения на входе, а значению логической функции y — величину напряжения на выходе. Например, если принять справедливыми следующие соответствия:

$$\begin{aligned} u_{\text{вх}} = u_{\text{вх min}} &\rightarrow x = 0; & u_{\text{вх}} = u_{\text{вх max}} &\rightarrow x = 1; \\ u_{\text{вых}} = u_{\text{вых min}} &\rightarrow y = 0; & u_{\text{вых}} = u_{\text{вых max}} &\rightarrow y = 1, \end{aligned}$$

то в рассматриваемой цепи (см. рис. 19.1) «нулевому» уровню сигнала на входе (транзистор закрыт) соответствует «единичный» уровень сигнала на выходе и наоборот. Поясним это.

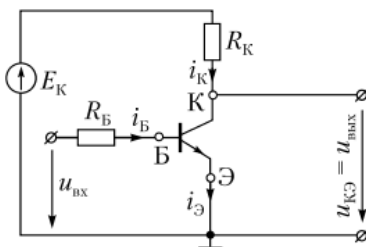


Рис. 19.1. Инвертор на биполярном транзисторе

Параметры элементов в схеме на рис. 19.1 выбираются такими, чтобы при минимальном входном напряжении транзистор находился в состоянии отсечки, а при максимальном — в режиме, близком к насыщению. Расчет данного транзисторного ключа проводится по методике, применяемой в усилителях на биполярных транзисторах. Она подробно рассматривалась в параграфе 13.2. На рис. 19.2 показаны графические построения, позволяющие определить режимы на входе и выходе ключа в разомкнутом и замкнутом состояниях.

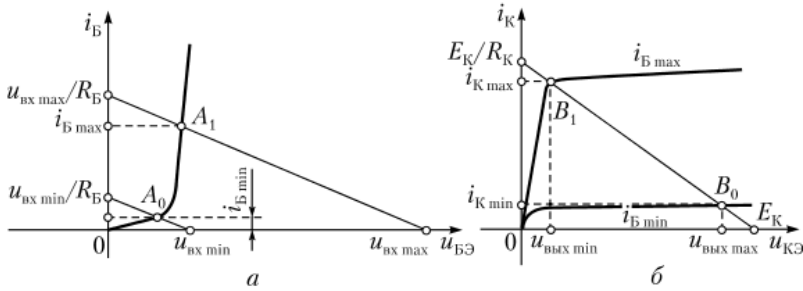


Рис. 19.2. Положение РТ инвертора на биполярном транзисторе при воздействии на входе логического нуля и логической единицы:

a — на входной ВАХ; *б* — на выходных ВАХ

Расчет режима на входе. На рис. 19.2, *a* изображена входная ВАХ транзистора и принадлежащие ей точки A_0 и A_1 , определяющие состояние транзистора соответственно при $u_{вх} = u_{вх\ min}$ и $u_{вх} = u_{вх\ max}$. Точка A_0 лежит на пологом участке входной ВАХ, ей соответствует очень малый базовый ток $i_{B\ min}$. Точка A_1 принадлежит крутому участку входной ВАХ, ей соответствует большой базовый ток $i_{B\ max}$.

Расчет режима на выходе. На рис. 19.2, *б* представлены две кривые из семейства выходных ВАХ транзистора, соответствующие базовым токам $i_{B\ min}$ и $i_{B\ max}$. Здесь же проведена нагрузочная прямая, отсекающая по оси напряжения отрезок $u_{KЭ} = E_K$, а по оси тока — E_K/R_K . Она пересекает выходные ВАХ в точках B_0 и B_1 .

Точка B_0 определяется малым коллекторным током и большим напряжением между коллектором и эмиттером $u_{KЭ} = u_{вых\ max}$, близким к E_K .

Точке B_1 соответствует состояние транзистора, близкое к насыщению, с большим коллекторным током. При этом напряжение на резисторе R_K близко к E_K , а напряжение на участке коллектор — эмиттер невелико (того же порядка, что и напряжение $u_{БЭ}$): $u_{KЭ} = u_{вых\ min}$.

Таким образом, для схемы на рис. 19.1 свойственны следующие соотношения между напряжениями на входе и выходе:

- 1) при $u_{вх} = u_{вх\ min}$ (логический «ноль» на входе) напряжение на выходе максимально — $u_{вых} = u_{вых\ max}$ (логическая «единица» на выходе);
- 2) при $u_{вх} = u_{вх\ max}$ (логическая «единица» на входе) напряжение на выходе минимально — $u_{вых} = u_{вых\ min}$ (логический «ноль» на выходе).

В принятых нами обозначениях составлена таблица соответствия (табл. 19.1), которая совпадает с таблицей истинности инвертора, осуществляющего логическую операцию $y = \bar{x}$.

К недостаткам схемы инвертора на биполярном транзисторе (см. рис. 19.1) можно отнести следующие.

Таблица истинности инвертора

$x = u_{\text{вх}}$	0	1
$y = u_{\text{вых}}$	1	0

Так как в режиме воздействия на входе логической «единицы» через резистор R_K протекает большой коллекторный ток $i_{K\text{max}}$, то потребляемая инвертором мощность достигает нежелательно больших значений. Причем в этом случае энергию отдают как источник питания E_K , так и источник входного сигнала $u_{\text{вх}}$.

Большая величина $i_{K\text{max}}$ обуславливает напряжение на резисторе R_K , близкое к E_K . При этом напряжение между коллектором и эмиттером падает до долей вольта. На семействе выходных ВАХ это состояние определяется рабочей точкой, лежащей на крутом участке (точка B_1 на рис. 19.2, б), и называется режимом насыщения. Для кремниевых транзисторов типичное значение напряжения насыщения $u_{KЭ\text{нас}}$ составляет $\sim 0,1$ В [12].

Потенциал коллектора биполярного транзистора, пребывающего в состоянии насыщения, либо близок к потенциалу базы, либо ниже его. В таких условиях коллектор теряет способность принимать заряд, инжектированный из эмиттера в базу (в нашем случае — электроны), что приводит к его накоплению в базе.

Накопленный в базе заряд неосновных носителей препятствует быстрому переключению схемы из состояния логической «единицы» на входе в состояние логического «нуля», т.е. ведет к снижению быстродействия устройства. Во избежание чрезмерного накопления неосновных носителей заряда в базе принимают специальные схемные решения, которые ограничивают снижение потенциала коллектора по отношению к базе величиной 0,1–0,2 В.

19.3. Транзистор Шоттки

Одним из способов ограничения степени насыщения биполярного транзистора является включение между его коллектором и базой диода Шоттки, как показано на рис. 19.3, а. Для диода Шоттки порог открывания (разность потенциалов между его анодом и катодом) составляет $\sim 0,1$ В. Пока потенциал коллектора выше потенциала базы, диод закрыт и не оказывает влияния на работу схемы.

Снижение потенциала коллектора относительно базы более, чем на 0,1 В, приводит к открыванию диода Шоттки. Избыточный заряд (электроны для

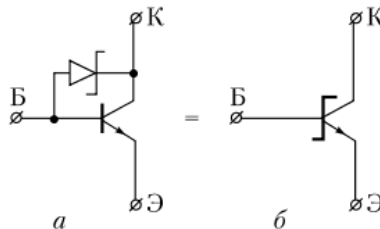


Рис. 19.3. Транзистор Шоттки:

а — схема, содержащая биполярный транзистор и диод Шоттки;
б — ее условное изображение (графическое обозначение)

n-p-n-структуры) отводится через открытый диод в цепь источника входного напряжения.

Трехполюсник на рис. 19.3, *a*, включающий биполярный транзистор с диодом Шоттки, называют **транзистором Шоттки**. При интегральной технологии оба элемента (транзистор и диод) представляют единую структуру, для которой принято специальное обозначение, показанное на рис. 19.3, *б*.

19.4. Особенности схемы простейшего инвертора на полевом транзисторе

Основной принцип работы схемы простейшего инвертора на полевом транзисторе (выполняющего логическую операцию $y = \bar{x}$), показанного на рис. 19.4, тот же, что и для схемы на рис. 19.1 на биполярном транзисторе.

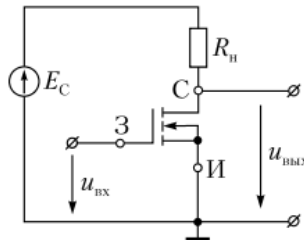


Рис. 19.4. Простейший инвертор на полевом транзисторе

Отметим наиболее важные их отличительные особенности.

1. Так как ток в цепи затвор — исток (см. рис. 19.4) практически отсутствует, данная схема вообще не потребляет энергии от источника входного сигнала $u_{вх}$, чем выгодно отличается от варианта на биполярном транзисторе (см. рис. 19.1).

2. Существенное потребление энергии от источника питания E_C для инвертора на полевом транзисторе имеет место только при открытом канале сток — исток, когда входное напряжение имеет высокий уровень (превышающий пороговое значение $u_{пор}$).

Применение комплементарных транзисторов позволяет и эту мощность снизить до пренебрежимо малой величины.

19.5. Инвертор на комплементарных полевых транзисторах

Пара полевых транзисторов является **комплементарной**, если они обладают каналами противоположного типа, а по остальным параметрам идентичны. Такие транзисторы позволяют создать инвертор, не потребляющий практически энергию источника питания как в состоянии логического «нуля» на входе, так и в состоянии логической «единицы».

В схеме на рис. 19.5, *a* транзисторы, образующие комплементарную пару, принадлежат к классу полевых транзисторов с индуцированным каналом. Они обозначены T_1 и T_2 , причем T_1 — *n*-канальный, а T_2 — *p*-канальный. Напомним наиболее важные свойства полевых транзисторов с индуцированным каналом.

В *n*-канальных транзисторах ток в канале, соединяющем сток и исток, представляет собой поток электронов (перемещающихся от истока к стоку), управляемый напряжением $u_{зи} > 0$, т.е. положительной полярности.

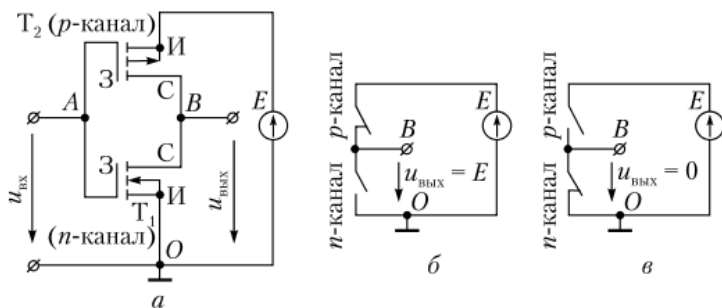


Рис. 19.5. Инвертор на комплементарных полевых транзисторах:

a — схема соединения транзисторов; *б* — эквивалентная схема для логического «нуля» на входе; *в* — эквивалентная схема для логической «единицы» на входе

В *p*-канальном транзисторе управляющее напряжение $u_{3И} < 0$ (отрицательно), так как протекание тока в канале сток — исток обеспечивают дырки (также движущиеся от истока к стоку).

До тех пор пока управляющее напряжение не достигнет пороговой величины $u_{пор}$, проводящий канал между стоком и истоком отсутствует, что равносильно обрыву цепи (или разомкнутому ключу).

При напряжении $u_{3И}$, превышающем пороговое значение (для *n*-канала $u_{3И} > 0$, для *p*-канала $u_{3И} < 0$), между стоком и истоком возникает проводящий канал. Когда управляющее напряжение достигает величины, превосходящей удвоенное пороговое напряжение, т.е. $|u_{3И}| \geq 2|u_{пор}|$, проводимость канала возрастает до величины, близкой к максимуму (состояние насыщения). Его резистивное сопротивление составляет десятки ом и меньше. При этом участок сток — исток можно уподобить замкнутому ключу.

Отметим особенности схемы инвертора (см. рис. 19.5, *a*):

а) затворы транзисторов T_1 и T_2 собраны в одной точке (точка *A*);

б) исток T_1 подключен к точке с нулевым потенциалом (точка *O*). Исток T_2 , будучи соединенным с «плюсом» источника питания, имеет потенциал относительно точки *O*, равный E ;

в) каналы транзисторов T_1 и T_2 включены последовательно-встречно, и ток в каждом из каналов имеет традиционное для него направление (для *n*-канала — от стока к истоку, для *p*-канала — от истока к стоку).

Покажем, что схема на рис. 19.5, *a* обладает свойствами инвертора. Будем рассматривать участок сток — исток каждого из транзисторов как ключ, находящийся либо в замкнутом, либо в разомкнутом состоянии в зависимости от напряжения между его затвором и истоком. Примем также, что логическому «нулю» на входе соответствует напряжение $u_{вх} = u_{вх}^0 = 0$, а логической «единице» — $u_{вх} = u_{вх}^1 = E$, где $E \geq 2u_{пор}$.

1. Логический «нуль» на входе: $u_{вх}^0 = 0 \rightarrow x = 0$. В этом режиме потенциал на затворе T_1 относительно его истока равен нулю, следовательно, T_1 заперт. Напряжение между затвором и истоком T_2 равно $0 - E = -E$. Такое управляющее напряжение приводит *p*-канальный транзистор в глубоко насыщенное состояние, его канал открыт. Поэтому на рис. 19.5, *б*, где показана эквивалентная схема выходной цепи для случая логического «нуля» на входе, транзистор T_1 изображен разомкнутым ключом, а T_2 — замкнутым. Тогда точка *B* (см. рис. 19.5, *a*, *б*) через замкнутый ключ оказывается под-

ключенной к «плюсу» источника питания, а выходное напряжение равно $u_{\text{вых}} = \varphi_B - \varphi_A = E$, т.е. имеет высокий уровень. Ему (согласно позитивной логике) соответствует значение логической функции $y = 1$.

II. Логическая «единица» на входе: $u_{\text{вх}}^1 = E \rightarrow x = 1$. При подаче на вход цепи (см. рис. 19.5, а) напряжения $u_{\text{вх}}^1 = E$ потенциал затвора транзистора T_1 относительно истока значительно превышает пороговое напряжение (по условию $E \geq 2u_{\text{пор}}$), поэтому T_1 открыт. Для транзистора T_2 разность потенциалов между затвором и истоком равна нулю, так как потенциалы его затвора и истока одинаковы (равны E). Следовательно T_2 закрыт.

На эквивалентной схеме (см. рис. 19.5, в) транзистор T_1 изображен замкнутым ключом, а T_2 — разомкнутым. Поскольку выходное напряжение, снимаемое с замкнутого ключа, тождественно равно нулю, в принятой нами позитивной логике при $u_{\text{вых}} = 0$ логическая функция $y = 0$.

Выводы.

1. Рассмотренная схема (см. рис. 19.5, а) реализует логическую функцию $y = \bar{x}$.

2. Так как в любом статическом состоянии ($x = 0$ или $x = 1$) последовательно с открытым каналом включен закрытый канал, ток, текущий в выходном контуре, т.е. через источник питания E , пренебрежимо мал, как и мощность, потребляемая от источника.

Этот результат поясняется на рис. 19.6, где приведена выходная ВАХ открытого полевого транзистора $i_C(u_{\text{СИ}})$ при $u_{\text{ЗИ}} = E$ (напомним, что $E \geq 2u_{\text{пор}}$).

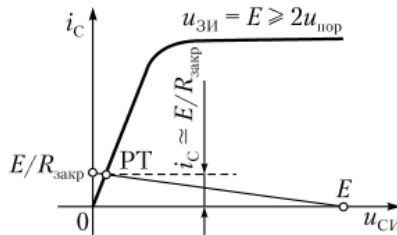


Рис. 19.6. К работе инвертора на комплементарных полевых транзисторах. Положение РТ на выходной ВАХ открытого транзистора

Поскольку резистивное сопротивление закрытого канала $R_{\text{закр}}$ в рассматриваемой схеме выступает как нагрузка открытого транзистора, причем весьма высокоомная, то нагрузочная прямая, построенная на рис. 19.6, отсекает на оси тока i_C отрезок $E/R_{\text{закр}}$ пренебрежимо малой величины. Поэтому РТ открытого транзистора лежит в самом начале линейного участка выходной ВАХ, где ток в канале близок к величине $E/R_{\text{закр}}$, не превышая ее.

19.6. Компараторы

На основе операционных усилителей строятся схемы, выполняющие функцию сравнения двух напряжений. Они называются **компараторами**.

Схема простейшего компаратора представлена на рис. 19.7, а. На инвертирующий вход ОУ относительно общей точки O подается опорное напряжение U_0 . Напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, которое необходимо сравнивать с U_0 , поступает на не инвертирующий вход ОУ. В этом случае напряжение на дифференциальном входе ОУ будет равно

$$\Delta u_{\text{вх}} = u_{\text{вх}} - U_0,$$

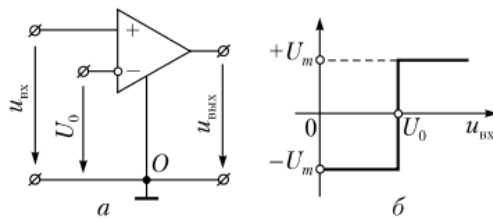


Рис. 19.7. Простейший компаратор на ОУ:

a — схема включения; *б* — передаточная характеристика $u_{\text{ВЫХ}}(u_{\text{ВХ}})$

a напряжение на выходе ОУ —

$$u_{\text{ВЫХ}} = \kappa \Delta u_{\text{ВХ}} = \kappa (u_{\text{ВХ}} - U_0).$$

Так как дифференциальный коэффициент усиления ОУ $\kappa \rightarrow \infty$ (реально $\kappa = 10^4 \div 10^6$), то любое конечное значение $\Delta u_{\text{ВХ}}$ выводит ОУ за пределы линейного участка его передаточной характеристики (см. рис. 14.3, б), где $u_{\text{ВЫХ}} = \pm U_m$.

Если входное напряжение $u_{\text{ВХ}}$ превышает U_0 , то напряжение на выходе компаратора равно $u_{\text{ВЫХ}} = +U_m$.

Когда $u_{\text{ВХ}}$ меньше опорного напряжения U_0 , то $u_{\text{ВЫХ}} = -U_m$.

Зависимость выходного напряжения компаратора от входного $u_{\text{ВЫХ}}(u_{\text{ВХ}})$ показана на рис. 19.7, б). Недостатком схемы компаратора, показанной на рис. 19.7, а, является сравнительно большое время, затрачиваемое на изменение уровня выходного напряжения (от $+U_m$ к $-U_m$ и обратно). С целью увеличения быстродействия применяются различные схемные решения [12].

Вид передаточной характеристики компаратора $u_{\text{ВЫХ}}(u_{\text{ВХ}})$ (см. рис. 19.7, б) позволяет отнести его к ключевым (коммутирующим) схемам, если одно из состояний на выходе принять за условную «единицу», а второе — за условный «ноль».

19.7. Схемная реализация универсальных базисов

«И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ»

Схемы, выполняющие базисные логические операции «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ», строятся как на биполярных транзисторах, так и на полевых (МОП-транзисторах). Каждая из таких схем в качестве составных частей содержит инвертор (осуществляющий логическую операцию «НЕ») и элемент, на который возлагается логическое действие либо умножения («И»), либо сложения («ИЛИ»).

В зависимости от используемых полупроводниковых элементов все многообразие логических схем делится на группы, которым присвоены специальные названия [12]:

- диодно-транзисторная логика (ДТЛ);
- транзисторно-транзисторная логика (ТТЛ);
- транзисторно-транзисторная логика с диодами Шоттки (ТТЛШ);
- МОП-логика (*n*-МОП и *p*-МОП);
- комплементарная МОП-логика (КМОП) и др.

Рассмотрим основные принципы схемного решения универсальных базисов «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ» на конкретных примерах.

19.8. Диодно-транзисторная логика

Главным признаком принадлежности элемента к ДТЛ является присутствие в его структуре инвертора на биполярном транзисторе и диодной схемы, выполняющей одну из логических операций: «И» (логическое умножение) либо «ИЛИ» (логическое сложение).

На рис. 19.8, *a* показана схема, которая в условиях позитивной логики осуществляет функцию «И-НЕ». Причем операция «И» возложена на диоды D_1 и D_2 , а биполярный транзистор T_1 , включенный по схеме с ОЭ, работает как инвертор («НЕ»). Рассмотрим принцип действия цепи на рис. 19.8, *a*.

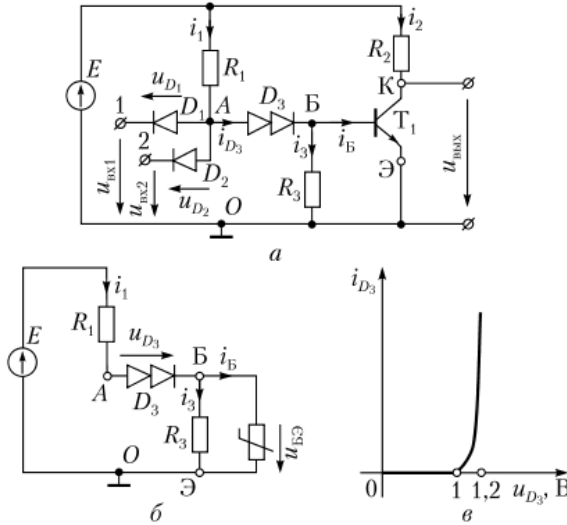


Рис. 19.8. Диодно-транзисторная логика:

a — схемное решение; *б* — эквивалентная схема для цепи база — эмиттер транзистора T_1 в состоянии двух логических «единиц» на входе (логического «нуля» на выходе); *в* — расположение рабочей точки диода D_3 на его ВАХ в режиме логической «единицы» на выходе

Если закрыты оба входных диода D_1 и D_2 (а это возможно лишь при высоких уровнях входных напряжений $u_{вх1}^1$ и $u_{вх2}^1$, когда потенциалы точек 1 и 2 выше потенциала точки А), источник ЭДС E через двойной диод D_3 подает ток в базу транзистора T_1 величиной i_B , достаточной для насыщения T_1 . В этом случае имеем на выходе логический «ноль», т.е. $y = 0$.

Во всех остальных случаях, когда хотя бы одно из входных напряжений имеет низкий уровень, достаточный для открытия соответствующего диода (D_1, D_2), ток, ответвляемый в D_3 , а значит, и в базу транзистора T_1 , падает практически до нуля. T_1 переходит в режим отсечки. Использование в качестве D_3 двойного диода (эквивалент двум последовательным) обеспечивает более глубокую отсечку T_1 за счет увеличения резистивного сопротивления участка, содержащего D_3 , что весьма существенно в рассматриваемом режиме. Напряжение на выходе при закрытом T_1 близко к E . Следовательно, $y = 1$.

Таким образом, схема на рис. 19.8, *a* имеет следующие логические свойства:

- при $x_1 = 1, x_2 = 1 \rightarrow y = 0$;
- при $\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1, \\ x_1 = 1, x_2 = 0 \rightarrow y = 1, \\ x_1 = 0, x_2 = 0. \end{cases}$

Этот результат полностью совпадает с таблицей истинности логической функции «И-НЕ» (см. рис. 18.2).

Пример 19.1. Для цепи, изображенной на рис. 19.8, а, требуется:

а) оценить величины напряжений на входах $u_{вх1}$ и $u_{вх2}$, необходимые для надежного обеспечения состояний логического «нуля» и логической «единицы» на выходе схемы;

б) провести оценку запаса помехоустойчивости, предполагая, что входные напряжения $u_{вх1}$ и $u_{вх2}$ подаются от каскадов, идентичных рассматриваемому.

Параметры цепи принять следующими:

1) $E = 5$ В; $R_1 = 5$ кОм; $R_2 = 2$ кОм; $R_3 = 5$ кОм;

2) D_1, D_2, D_3 — кремниевые диоды. В открытом состоянии напряжение на D_1 и D_2 составляет $\sim 0,6$ В, а на D_3 — $\sim 1,2$ В;

3) для кремниевого транзистора, используемого в схеме, в «единичном» состоянии на выходе (режим отсечки) $u_{вых}^1 = u_{кэ}^1 \approx E$, а в «нулевом» состоянии $u_{вых}^0 = u_{кэ}^0 \ll E$ (транзистор глубоко насыщен), типичное значение $u_{кэ}^0 \sim 0,1$ В.

4) напряжение на входе насыщенного транзистора T_1 $u_{бэ} \approx 0,6$ В.

Решение

Рассмотрим отдельно каждый из статических режимов схемы на рис. 19.8, а.

1. Логический «нуль» на выходе ($u_{кэ} = u_{вых}^0 \ll E$; T_1 — открыт). Это состояние имеет место при запертых диодах D_1 и D_2 , когда потенциалы точек 1 и 2 выше, чем потенциал точки А (см. рис. 19.8, а), т.е. при высоком уровне $u_{вх1}$ и $u_{вх2}$ (две логические «единицы» на входе). Поэтому на эквивалентной схеме, представленной на рис. 19.8, б, диоды D_1 и D_2 оборваны.

От источника питания E через диод D_3 и переход база — эмиттер транзистора T_1 протекают токи прямого направления. Их величина должна быть достаточной для полного открытия D_3 и создания режима насыщения в транзисторе T_1 . Для эквивалентной схемы на рис. 19.8, б справедливо уравнение по второму закону Кирхгофа $E = i_1 R_1 + u_{D_3} + u_{бэ}$.

В рассматриваемом состоянии по условию задачи $u_{D_3} \approx 1,2$ В, $u_{бэ} \approx 0,6$ В. Тогда потенциал точки А в этом же режиме $\varphi_A = \varphi_0 + u_{бэ} + u_{D_3} = 0,6 + 1,2 = 1,8$ (В).

Следовательно, надежно запертое состояние входных диодов D_1 и D_2 возможно только при $u_{вх1}$ и $u_{вх2}$, превышающих 1,8 В. Этот результат позволяет задать минимальный уровень напряжения логической «единицы» на входах цепи на рис. 19.8, а. С небольшим запасом возьмем $u_{вх\min}^1 = 2$ В.

2. Логическая «единица» на выходе ($u_{вых}^1 \approx E = 5$ В; T_1 в режиме отсечки). Данный режим возникает, когда хотя бы одно из входных напряжений ($u_{вх1}$, $u_{вх2}$) имеет низкий уровень. Закрытому состоянию транзистора T_1 соответствует ток базы $i_б \approx 0$. Величина $i_б$ во многом зависит от сопротивления диода D_3 .

Резкое увеличение резистивного сопротивления D_3 можно достигнуть, переместив его рабочую точку на начальный участок его ВАХ (рис. 19.8, в), где ток через D_3 пренебрежимо мал, уменьшив напряжение на нем до величины $u_{D_3} \leq 1$ В. Это условие равносильно требованию к величине потенциала точки А в данном режиме, а следовательно, и к уровню входного напряжения. Действительно, при $i_б \approx 0$ потенциал $\varphi_б = 0$. Тогда $u_{D_3} = \varphi_A - \varphi_б \approx \varphi_A \leq 1$ В. При этом ток $i_1 = (E - \varphi_A)/R_1$ замыкается через любой из открытых диодов D_1 или D_2 либо через оба.

Напомним, что для надежного открытия диода (кремниевого) потенциал его анода должен быть выше потенциала катода на величину порядка 0,6 В (см. условия задачи). Тогда для максимального уровня напряжения логического «нуля» на входе, например, при открытом диоде D_1 получаем $u_{вх1} = \varphi_A - u_{D_1} \leq 1 - 0,6 = 0,4$ (В).

Таким образом, уровень логического «нуля» на входе не должен превышать $u_{вх\max}^0 \leq 0,4$ В.

3. Запас по помехоустойчивости. Предполагаем, что «нуль» и «единица» на входах схемы создаются аналогичными каскадами, т.е. высокий уровень входного напряжения $u_{\text{вх}}^1 \approx 5$ В, а низкий уровень $u_{\text{вх}}^0 \approx 0,1$ В. Тогда:

- для логической «единицы» запас помехоустойчивости оценивается величиной $S^1 = u_{\text{вх}}^1 - u_{\text{вх min}}^1 = 5 - 2 = 3$ (В);

- для логического «нуля» запас помехоустойчивости определяется разностью напряжений $S^0 = u_{\text{вх max}}^0 - u_{\text{вх}}^0 = 0,4 - 0,1 = 0,3$ (В).

19.9. Транзисторно-транзисторная логика

Принцип, лежащий в основе ДТЛ (см. параграф 19.8), в ТТЛ реализуется с помощью многоэмиттерного транзистора.

В многоэмиттерных биполярных транзисторах единая базовая область через p - n -переходы соединена с несколькими самостоятельными эмиттерными областями, снабженными собственными выводами. Каждый такой p - n -переход между базой и одним из эмиттеров может использоваться как полупроводниковый диод. На рис. 19.9 показаны двухэмиттерный n - p - n -транзистор и его диодная эквивалентная схема.

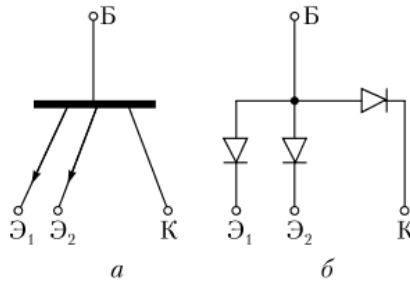


Рис. 19.9. Двухэмиттерный транзистор (а) и его эквивалентная схема (б)

Схема простейшего элемента ТТЛ, которая в условиях позитивной логики реализует логическую операцию «И-НЕ» для двух переменных, изображена на рис. 19.10, а. Она содержит многоэмиттерный транзистор T_1 и обычный биполярный транзистор T_2 . Входными сигналами являются напряжения $u_{\text{вх1}}$ и $u_{\text{вх2}}$, подаваемые на эмиттеры Э₁ и Э₂ транзистора T_1 . Выходное напряжение снимается с инвертора, построенного на транзисторе T_2 .

Как уже говорилось, принцип работы схемы на рис. 19.10, а тот же, что и элемента ДТЛ (см. рис. 19.8, а). Причем роли диодов D_1, D_2, D_3 , стоящих на входе элемента ДТЛ, в схеме ТТЛ выполняет многоэмиттерный транзистор T_1 , который на эквивалентной схеме (рис. 19.10, б) представлен тремя диодами:

- функции D_1 и D_2 возложены на p - n -переходы Б–Э₁ и Б–Э₂;

- функцию D_3 выполняет переход база – коллектор транзистора T_1 . Обратим внимание, что этот переход работает при прямом напряжении (на прямой ветви его ВАХ).

Поясним работу схемы элемента ТТЛ (см. рис. 19.10, а) при условии, что логической «единице» и логическому «нулю» на входе соответствуют напряжения $u_{\text{вх}}^1 = E$ и $u_{\text{вх}}^0 = 0$. В рассматриваемой цепи возможны четыре различных ситуации на входе. Но только в одной из них транзистор T_2 открыт, а именно, когда на оба входа поданы напряжения высокого уровня: $u_{\text{вх1}} = E$ и $u_{\text{вх2}} = E$. При этом оба эмиттерных перехода транзистора T_1 запер-

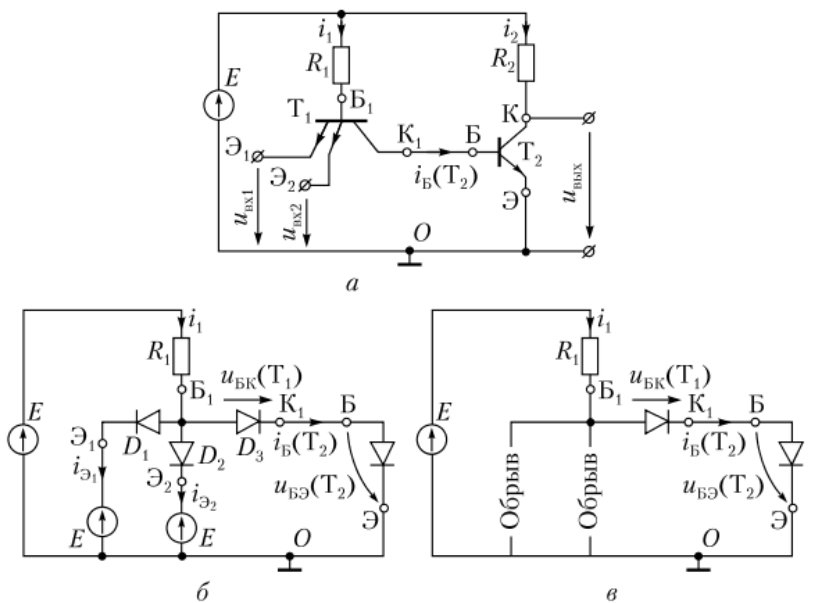


Рис. 19.10. Транзисторно-транзисторная логика:

a – простейший элемент ТТЛ; *б* – эквивалентная диодная схема при $u_{вх1} = E$ и $u_{вх2} = E$; *в* – расчетная схема цепи, изображенной на рис. 19.10, *б*

ты, поскольку потенциал базы T_1 (точка B_1 на рис. 19.10, *a*) всегда ниже E за счет падения напряжения на резисторе R_1 . Именно этот случай изображен на эквивалентной диодной схеме элемента (см. рис. 19.10, *б*), а также на эквивалентной расчетной схеме (рис. 19.10, *в*), где эмиттеры транзистора T_1 оборваны. В замкнутом контуре, содержащем источник питания E , резистор R_1 , два прямо смещенных перехода база – коллектор T_1 и база – эмиттер T_2 (см. рис. 19.10, *в*) протекает ток

$$i_1 = [E - (u_{БК}(T_1) + u_{БЭ}(T_2))]/R_1, \quad (19.1)$$

величина которого обеспечивает надежно открытое состояние указанных p - n -переходов.

Если учесть, что для кремниевого транзистора напряжение на открытых p - n -переходах $u_{БК}(T_1)$ и $u_{БЭ}(T_2)$ составляет примерно 0,6 В, то из соотношения (19.1) получаем однозначное соответствие между резистивным сопротивлением R_1 и током i_1 , отбираемым от источника питания в режиме двух логических «единиц» на входе: $R_1 \approx (E - 1,2)/i_1$. Напомним, что при открытом T_2 напряжение на выходе минимально ($\sim 0,1$ В для кремниевого транзистора), что соответствует на выходе логическому нулю ($y = 0$).

В оставшихся не рассмотренных нами трех логических ситуациях элемента ТТЛ (см. рис. 19.10, *a*) хотя бы одно из входных напряжений равно нулю:

- а) $u_{вх1} = 0$; $u_{вх2} = E$ ($x_1 = 0$; $x_2 = 1$);
- б) $u_{вх1} = E$; $u_{вх2} = 0$ ($x_1 = 1$; $x_2 = 0$);
- в) $u_{вх1} = 0$; $u_{вх2} = 0$ ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$).

При этом один либо оба эмиттерных перехода транзистора T_1 открываются и потенциал точки B_1 (база T_1) снижается до величины порядка 0,6 В.

Согласно эквивалентной схеме, представленной на рис. 19.10, *б*, разность потенциалов $\varphi_{B_1} - \varphi_0 = u_{B_1,0}$ определяет суммарное напряжение на двух

прямо смещенных $p-n$ -переходах (база — коллекторный T_1 и база — эмиттерный T_2). Теперь оно не превышает 0,6 В, а на каждом из переходов — 0,3 В. Рабочая точка для каждого из названных переходов смещается на начальный участок его ВАХ, где ток через переход близок к нулю. Транзистор T_2 пребывает в режиме отсечки, и на выходе схемы имеем логическую «единицу» $y = 1$ ($u_{\text{вых}} \approx E$).

Таким образом, проанализированная нами схема элемента ТТЛ (см. рис. 19.10, *a*) обладает следующими логическими свойствами:

- 1) $x_1 = 1; x_2 = 1; y = 0$;
- 2) $x_1 = 0; x_2 = 1; y = 1$;
- 3) $x_1 = 1; x_2 = 0; y = 1$;
- 4) $x_1 = 0; x_2 = 0; y = 1$.

В условиях позитивной логики все указанные четыре соотношения принадлежат логической операции «И-НЕ» (логическое умножение с инверсией) — $y = x_1 \cdot x_2$.

19.10. Универсальные базисы на КМОП-транзисторах (КМОП-логика)

Недостатком логических схем, построенных на биполярных транзисторах, является существенное потребление мощности источников в статическом режиме. Логические элементы, построенные на комплементарных полевых транзисторах, практически не расходуют энергию источников питания в режиме покоя независимо от состояния на входе и выходе («ноль» или «единица»).

На рис. 19.11, *a* дана схема универсального базисного элемента, содержащего две комплементарные пары (T_1, T_3) и (T_2, T_4), из них транзисторы T_1, T_2 являются n -канальными, а T_3, T_4 — p -канальными. Обратим внимание на основные структурные особенности заданной схемы.

Затворы транзисторов каждой комплементарной пары собраны в одну точку (точки 1 и 2 на рис. 19.11, *a*). Входное напряжение $u_{\text{вх1}}$ подается на затворы T_1, T_3 , а $u_{\text{вх2}}$ — на затворы T_2, T_4 .

Каналы n -канальных транзисторов T_1, T_2 включены параллельно, а p -канальных T_3, T_4 — последовательно.

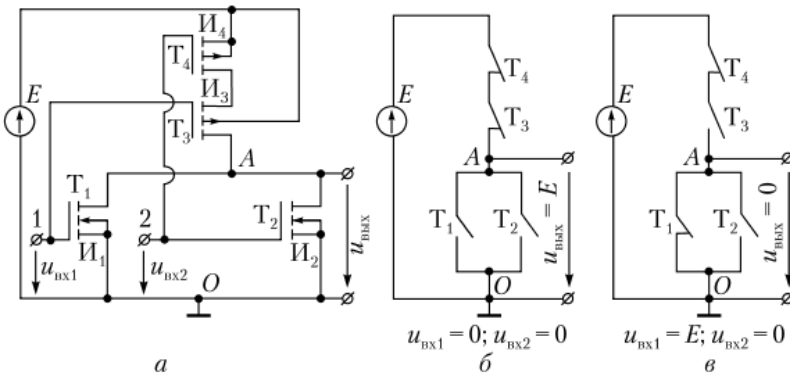


Рис. 19.11. Универсальный базис на КМОП-транзисторах:

a — схема, содержащая две комплементарных пары; *б* — эквивалентная схема для режима $u_{\text{вх1}} = 0; u_{\text{вх2}} = 0$; *в*) эквивалентная схема для случая $u_{\text{вх1}} = E; u_{\text{вх2}} = 0$

Подложки (а также истоки) n -канальных транзисторов T_1 и T_2 соединены с «землей» (точка O). Подложки p -канальных транзисторов T_3 и T_4 подключены к «плюсу» источника питания E . Истоки p -канальных транзисторов также соединены с «плюсом» источника питания (исток T_4 — непосредственно, а исток T_3 — через проводящий канал транзистора T_4).

Величина ЭДС E превышает удвоенное пороговое напряжение используемых полевых транзисторов, т.е. $E \geq |2u_{\text{пор}}|$.

Низкий уровень входного напряжения $u_{\text{вх}}^0 = 0$, а высокий $u_{\text{вх}}^1 = E$.

Все возможные статические состояния схемы на рис. 19.11, *a* (ситуации) можно разбить на две группы, отличающиеся уровнем выходного напряжения («высокий», «низкий»). Назовем их — случай I и случай II.

Случай I. Он соответствует единственной ситуации, когда оба входных напряжения имеют низкий уровень: $u_{\text{вх1}} = 0$; $u_{\text{вх2}} = 0$.

Для n -канальных транзисторов T_1 и T_2 при нулевом напряжении на затворах относительно истоков (и подложек) проводимость участка сток — исток равна нулю, т.е. n -каналы находятся в запертом состоянии. В то же время потенциалы затворов p -канальных транзисторов T_3 и T_4 ниже, чем потенциалы их подложек, а следовательно, и истоков на величину $E \geq 2u_{\text{пор}}$. Следовательно, так как полевые транзисторы p -типа управляются отрицательным напряжением, то в T_3 и T_4 созданы условия для индуцирования канала между истоком и стоком с проводимостью, близкой к максимальной, поэтому T_3 и T_4 открыты.

Изложенная ситуация отражена на эквивалентной схеме (рис. 19.11, *б*), где запертые n -каналы T_1 и T_2 изображены разомкнутыми ключами, а проводящие p -каналы T_3 и T_4 — замкнутыми. Из рис. 19.11, *б* видим, что в рассматриваемом случае потенциал точки A близок к E , следовательно, и выходное напряжение $u_{\text{вых}} = \varphi_A - \varphi_O = E$, т.е. имеет высокий уровень.

Таким образом, логическое состояние на входе и выходе цепи на рис. 19.11, *a* в случае I в условиях позитивной логики определяется равенствами $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $y = 1$.

Случай II. Он включает три логических ситуации, при которых хотя бы одно из входных напряжений имеет высокий уровень, а именно: а) $u_{\text{вх1}} = E$, $u_{\text{вх2}} = 0$; б) $u_{\text{вх1}} = 0$, $u_{\text{вх2}} = E$; в) $u_{\text{вх1}} = E$, $u_{\text{вх2}} = E$. Во всех перечисленных ситуациях хотя бы один из n -канальных транзисторов (T_1 или T_2) находится в глубоко открытом состоянии, так как $E \geq 2u_{\text{пор}}$. Для определенности возьмем ситуацию а). Тогда T_1 открыт, а T_2 закрыт. Под действием напряжений $u_{\text{вх1}} = E$, $u_{\text{вх2}} = 0$ p -канальные транзисторы пребывают в состояниях: T_3 — закрытом, T_4 — открытом. На эквивалентной схеме на рис. 19.11, *в*, отражающей данную ситуацию, транзисторы T_1 и T_4 изображены замкнутыми ключами, а T_2 и T_3 — разомкнутыми. Поскольку выходное напряжение снимается в данном случае с открытого транзистора (с замкнутого ключа на рис. 19.11, *в*), то оно имеет низкий уровень $u_{\text{вых}} \approx 0$.

Аналогичный анализ позволяет определить напряжение на выходе заданной цепи при других возможных ситуациях на ее входе и построить таблицу уровней, которая дает наглядное представление об искомой связи $u_{\text{вых}}(u_{\text{вх1}}, u_{\text{вх2}})$. Она показана в табл. 19.2. В условиях позитивной логики из табл. 19.2 следует таблица истинности $y(x_1, x_2)$, данная в табл. 19.3. Величи-

Таблица уровней для универсального базисного элемента на КМОП-транзисторах

$u_{вх1}$	$u_{вх2}$	$u_{вых}$
0	0	E
E	0	0
0	E	0
E	E	0

Таблица 19.3

Таблица истинности при позитивной логике

x_1	x_2	y	$x_1 + x_2$	$\overline{x_1 + x_2}$
0	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

ны, записанные в ее столбце y , совпадают со значениями логической функции $x_1 + x_2$, т.е. операции «ИЛИ-НЕ».

Напомним, что в негативной логике напряжению низкого уровня соответствует «единичное» значение логической величины, а напряжению высокого уровня — «нулевое». В этих условиях для полученной нами таблицы уровней (см. табл. 19.2) таблицей истинности является табл. 19.4. Столбец y здесь совпадает с логической функцией $\overline{x_1 \cdot x_2}$. Следовательно, в условиях негативной логики заданная схема реализует операцию «И-НЕ».

Таблица 19.4

Таблица истинности при негативной логике

x_1	x_2	y	$x_1 \cdot x_2$	$\overline{x_1 \cdot x_2}$
1	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	1	0	1

Вывод. В зависимости от выбора логики схема, изображенная на рис. 19.11, может выполнять как логическую операцию «ИЛИ-НЕ», так и операцию «И-НЕ».

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите основные признаки принадлежности схемы к классу ключевых.
2. Поясните следующие понятия, применяемые для оценки качества ключевых схем:
 - а) наибольшее допустимое напряжение для логического «нуля» на входе;
 - б) наименьшее допустимое напряжение для логической «единицы» на входе;
 - в) запас помехоустойчивости для логического «нуля»;
 - г) запас помехоустойчивости для логической «единицы».
3. Поясните работу схемы инвертора на биполярном транзисторе (см. рис. 19.1).
4. Сформулируйте требования к положению рабочей точки (РТ) на входной и семействе выходных ВАХ биполярного транзистора в схеме инвертора (см. рис. 19.1).

5. В каком логическом состоянии («0» или «1») на входе инвертора (см. рис. 19.1) от источника питания потребляется наибольшая мощность?

6. С какой целью между коллектором и базой инвертора на биполярном транзисторе (см. рис. 19.1) включен диод Шоттки (см. рис. 19.3)? Что такое транзистор Шоттки и каково его условное изображение (графическое обозначение)?

7. Назовите главные недостатки инвертора на биполярном транзисторе.

8. Поясните принцип действия инвертора на полевом транзисторе (см. рис. 19.4). Почему эта схема не потребляет энергию от источника входного сигнала? При каком уровне входного напряжения (низком или высоком) рассматриваемый инвертор потребляет существенную энергию от источника питания?

9. Что понимается под комплементарной парой полевых транзисторов?

10. Как работает схема инвертора на комплементарных полевых транзисторах, изображенная на рис. 19.5?

11. Почему инвертор на рис. 19.5 независимо от логического состояния на его входе («0» или «1») потребляет пренебрежимо малую мощность от источника питания?

12. Назовите наиболее важные достоинства инвертора на КМОП-транзисторах по сравнению с инверторами на биполярном и полевом транзисторах.

13. Каково главное назначение компараторов? Поясните принцип функционирования компаратора на ОУ (см. рис. 19.7, а).

14. На каких полупроводниковых элементах строятся универсальные базисы «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ»?

15. В чем заключается способ построения универсального базиса («И-НЕ» либо «ИЛИ-НЕ»), называемый диодно-транзисторной логикой?

16. Каков уровень напряжения (низкий или высокий) на выходе цепи на рис. 19.8, а в случае, когда:

а) $u_{вх1} = 0; u_{вх2} = 0;$

б) $u_{вх1} = u_{вх\ max}; u_{вх2} = 0;$

в) $u_{вх1} = 0; u_{вх2} = u_{вх\ max};$

г) $u_{вх1} = u_{вх\ max}; u_{вх2} = u_{вх\ max}?$

17. Что такое многоэмиттерный биполярный транзистор?

18. Какова функция многоэмиттерного транзистора в схеме универсального базиса (см. рис. 19.10, а), построенного по принципу, называемому транзисторно-транзисторной логикой?

19. Каково логическое состояние на выходе схемы на рис. 19.10, а (в условиях положительной логики): а) при двух логических «единицах» на входах; б) при двух логических «нулях» на входах?

20. Назовите основной недостаток схем универсальных базисов на биполярных транзисторах.

21. Каково преимущество логических элементов, построенных по принципу КМОП-логики?

22. Какую логическую функцию реализует схема на рис. 19.11, а, выполненная на КМОП-транзисторах в условиях: а) положительной логики и б) отрицательной логики?

Глава 20

СХЕМОТЕХНИКА ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПАМЯТИ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- принципы построения АЦП и ЦАП;
- основные узлы цифровых устройств, не содержащих элементов памяти, и их назначение;

уметь

- задавать основные параметры при выборе и построении цифровых устройств, не содержащих элементов памяти, с целью решения конкретной задачи;

владеть

- методикой выбора необходимых функциональных узлов для построения цифровых устройств.
-

Наличие или отсутствие в составе конкретного устройства элементов памяти является одной из важнейших его характеристик. Именно по этому признаку все функциональные узлы, из которых строятся сложные цифровые системы, делятся на два больших класса:

- автоматы без памяти, называемые устройствами **комбинационного** вида;
- автоматы с памятью, которые называются устройствами **последовательностного** вида.

В данной главе рассматриваются комбинационные устройства, т.е. функциональные узлы, не содержащие элементов памяти. Их выходная реакция полностью определяется сигналом на входе. Выполняются комбинационные устройства на логических элементах (обычно на универсальных базисах). Такие широко распространенные функциональные узлы, как шифраторы, дешифраторы, мультиплексоры и др., являются комбинационными. К этому же классу можно отнести и важнейшие устройства, принадлежащие одновременно аналоговой и цифровой технике, — преобразователи аналогового сигнала в цифровой и цифрового — в аналоговый.

20.1. Аналого-цифровые преобразователи

Одной из важных задач, решаемых электронной схемотехникой, является преобразование аналогового сигнала в цифровой. Обычно на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП) подается напряжение, изменяющееся с течением времени по некоторому непрерывному закону $u(t)$. Выходной сигнал АЦП представляет собой последовательность цифровых кодов.

Переход от непрерывной функции $u(t)$ к цифровому сигналу включает в себя следующие шаги (операции):

- дискретизация функции $u(t)$ по времени;
- квантование ее по уровню;
- кодирование дискретизированного и проквантованного сигнала.

Рассмотрим названные операции более подробно.

20.1.1. Дискретизация во времени

Важной особенностью функции времени $u(t)$, изменяющейся непрерывно (без скачков), является следующее свойство: в разложении $u(t)$ в гармонический ряд (ряд Фурье или интеграл Фурье) можно пренебречь гармониками с частотой, превышающей некоторую граничную частоту f_m . Другими словами, плавно изменяющаяся функция $u(t)$ имеет спектр, ограниченный частотой $f = f_m$.

Согласно теореме Котельникова [4] функция $u(t)$ с ограниченным частотой f_m спектром может быть однозначно определена совокупностью своих мгновенных значений (отсчетов), взятых через равные промежутки времени:

$$\Delta t \leq 1/2f_m. \quad (20.1)$$

Несложно заметить, что интервал времени $1/2f_m$ представляет собой половину периода высшей гармонической составляющей в спектре преобразуемого сигнала $u(t)$.

На рис. 20.1 изображена некоторая функция $u(t)$, плавно изменяющаяся во времени и, следовательно, имеющая ограниченный спектр. Здесь же показаны точки, определяющие мгновенные значения $u(t)$ в моменты времени $0, \Delta t, 2\Delta t$ и т.д. При условии выполнения соотношения (20.1) по координатам этих точек, называемых **отсчетами**, функция $u(t)$ теоретически (по теореме Котельникова) восстанавливается однозначно.

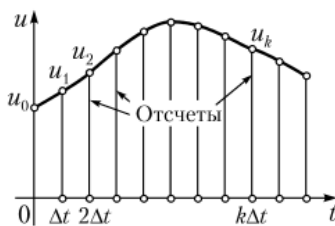


Рис. 20.1. Непрерывная функция $u(t)$ и ее отсчеты

Таким образом, процесс дискретизации состоит в переходе от непрерывной функции времени к совокупности ее отсчетов.

20.1.2. Квантование по уровню

При квантовании функции $u(t)$ по уровню можно выделить следующие два этапа.

1. Весь диапазон изменения функции $u(t)$ от нуля до максимального значения U_m разбивается на $(2^n - 1)$ уровней, а именно:

$$0, \Delta u = U_m / (2^n - 1), 2\Delta u, \dots, (2^n - 1)\Delta u = U_m.$$

Величина $\Delta u = U_m / (2^n - 1)$, называемая **шагом квантования по уровню**, определяется выбранным количеством уровней $(2^n - 1)$.

2. От реальных отсчетов функции $u(t)$ в дискретные моменты времени переходят к последовательности отсчетов, принимающих лишь «разрешенные» в соответствии с шагом квантования значения напряжения, ближайшие по уровню к реальным. Этот переход имеет приближенный характер и обязательно сопровождается погрешностью (обычно называемой шумом квантования), не превышающей половины шага квантования $\Delta u/2$. В отличие от процесса дискретизации во времени он необратим, так как по проквантованной по уровню совокупности отсчетов исходная функция $u(t)$ не может быть восстановлена полностью.

Приближением к $u(t)$ является ступенчатая функция $u_{д,к}(t)$, построенная на рис. 20.2. Индекс «д, к» означает, что функция $u_{д,к}(t)$ является результатом двух операций над $u(t)$ — дискретизации по времени и квантования по уровню. Очевидно, что с уменьшением шага квантования Δu ступенчатая функция $u_{д,к}(t)$ становится ближе к непрерывной функции $u(t)$.

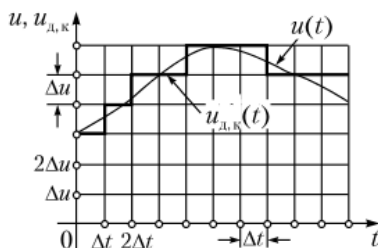


Рис. 20.2. Графики непрерывной функции $u(t)$ и ее продискретизированного и проквантованного аналога $u_{д,к}(t)$

20.1.3. Кодирование

Цель кодирования заключается в том, чтобы поставить в соответствие каждому из 2^n разрешенных уровней от нулевого до $(2^n - 1)$ -го, которые может принять проквантованная функция $u_{д,к}(t)$, цифровой код. Чаще всего это двоичное число.

Как известно, 2^n состояний можно представить двоичным числом, имеющим n разрядов. Следовательно, величина шага квантования $\Delta u = U_m / (2^n - 1)$ обуславливается заданной разрядностью двоичного кода n . Переходу от одного из 2^n уровней к цифровому коду предшествует процесс распознавания этого уровня.

20.1.4. Способы распознавания уровня преобразуемого сигнала внутри интервала дискретизации

Назовем два главных применяемых в инженерной практике способа идентификации конкретного уровня функции $u(t)$ внутри интервала дискретизации с ближайшим «разрешенным» уровнем. Они отличаются как по схемному решению, так и по быстродействию.

1. Сравнение с равномерно нарастающим ступенчатым напряжением. На входы устройства сравнения (обычно это компаратор) подаются одновременно два напряжения:

- а) преобразуемое напряжение $u(t)$;

б) ступенчатое напряжение $u_c(t)$, равномерно нарастающее от Δu до $(2^n - 1)\Delta u$, как это показано на рис. 20.3. Оно определяется величиной ступени Δu и временным интервалом между соседними ступенями T .

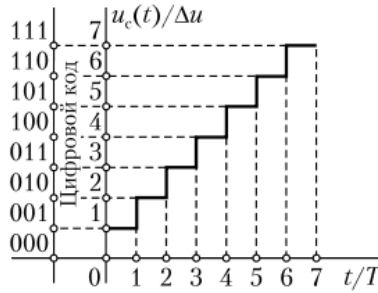


Рис. 20.3. Ступенчатое напряжение, формируемое на выходе ЦАП при воздействии на его входе периодической последовательности тактовых импульсов

Ступенчатое напряжение $u_c(t)$ можно получить на выходе цифро-аналогового преобразователя (ЦАП), на вход которого от генератора тактовых импульсов (ГТИ) подается последовательность импульсов с частотой $f_{\text{такт}} = 1/T$. При воздействии на вход ЦАП каждого отдельного тактового импульса уровень сигнала на его выходе возрастает на величину Δu .

Момент совпадения мгновенного значения напряжения $u(t)$ с уровнем $u_c(t)$ фиксируется компаратором. На его выходе формируется импульс, прекращающий подачу тактовых импульсов с ГТИ. По числу тактовых импульсов, поступивших на вход ЦАП от начала операции сравнения до момента совпадения, соответствующий уровень $u_c(t)$ восстанавливается однозначно.

Время, затрачиваемое на распознавание уровня преобразуемого сигнала $u(t)$, в рассматриваемом случае лежит в пределах [6]

$$0 \leq t_{\text{расп}} < (2^n - 1)T.$$

Напомним, что T — период следования тактовых импульсов. Очевидно, что интервал времени $(2^n - 1)T$ должен лежать внутри интервала дискретизации Δt .

Изложенный принцип сравнения $u(t)$ с равномерно нарастающим ступенчатым напряжением $u_c(t)$ реализуется в АЦП последовательного счета (см. ниже).

2. Одновременное сравнение напряжения $u(t)$ с 2^n дискретными уровнями. Для реализации этого вида распознавания требуется 2^n компараторов с различными опорными напряжениями $0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, (2^n - 1)\Delta u$. Этот принцип используется в АЦП параллельного счета, в котором быстродействие распознавания уровня напряжения $u(t)$ примерно в $(2^n - 1)$ раз выше, чем в случае АЦП последовательного счета.

20.1.5. Аналого-цифровые преобразователи последовательного счета

На рис. 20.4 изображена блок-схема АЦП последовательного счета. Назовем его основные блоки:

- УУ — устройство управления;
- ГТИ — генератор тактовых импульсов;
- СТИ — счетчик тактовых импульсов;
- К — компаратор;

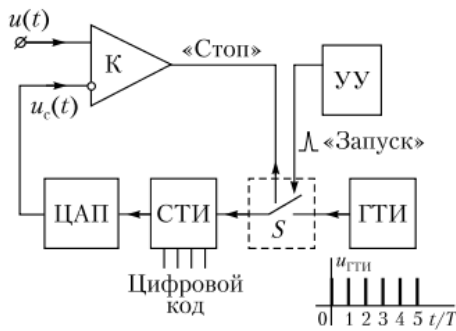


Рис. 20.4. АЦП последовательного счета

ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь;

S — ключевое устройство.

Работа схемы АЦП начинается с появления импульса запуска, подаваемого от управляющего устройства (УУ). Частота следования импульсов запуска f_d соответствует заданному времени дискретизации Δt , т.е. $f_d = 1/\Delta t$. Под воздействием импульса запуска замыкается ключ S , подключающий выход генератора тактовых импульсов (ГТИ) к входу счетчика тактовых импульсов (СТИ).

Принятые счетчиком импульсы подаются:

а) на его выходной регистр, где их количество записывается в виде цифрового кода;

б) на ЦАП, формирующий ступенчатое напряжение $u_c(t)$ (см. рис. 20.3), которое воздействует на инвертирующий вход компаратора. Не инвертирующий вход компаратора подключен к источнику преобразуемого напряжения $u_c(t)$.

Пока нарастающее ступенчатое напряжение $u_c(t) < u(t)$, компаратор не препятствует прохождению тактовых импульсов с ГТИ на СТИ. В момент совпадения уровней $u(t)$ и $u_c(t)$ на выходе компаратора появляется импульс «Стоп», размыкающий ключ S . Поступление тактовых импульсов на счетчик прекращается. Цифровой код, записанный в выходном регистре СТИ, фиксируется на достигнутом состоянии. Преобразование заканчивается. Оно возобновляется только с приходом очередного импульса запуска с устройства управления.

Пример 20.1. Требуется оценить максимальную частоту дискретизации $f_{d\max}$ для АЦП последовательного счета, если частота тактовых импульсов $f_{\text{такт}} = 10$ МГц, число разрядов двоичного счетчика $n = 8$.

Решение

1. Период следования тактовых импульсов с ГТИ равен

$$T = 1/f_{\text{такт}} = 1/(10 \cdot 10^6) = 0,1 \text{ мкс.}$$

2. Максимальное время преобразования оцениваем по уровню наивысшей ступени в напряжении $u_c(t)_{\max} = (2^n - 1)\Delta u = U_m$. Для распознавания такого напряжения необходимо время

$$t_{\text{расп max}} = (2^n - 1)T = (2^8 - 1) \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} = 25,5 \text{ мкс.}$$

3. Поскольку интервал дискретизации Δt должен превышать максимальное время распознавания, то минимальное время дискретизации можно оценить по формуле

$$\Delta t_{\min} = 2^n T = 2^8 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} = 25,6 \text{ мкс.}$$

4. С учетом этого максимально возможная частота дискретизации в данном примере равна

$$f_{\text{дmax}} = 1/\Delta t_{\text{min}} = 1/(25,6 \cdot 10^{-6}) = 39,0625 \text{ кГц.}$$

20.1.6. Аналого-цифровые преобразователи параллельного типа

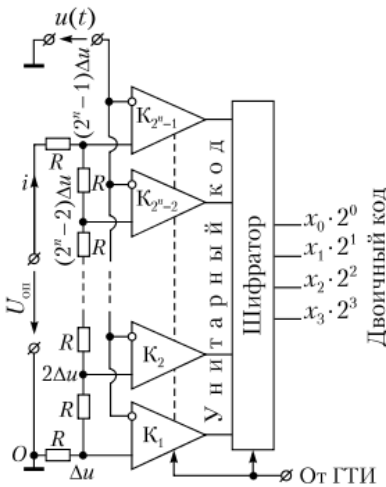


Рис. 20.5. АЦП параллельного типа

Блок-схема АЦП параллельного типа представлена на рис. 20.5. Она содержит $(2^n - 1)$ компараторов. Преобразуемое напряжение $u(t)$ подается на их инвертирующие входы. При помощи $(2^n - 1)$ компараторов напряжение $u(t)$ одновременно сравнивается с $(2^n - 1)$ уровнями. Для этого на не инвертирующих входах компараторов создаются напряжения $\Delta u, 2\Delta u, \dots, (2^n - 1)\Delta u$. Они снимаются с резистивного делителя, включающего 2^n одинаковых элементов.

Под действием источника опорного напряжения $U_{\text{оп}}$ в каждом из резисторов протекает ток $i_R = U_{\text{оп}}/(2^n R)$, вызывающий падение напряжения $\Delta u = U_{\text{оп}}/2^n$. При этом потенциалы не инвертирующих входов компараторов относительно общей точки (точка O на рис. 20.5) изменяются от Δu до $(2^n - 1)\Delta u$.

Совпадение потенциалов инвертирующего и не инвертирующего входов имеет место только на одном из $(2^n - 1)$ компараторов. На его выходе появляется сигнал в виде условной «единицы». На выходах остальных компараторов будет условный «ноль».

Совокупность N состояний, из которых только одно может принимать отличное от «нуля» значение, называется **унитарным кодом**. Преобразование унитарного кода в двоичный осуществляется специальным цифровым устройством, которое называется **шифратор**. На рис. 20.5 показан шифратор, преобразующий унитарный код в четырехразрядный двоичный. Частота преобразования в АЦП параллельного типа задается от генератора тактовых импульсов. Тактовые импульсы синхронизируют работу всех компараторов и кодирующего устройства (шифратора).

АЦП параллельного типа обеспечивают самое короткое время преобразования. Оно близко к периоду следования тактовых импульсов с ГТИ. Частота дискретизации таких преобразователей может достигать сотен мегагерц.

20.2. Цифро-аналоговые преобразователи

20.2.1. Основные соотношения

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) принимает на свой вход последовательность цифровых кодов, чаще всего двоичных. Выходной величиной ЦАП является последовательность квантованных уровней (отсчетов) напряжения или же тока электрического сигнала (см. рис. 20.2). В подавляющем большинстве случаев ЦАП осуществляет преобразование цифрового кода в напряжение.

Рассмотрим основные принципы построения наиболее распространенных ЦАП, преобразующих n -разрядный двоичный код в уровень напряжения или тока. В основу работы ЦАП положено соотношение, связывающее двоичный код с его количественным эквивалентом N (по сути десятичным числом):

$$N = x_0 \cdot 2^0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{n-1} \cdot 2^{n-1}, \quad (20.2)$$

где $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ могут принимать значения 0 или 1.

Поставим в соответствие единице младшего разряда ($x_0 = 1$) ток I и будем называть его весом (в амперах) единицы младшего разряда или весомым коэффициентом. Тогда вес всех следующих слагаемых в формуле (20.2) будет равен $2I, 4I, \dots, 2^{n-1}I$, а цифровому коду (20.2) будет соответствовать ток i_Σ , равный

$$i_\Sigma = x_0 I + x_1 2I + x_2 4I + \dots + x_{n-1} 2^{n-1} I. \quad (20.3)$$

Согласно формуле (20.3) при n -разрядном двоичном коде на входе ЦАП соответствующий электрический сигнал на его выходе равен сумме n слагаемых, характеризующихся «весом» (в амперах): $I, 2I, 4I, \dots, 2^{n-1}I$. Данная последовательность величин называется **двоично-взвешенной**. Присутствие каждого из слагаемых в сумме (20.3) зависит от значения цифр $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (0 или 1) в поступившем на вход коде. Причем имеет место однозначное соответствие между двоичным n -разрядным кодом и 2^{n-1} уровнями величины i_Σ .

Таким образом, на вход ЦАП поступает код x_{n-1}, \dots, x_1, x_0 (если старший разряд помещен в начале, а младший — в конце кодовой комбинации), а выходным сигналом является уровень тока i_Σ , определяемый соотношением (20.3).

20.2.2. Структурные составляющие цифро-аналогового преобразователя

Для реализации соотношения (20.3) преобразователь должен содержать:

- а) устройство, обеспечивающее набор двоично-взвешенных токов;
- б) суммирующее устройство;
- в) набор ключей, подключающих источники двоично-взвешенных токов на вход суммирующего устройства, если в цифровом коде на месте того или иного разряда стоит «единица».

Формирование двоично-взвешенных токов осуществляется при помощи последовательно-параллельных резистивных схем, называемых **матрицами**. Чаще всего применяются два варианта резистивных матриц:

- 1) построенные из прецизионных резисторов с двоично-взвешенными номиналами;
- 2) содержащие прецизионные резисторы двух номиналов R и $2R$ (матрицы $R-2R$).

В качестве суммирующего устройства обычно используется схема на ОУ (рис. 20.6).

Поясним ее работу. ОУ в цепи на рис. 20.6 охвачен отрицательной ОС при помощи резистора R_{OC} , соединяющего выход ОУ с инвертирующим входом. Токи, подлежащие суммированию, подаются на инвертирующий вход ОУ, а не инвертирующий вход соединен с общей точкой O . ОУ работает в линейном режиме, т.е. на линейном участке его передаточной харак-

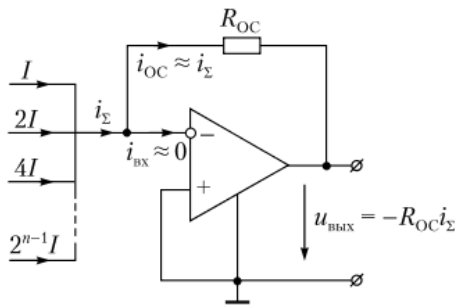


Рис. 20.6. Схема суммирования токов на ОУ

теристики, где его свойства близки к идеальным. Поэтому подтекающий к инвертирующему зажиму ток i_{Σ} замыкается практически полностью через резистор R_{OC} .

По второму закону Кирхгофа для контура, включающего в себя выход ОУ, R_{OC} и дифференциальный вход ОУ, справедливо уравнение

$$u_{\text{вых}} + i_{\Sigma} R_{OC} = 0. \quad (20.4)$$

По причине идеальности ОУ в уравнении (20.4) напряжение на его дифференциальном входе принято близким к нулю. Поэтому из уравнения (20.4) следует, что

$$u_{\text{вых}} = -i_{\Sigma} R_{OC}, \quad (20.5)$$

т.е. выходное напряжение пропорционально сумме токов, подтекающих к инвертирующему входу ОУ.

20.2.3. Цифро-аналоговый преобразователь с двоично-взвешенной резистивной матрицей

На рис. 20.7 показана схема резистивной матрицы, содержащей n параллельно включенных резисторов с номинальными сопротивлениями $R, 2R, \dots, 2^{n-1}R$. К ее входу подключен источник опорного напряжения $U_{\text{оп}}$. Ток, отбираемый от источника $U_{\text{оп}}$ в цепи на рис. 20.7, равен

$$i = \frac{U_{\text{оп}}}{R} + \frac{U_{\text{оп}}}{2R} + \dots + \frac{U_{\text{оп}}}{2^{n-1}R}.$$

Если ток, протекающий в резисторе $2^{n-1}R$ обозначить I , то токи в ветвях цепи на рис. 20.7 образуют двоично-взвешенную последовательность $2^{n-1}I, 2^{n-2}I, \dots, 4I, 2I, I$.

Ток I (см. рис. 20.7) определяет собой вес (в амперах) «единицы» младшего разряда двоичного кода. Ток $2^{n-1}I$, который протекает в резисторе R , равен весу «единицы» старшего разряда.

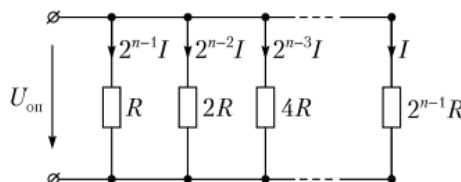


Рис. 20.7. Двоично-взвешенная резистивная матрица

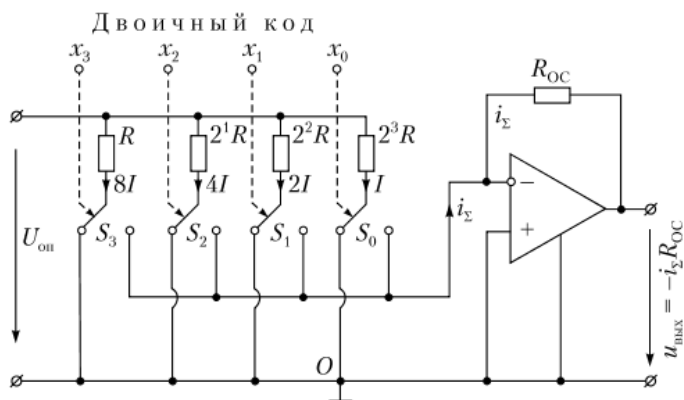


Рис. 20.8. ЦАП с двоично-взвешенной резистивной матрицей

Резистивная матрица (см. рис. 20.7) является составной частью ЦАП, структурная схема которого показана на рис. 20.8. Для большей наглядности количество разрядов преобразуемого двоичного кода взято равным четырем. Поэтому резистивная матрица включает четыре резистора: R , $2R$, $4R$ и $8R$. Верхние концы резисторов соединены с «плюсом» источника опорного напряжения $U_{\text{он}}$. Нижний конец каждого из резисторов в зависимости от значения цифры (1 или же 0), записанной в разряде управляющего кода, через «свой» ключ (S_0 , S_1 , S_2 или S_3) может быть подключен:

- к инвертирующему входу ОУ, если записана «1»;
- к общей шине с нулевым потенциалом, если записан «0».

Причем ключ S_0 управляет младшим разрядом входного кода, а S_3 — старшим.

Поскольку напряжение на дифференциальном входе ОУ близко к нулю, то потенциал нижних концов резисторов матрицы равен нулю независимо от положения каждого из ключей. Другими словами, токи в элементах двоично-взвешенной матрицы (см. рис. 20.7), как и в цепи на рис. 20.6, являются двоично-взвешенным рядом.

Суммарный ток i_{Σ} , подаваемый на вход ОУ, а следовательно, и напряжение на выходе ЦАП, определяемое формулой (20.5), пропорциональны десятичному эквиваленту преобразуемого двоичного кода.

20.2.4. Цифро-аналоговые преобразователи с матрицей $R-2R$

К недостаткам двоично-взвешенной матрицы относится большой диапазон сопротивлений используемых резисторов: от R до $2^{n-1}R$. При большом числе разрядов возникают сложности в исполнении такой матрицы, особенно при интегральной технологии.

Матрица $R-2R$, показанная на рис. 20.9, содержит элементы только двух номиналов: R и $2R$, чем выгодно отличается от двоично-взвешенной матрицы.

Главной структурной особенностью матрицы $R-2R$ является следующее свойство: независимо от числа звеньев входное сопротивление пассивного двухполюсника, подключенного параллельно любому из поперечных резисторов $2R$, равно $2R$. По этой причине ток, подтекающий со стороны источника опорного напряжения $U_{\text{он}}$, делится пополам между резистором $2R$

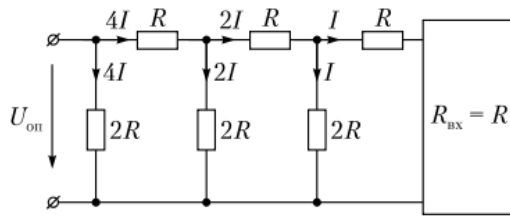


Рис. 20.9. Резистивная матрица $R - 2R$

и параллельным ему пассивным двухполюсником. Токи в резисторах $2R$ образуют двоично-взвешенный ряд.

Размер матрицы $R - 2R$ вправо неограничен, зависит от заданного количества разрядов n . Пассивный двухполюсник справа, изображенный на рис. 20.9 прямоугольником, является продолжением показанной слева структуры. Его входное сопротивление независимо от количества повторяющихся звеньев равно R .

В случае трехразрядного преобразователя ($n = 3$) необходимый двоично-взвешенный ряд токов содержит составляющие $I, 2I, 4I$. Тогда вместо пассивного двухполюсника на рис. 20.9 можно включить резистор R .

На рис. 20.10 изображена структурная схема четырехразрядного ЦАП, в котором двоично-взвешенный набор токов получается при помощи матрицы $R - 2R$. По отношению к источнику опорного напряжения матрица обладает входным сопротивлением R . От источника опорного напряжения $U_{оп}$ отбирается ток $i = U_{оп}/R$. Вес в амперах старшего разряда равен $i/2$, а вес младшего разряда — $i/2^n$.

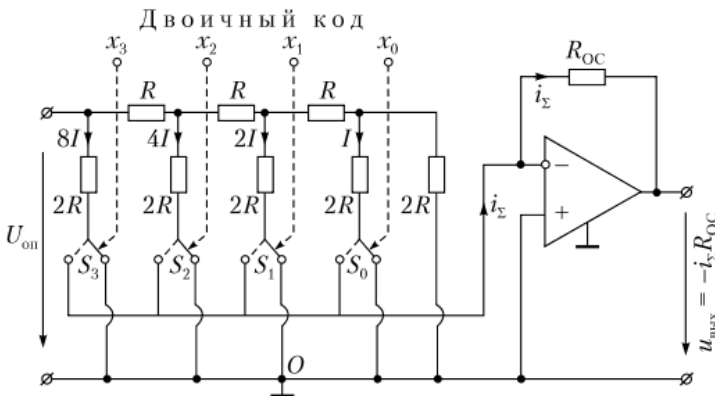


Рис. 20.10. Четырехразрядный ЦАП с матрицей $R - 2R$

Основной принцип работы данного ЦАП тот же, что и для преобразователя, рассмотренного в подпараграфе 20.2.3 (см. рис. 20.8). Его структурные составляющие (резистивная матрица, совокупность ключей, управляемых входным цифровым кодом, суммирующий ОУ) выполняют те же функции.

20.3. Дешифраторы

Дешифратор (рис. 20.11) — цифровое устройство комбинационного класса, имеющее n входов, на которые подается n -разрядный двоичный код $(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$, и 2^n выходов $(y_{2^n-1}, y_{2^n-2}, \dots, y_1, y_0)$.

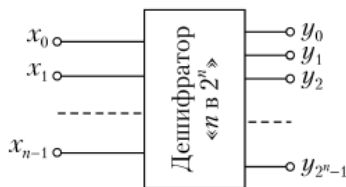


Рис. 20.11. Дешифратор с n входами и 2^n выходами

Напомним, что $2^n = N$ — количество ситуаций, которые могут быть изображены при помощи n -разрядного двоичного кода. Например, двухразрядному двоичному коду соответствуют четыре различные кодовые комбинации на входе: 00; 01; 10; 11. Каждой из записанных входных кодовых комбинаций должно соответствовать свое, отличное от других, состояние на выходе, определяемое совокупностью значений y_0, y_1, y_2, y_3 .

Условимся о следующем соответствии кодовых комбинаций на входе и выходе дешифратора (табл. 20.1).

Таблица 20.1

Соответствие кодовых комбинаций

Кодовая комбинация на входе (x_1, x_0)	Кодовая комбинация на выходе (y_0, y_1, y_2, y_3)
00	$y_0 = 1; y_1 = y_2 = y_3 = 0$
01	$y_1 = 1; y_0 = y_2 = y_3 = 0$
10	$y_2 = 1; y_0 = y_1 = y_3 = 0$
11	$y_3 = 1; y_0 = y_1 = y_2 = 0$

Несложно заметить, что согласно принятому в табл. 20.1 соответствию в выходном коде y_0, y_1, y_2, y_3 присутствует только одна «единица», а остальные позиции представлены «нулем». Это признак унитарного кода «1 из N ». Следовательно, дешифратор преобразует двоичный код в унитарный.

Получим уравнение, связывающее логическую функцию на выходе дешифратора с логическими входными переменными, на примере двухразрядного дешифратора на рис. 20.12, а, условное обозначение которого показано на рис. 20.12, б.

Примем во внимание следующие соображения.

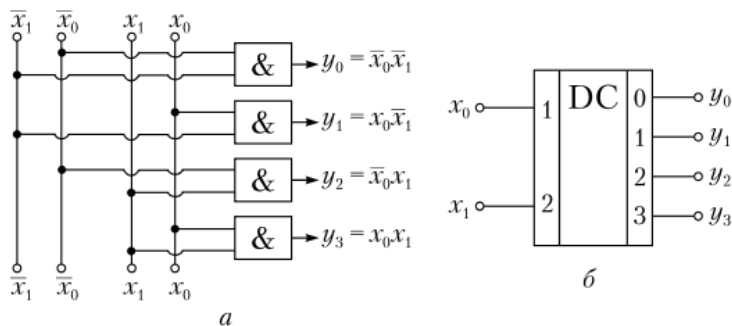


Рис. 20.12. Дешифратор на два входа и четыре выхода:

а — реализация на логических элементах-конъюнкторах;

б — условное обозначение (DC — decoder)

1. Согласно табл. 20.1 ситуация $y_0 = 1$ возникает при $x_0 = 0, x_1 = 0$. Это равносильно приравниванию «1» инверсии обеих переменных: $\bar{x}_0 = 1, \bar{x}_1 = 1$. Тогда состояние на выходе $y_0 = 1$ можно трактовать как логическое произведение величин \bar{x}_0, \bar{x}_1 , а именно:

$$y_0 = \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1. \quad (20.6)$$

Действительно, произведение двух логических переменных равно «единице» только тогда, когда оба сомножителя равны «единице».

2. Ситуация $y_1 = 1$ имеет место, когда $x_0 = 1, x_1 = 0$, или же $x_0 = 1, \bar{x}_1 = 1$. Тогда «единицу» на выходе y_1 можно считать результатом логического умножения переменных x_0 и \bar{x}_1 :

$$y_1 = x_0 \cdot \bar{x}_1. \quad (20.7)$$

3. Рассуждая аналогично, получаем

$$y_2 = \bar{x}_0 \cdot x_1; \quad (20.8)$$

$$y_3 = x_0 \cdot x_1. \quad (20.9)$$

Соотношения (20.6)–(20.9) реализуются схемой дешифратора на рис. 20.12, а, содержащей четыре конъюнктора (каждый на два входа), выполняющих операции логического умножения. На рис. 20.12, а не показаны два инвертора, необходимые для получения инверсного входного кода \bar{x}_1, \bar{x}_0 .

Дешифраторы могут использоваться как для распознавания заданного двоичным числом адреса, так и для преобразования двоичного кода в десятичный.

20.4. Шифраторы

Шифраторы — цифровые устройства, преобразующие унитарный код «1 из N » в двоичный. Они имеют $2^n = N$ входов и n выходов (рис. 20.13).

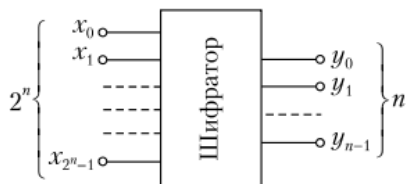


Рис. 20.13. Шифратор с 2^n входами и n выходами

Только на один из 2^n входов шифратора подается возбуждающий сигнал. Обозначим его условно x_i , где индекс « i » может принимать значение от 0 до $2^n - 1$ и его можно считать десятичным порядковым номером входа. В этом случае шифратор выступает как преобразователь десятичного кода в двоичный.

Строятся шифраторы на логических элементах. Рассмотрим основные принципы синтеза данного цифрового устройства на примере шифратора, имеющего восемь входов и три выхода ($2^n = 2^3 = 8; n = 3$). Все восемь различных состояний на входе и выходе заданного шифратора изображены в табл. 20.2.

Напомним, что таблица вида 20.2 называется таблицей переключений или таблицей истинности. В ее первом (левом) столбце помещены порядковые номера входов шифратора. В остальных трех столбцах записаны соответствующие каждому номеру входа цифры разрядов выходного двоич-

Состояния на входе и выходе шифратора

Десятичный номер входа x_i	Разряды двоичного кода		
	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

ного кода (0 или 1). В столбце y_0 представлены цифры младшего разряда, а в столбце y_2 — старшего.

Содержание табл. 20.2 позволяет выявить следующее характерное для 8-входового шифратора свойство. «Единица» в каждом из разрядов присутствует в четырех разных ситуациях на входе, т.е. при воздействии возбуждающего сигнала на четыре разных входа, а именно:

а) «единица» в младшем разряде y_0 появляется при возбуждении либо входа x_1 , либо x_3 , либо x_5 , либо x_7 . Этому результату соответствует логическое уравнение

$$y_0 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7; \quad (20.10)$$

б) «единица» в среднем разряде y_1 присутствует при подаче сигнала на входы x_2, x_3, x_6, x_7 , т.е.

$$y_1 = x_2 + x_3 + x_6 + x_7; \quad (20.11)$$

в) в старшем разряде y_2 «единицу» получим при возбуждении входов x_4, x_5, x_6, x_7 , поэтому

$$y_2 = x_4 + x_5 + x_6 + x_7. \quad (20.12)$$

Соотношения (20.10)–(20.12) реализуются элементами, выполняющими логическое сложение четырех логических переменных, т.е. схемами «ИЛИ» (дизъюнкторами).

Структурная схема 8-входового шифратора представлена на рис. 20.14, а. Обратим внимание на то, что при подаче возбуждающего сигнала на вход x_0 на выходе имеем двоичный код 000. Такое же состояние получаем при равенстве нулю всех остальных сигналов на входе — $x_1 = x_2 = \dots = x_7 = 0$. Поэтому вход x_0 остался незадействованным.

На рис. 20.14, б показано условное изображение рассматриваемого функционального узла. Буквы *CD*, присутствующие на условном изображении (графическом обозначении) шифратора, являются сокращением английского термина *coder* (шифратор).

При синтезе шифраторов с другим количеством входов составляется соответствующая таблица переключений, а по ней — логические уравнения, связывающие выходные величины с состоянием на входе. Очевидно, что при реализации шифраторов с более высокой разрядностью потребуется большее число логических элементов.

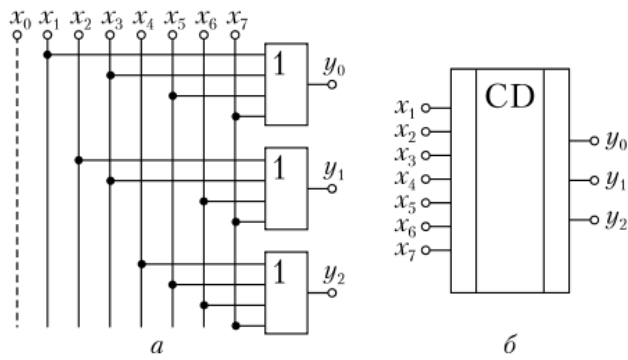


Рис. 20.14. Шифратор с восемью входами и тремя выходами:
a – структурная схема; *б* – условное изображение

20.5. Мультиплексоры

Мультиплексором называется цифровое устройство комбинационного класса, имеющее 2^n информационных входов ($x_0, x_1, \dots, x_{2^n-1}$); n адресных входов (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}); один выходной канал (y). Его функция состоит в подключении выхода y к одному из 2^n информационных входов в соответствии с его адресом, заданным n -разрядным двоичным кодом.

На рис. 20.15 приведена структурная схема мультиплексора на четыре информационных входа ($2^n = 4$) и два адресных входа (a_0, a_1). Расшифровка адреса подключаемого информационного входа выполняется дешифратором. Каждой из возможных кодовых комбинаций на входе дешифратора a_1, a_0 (00; 01; 10; 11) соответствует «единица» на одном из четырех его выходов, обозначенных A_0, A_1, A_2, A_3 , например, как показано в табл. 20.3.

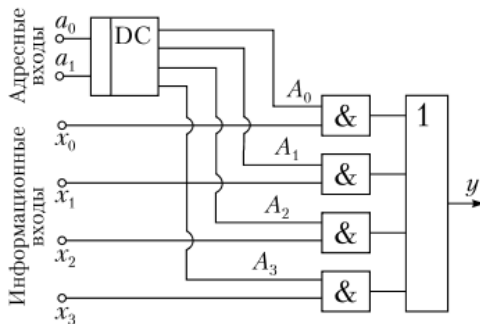


Рис. 20.15. Мультиплексор на четыре информационных входа

Таблица 20.3

Пример соответствия входов и выходов

Двоичный код на адресном входе дешифратора (a_1, a_0)	Возбужденный выход дешифратора
00	$A_0 = 1$
01	$A_1 = 1$
10	$A_2 = 1$
11	$A_3 = 1$

Кроме дешифратора, мультиплексор на рис. 20.15 включает четыре конъюнктора (схема логического умножения «И»). Нижний вход каждого из конъюнкторов (&) соединен с одним из информационных входов (x_0, x_1, x_2, x_3), а верхний — с соответствующим заданному адресу a_1, a_0 выходом дешифратора (A_0, A_1, A_2, A_3).

Таким образом, нижние входы конъюнкторов можно назвать информационными, а верхние — адресными. Информационный сигнал появляется на выходе конъюнктора (&) только при наличии «единицы» на его адресном входе.

Сигналы с выхода всех конъюнкторов подаются на схему логического суммирования «ИЛИ» (дизъюнктор). В этой сумме только одно из четырех слагаемых отлично от «0». Следовательно, в выходной канал y поступает сигнал только с одного из 2^n информационных входов, адрес которого (a_1, a_0) поступил на дешифратор.

20.6. Демультимплексоры

Демультимплексором (распределителем) называется комбинационное цифровое устройство, выполняющее функции, обратные мультиплексору. Демультимплексор осуществляет соединение единственного информационного канала с одним из 2^n выходных каналов в соответствии с его адресом. В его состав входит дешифратор с n адресными входами, на которые поступает двоичный код (n -разрядный) заданного «адресата» (выходного канала).

На рис. 20.16 приведена структурная схема демультимплексора на четыре информационных выхода, условно обозначенных как y_0, y_1, y_2, y_3 .

Адресы выходных информационных каналов, представленные двухразрядным двоичным кодом a_0, a_1 ($2^n = 4; n = 2$), подаются на дешифратор ($DC - decoder$). Сигналы с четырех выходов дешифратора поступают на нижние (адресные) входы четырех конъюнкторов (&). При этом на верхние входы всех конъюнкторов подан информационный сигнал x . «Единица», появляющаяся на адресном входе одного из конъюнкторов, позволяет информации x пройти только в выходной канал, подключенный к данному конъюнктору.

В инженерной практике возникает задача увеличения числа выходных каналов по сравнению с тем, которое обеспечивается имеющимися в наличии микросхемами демультимплексоров. В этом случае результирующая схема демультимплексора с требуемым числом информационных выходов может быть построена путем комбинации нескольких функциональных узлов.

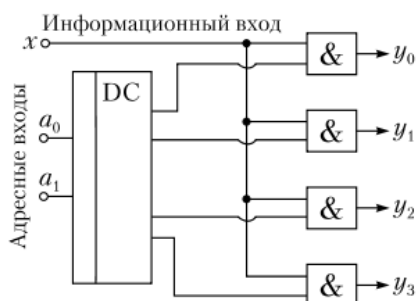


Рис. 20.16. Структурная схема демультимплексора на четыре выхода

20.7. Одноразрядные двоичные сумматоры

Как известно, сложение двух чисел, представленных позиционным кодом, как в десятичной, так и в двоичной системах счисления осуществляется поразрядно. Поэтому структурной единицей любого сумматора является одноразрядный сумматор, выполняющий арифметическое сложение цифр одноименных разрядов.

Напомним, что результат сложения двух одноразрядных двоичных чисел в общем случае является числом двухразрядным. По этой причине полный двоичный одноразрядный сумматор имеет два выхода и три входа. Его условное изображение дано на рис. 20.17, *а*. На входы a_i и b_i подаются числа, подлежащие сложению, а на вход p_i — цифра, поступающая из предыдущего, более младшего ($i - 1$)-го разряда при выполнении там операции сложения.

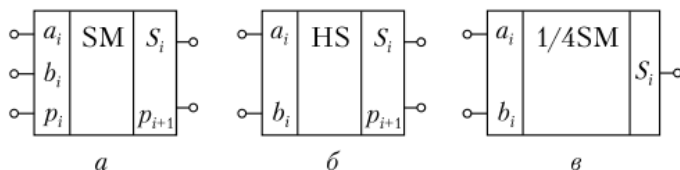


Рис. 20.17. Разновидности сумматоров (условные графические обозначения):

а — полный двоичный одноразрядный сумматор; *б* — полусумматор; *в* — четвертьсумматор

Таким образом, одноразрядный сумматор складывает три цифры: a_i , b_i , p_i .

Выход S_i предназначен для записи цифры i -го разряда суммы ($a_i + b_i + p_i$), а выход p_{i+1} — для записи цифры ($i + 1$)-го разряда этой же суммы.

Промышленностью выпускаются также упрощенные варианты одноразрядных двоичных сумматоров, называемые полусумматорами и четвертьсумматорами [1, 2].

Полусумматор, в отличие от полного сумматора, не содержит входа p_i , т.е. выполняет суммирование двух чисел без учета результата сложения в предыдущем разряде. Он работает по правилам сложения в самом младшем разряде.

В схеме четвертьсумматора исключены вход p_i и выход p_{i+1} . На единственном выходе четвертьсумматора записывается только цифра младшего (i -го) разряда суммы ($a_i + b_i$).

На рис. 20.17, *б*, *в* приведены условные графические обозначения полусумматора и четвертьсумматора.

Рассматриваемые функциональные узлы строятся из простейших логических элементов. Методика получения структурной схемы одноразрядного сумматора любой его разновидности традиционна, т.е. включает в себя:

а) составление таблицы всех возможных состояний на входе и выходе устройства, т.е. таблицы истинности;

б) запись по составленной таблице алгебраического выражения (логического), связывающего выходную величину с входными;

в) минимизацию (при необходимости) записанного логического уравнения;

г) переход от логического уравнения к структурной схеме.

Пользуясь данной методикой, получим структурные схемы, реализующие названные разновидности одноразрядного двоичного сумматора. Нач-

нем с полусумматора, учитывая, что структура четвертьсумматора может быть получена как его следствие.

Структурная реализация двоичного полусумматора. Все возможные состояния полусумматора представлены в таблице истинности (табл. 20.4). Она дает связь выходных величин S_i и p_{i+1} с входными — a_i и b_i .

Таблица 20.4

Состояния полусумматора

№ строки	a_i	b_i	S_i	p_{i+1}
1	0	0	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	0
4	1	1	0	1

Пользуясь табл. 20.4, получим алгебраические выражения функций $S_i(a_i, b_i)$ и $p_{i+1}(a_i, b_i)$, например, в совершенной дизъюнктивной нормальной форме — СДНФ. Методика перехода от таблицы истинности к алгебраическому уравнению в СДНФ подробно рассмотрена в параграфе 18.3. Согласно ей выделяем в табл. 20.4 строки, где $S_i = 1$. Это строки 2 и 3. Для каждой выделенной строки записываем логическое произведение из «представителей» набора аргументов a_i, b_i (т.е. либо в не инвертированном виде, либо в виде инверсии):

- строка 2: $a_i \cdot \bar{b}_i$ (b_i в данном наборе равно нулю);
- строка 3: $\bar{a}_i \cdot b_i$ (a_i в этом наборе равно нулю).

Складываем записанные логические произведения и приходим к искомой СДНФ:

$$S_i(a_i, b_i) = a_i \bar{b}_i + \bar{a}_i b_i \tag{20.13}$$

Аналогично по той же методике для p_{i+1} из строки 4 табл. 20.4 получаем

$$p_{i+1} = a_i b_i \tag{20.14}$$

Соотношения (20.13) и (20.14) позволяют построить полусумматор из трех элементов — конъюнкторов (&), выполняющих операции логического умножения «И» ($a_i \bar{b}_i, \bar{a}_i b_i, a_i b_i$), и одного дизъюнктора для получения логической суммы («ИЛИ»). Эта реализация показана на рис. 20.18, а.

Очевидно, что для построения четвертьсумматора (рис. 20.18, б) достаточно соотношения (20.13).

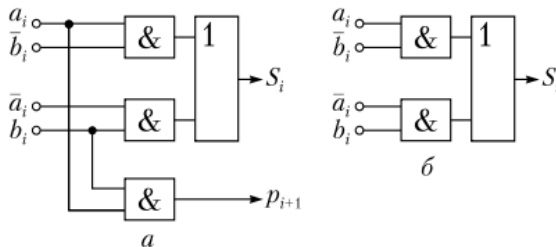


Рис. 20.18. Структурные схемы полусумматора (а) и четвертьсумматора (б)

Структурная реализация полного одноразрядного двоичного сумматора. В табл. 20.5 занесены состояния выходов двоичного одноразрядного сумматора S_i и p_{i+1} , соответствующие всем возможным ситуациям на его входе.

Таблица 20.5

Состояния полного сумматора

p_i	a_i	b_i	S_i	p_{i+1}
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Согласно табл. 20.5 СДНФ функций $S_i(p_i, a_i, b_i)$ и $p_{i+1}(p_i, a_i, b_i)$ имеют следующий вид:

$$S_i = \bar{p}_i a_i \bar{b}_i + \bar{p}_i \bar{a}_i b_i + p_i \bar{a}_i \bar{b}_i + p_i a_i b_i; \quad (20.15)$$

$$p_{i+1} = p_i a_i b_i + p_i a_i \bar{b}_i + p_i \bar{a}_i b_i + \bar{p}_i a_i b_i. \quad (20.16)$$

Непосредственное использование соотношений (20.15) и (20.16) при построении сумматора нерационально, так как каждой из функций $S_i(p_i, a_i, b_i)$ и $p_{i+1}(p_i, a_i, b_i)$ потребуется четыре трехвыходовых конъюнктора («И») и один дизъюнктор («ИЛИ») на четыре входа. Поэтому целесообразна предварительная минимизация выражений (20.15) и (20.16). Например, несложные преобразования с использованием приема повторения слагаемого в логической сумме (20.16), а также логического тождества $x + \bar{x} = 1$ приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i a_i b_i + p_i a_i \bar{b}_i + p_i a_i b_i + p_i \bar{a}_i b_i + p_i a_i \bar{b}_i + \bar{p}_i a_i b_i = \\ &= a_i b_i (p_i + \bar{p}_i) + p_i a_i (b_i + \bar{b}_i) + p_i b_i (a_i + \bar{a}_i) = a_i b_i + p_i a_i + p_i b_i. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Уравнение (20.17) существенно проще уравнения (20.16).

Логическую функцию (20.15) также можно привести к более простому виду:

$$S_i = \bar{p}_{i+1} a_i + \bar{p}_{i+1} b_i + \bar{p}_{i+1} p_i + a_i b_i p_i. \quad (20.18)$$

На рис. 20.19, а изображена структурная схема одноразрядного двоичного сумматора, построенная по формулам (20.17) и (20.18). Используемые конъюнкторы (&), за исключением одного, являются двухвыходовыми. Схема на рис. 20.19, а также содержит еще и два дизъюнктора — на три и четыре входа.

Полный одноразрядный двоичный сумматор можно построить и на двух полусумматорах. На рис. 20.19, б показан один из вариантов такой реализации. Многоразрядные сумматоры строятся на основе одноразрядных.

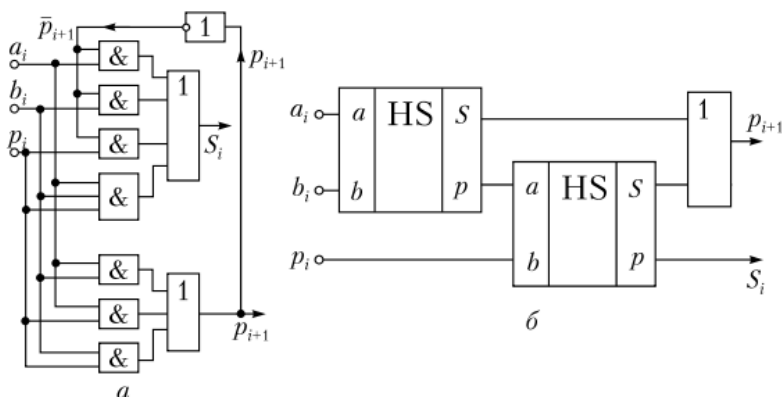


Рис. 20.19. Структурная схема полного одноразрядного двоичного сумматора (а) и его реализация на двух полусумматорах (б)

Контрольные вопросы и задания

1. По какому признаку устройство принадлежит к классу комбинационных? На каких элементах строятся комбинационные устройства?
2. Какие функции возлагаются на аналого-цифровой преобразователь (АЦП)?
3. Назовите основные операции, необходимые для перехода от непрерывной функции к ее цифровому эквиваленту.
4. Какую операцию называют дискретизацией по времени?
5. Что такое квантование по уровню? От чего зависит шаг квантования?
6. Что понимается под операцией кодирования уровня сигнала? Каковы способы распознавания уровня кодируемого сигнала?
7. Поясните принцип действия АЦП последовательного счета, пользуясь структурной схемой на рис. 20.4.
8. Поясните функции элементов АЦП параллельного типа, структурная схема которого приведена на рис. 20.5. Сравните по быстродействию АЦП на рис. 20.5 и 20.4.
9. Какие функции выполняет цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)? Какой вид имеют сигналы на входе и выходе ЦАП?
10. Какая последовательность величин (токов или напряжений) называется двоично-взвешенной?
11. Запишите десятичный эквивалент двоичного числа 101101.
12. Назовите основные структурные составляющие ЦАП.
13. Приведите схемные решения формирования двоично-взвешенной последовательности токов. Нарисуйте схемы резистивных матриц: а) двоично-взвешенной; б) $R-2R$.
14. Пользуясь условиями идеальности ОУ (см. параграф 14.1), покажите, что схема на рис. 20.6 выполняет суммирование поступающих на ее вход токов.
15. Поясните работу ЦАП, структурные схемы которых приведены на рис. 20.8 и 20.10.
16. Какие функции возлагаются на дешифратор? Сколько выходов имеет дешифратор с двумя входами?
17. Запишите логические функции, выполняемые каждым из конъюнкторов дешифратора на рис. 20.12, а.
18. Какую функцию выполняет шифратор? Сколько выходов имеет шифратор с четырьмя входами?
19. Поясните назначение дизъюнкторов в схеме шифратора на рис. 20.14. Запишите выражения выполняемых ими логических функций.

20. Дайте определение мультиплексору и демультиплексору. Поясните их работу на примере схем на рис. 20.15 и 20.16.

21. Какие функции выполняет одноразрядный полный сумматор?

22. Чем отличаются от полного одноразрядного сумматора устройства, называемые: а) полусумматор; б) четвертьсумматор?

23. Постройте таблицу истинности четвертьсумматора. Пользуясь составленной таблицей, запишите алгебраическое выражение функции, выполняемой этим устройством.

24. Постройте структурную схему устройства, реализующего логическую функцию $S(x_1, x_2) = x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$.

Глава 21

ЦИФРОВЫЕ УСТРОЙСТВА С ПАМЯТЬЮ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- основные узлы цифровых устройств последовательностного типа (содержащих элементы памяти) и их назначение;
- принципы построения триггеров, счетчиков, регистров, запоминающих устройств, микропроцессоров;

уметь

- формулировать требования к параметрам используемых цифровых блоков последовательностного вида, удовлетворяющих условиям поставленной задачи;

владеть

- методикой выбора необходимых функциональных узлов для построения цифровых устройств с памятью.
-

Главной особенностью цифрового устройства, обладающего памятью, является зависимость его реакции не только на воздействие, поступившее на его вход в данный момент времени (точнее, в течение текущего такта), но и от состояния входов на временном интервале конечной длительности, предшествующем рассматриваемому. Как уже упоминалось, устройства с памятью называются последовательностными (не путать с термином «последовательные»). Другое их наименование — **конечные автоматы**.

В данной главе рассматриваются принципы построения основных функциональных узлов, которые наряду с логическими элементами обязательно включают в себя **элементы памяти** и наиболее часто (и в больших количествах) используются при создании цифровых устройств. Качество и надежность последовательностного цифрового устройства в целом в значительной степени зависят от качества и надежности применяемых элементов памяти.

Среди существующих полупроводниковых элементов, способных хранить (запоминать) информацию, широкое распространение получили триггеры. Они обладают высокой надежностью и способны хранить один бит информации («0» или «1») практически неограниченное время.

21.1. Триггеры

Триггером называется устройство, имеющее два устойчивых состояния. Такие устройства принято называть **бистабильными**. В каждом из устойчивых состояний триггер может находиться сколь угодно долго, пока отсутствует управляющий сигнал, способный его изменить. Первоначально схемы,

обладающие бистабильными свойствами, изготавливались на электронных лампах, а затем на полупроводниковых триодах — транзисторах. В настоящее время триггерные схемы выполняются на полупроводниковых транзисторах (как биполярных, так и полевых), а также на универсальных логических элементах. Один из вариантов схемы триггера на биполярных транзисторах был рассмотрен в параграфе 16.5.

Триггеры, реализованные на логических схемах, являются базовыми элементами современной цифровой техники. Разработано много их разновидностей, отличающихся как по функциональным возможностям, так и по структуре. Рассмотрим особенности построения наиболее часто применяемых в инженерной практике триггеров.

21.1.1. Асинхронные RS-триггеры

На рис. 21.1, *a* изображен четырехполюсник, содержащий два логических элемента «ИЛИ-НЕ», каждый на два входа. Главной особенностью данной схемы является наличие двух ветвей обратной связи, благодаря которым сигнал с выхода одного элемента подается на один из входов второго и наоборот. Остальные два входа элементов «ИЛИ-НЕ» соединены с внешними (входными) зажимами устройства, обозначенными R (*reset* — сброс) и S (*set* — установка).

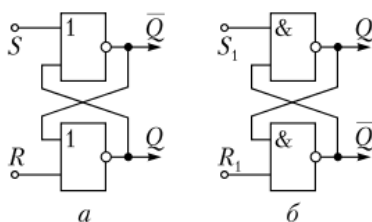


Рис. 21.1. Асинхронный RS-триггер:

a — на элементах «ИЛИ-НЕ»; *б* — на элементах «И-НЕ»

Выходы схем «ИЛИ-НЕ» соединены с парой выходных зажимов триггера Q и \bar{Q} . Такое обозначение следует из функциональных свойств данной структуры. Как будет показано, ее выходы могут находиться только во взаимно-инверсных состояниях.

Рассмотрим все логические ситуации, возможные для схемы на рис. 21.1, *a*, и составим для нее таблицу истинности. При этом учитываем, что на входы верхнего элемента воздействуют сигналы S и Q , а нижнего — R и \bar{Q} . Напомним, что логическая функция каждого из элементов «ИЛИ-НЕ» определяется выражением $y = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$.

1. При $S = 1$ и $R = 0$ на один из входов верхнего элемента (см. рис. 21.1, *a*) по условию воздействует «единица», а на второй его вход — сигнал Q . В принятых обозначениях можно записать $\bar{Q} = Q + 1 = \bar{1} = 0$.

В этой же ситуации на вход нижнего элемента схемы воздействуют два сигнала: $R = 0$ и $\bar{Q} = 0$ (в соответствии с рис. 21.1, *a*). Поэтому $Q = R + \bar{Q} = 0 + 0 = 1$.

2. При $S = 0$ и $R = 1$ имеем ситуацию, аналогичную первой, с той разницей, что элементы «ИЛИ-НЕ» меняются местами. Выходные сигналы равны: $Q = 0$; $\bar{Q} = 1$.

3. Если $S = 0$ и $R = 0$, то величины сигналов на выходах Q и \bar{Q} зависят от их предыдущего состояния. Покажем это.

а) $Q = 1, \bar{Q} = 0$. На входе нижнего элемента воздействуют два «нуля», которые однозначно определяют величину сигнала на его выходе: $\bar{Q} = \overline{0 + 0} = 1$. Следовательно, с выхода верхнего элемента снимаем сигнал $\bar{Q} = S + \bar{Q} = \overline{0 + 1} = \bar{1} = 0$.

б) $Q = 0, \bar{Q} = 1$. Два «нуля» на входе верхнего элемента «ИЛИ-НЕ» обеспечивают «единичное» значение: $\bar{Q} = \overline{0 + 0} = 1$. Поэтому $Q = R + \bar{Q} = \overline{0 + 1} = 0$.

Таким образом, при $S = 0$ и $R = 0$ в схеме на рис. 21.1, а сохраняется предыдущее состояние выходов.

4. Воздействие одновременно двух «единиц» на входах не допускается, так как в этом случае возникает режим так называемых гонок, в результате которых может установиться любое из взаимно-инверсных состояний на выходе, зависящее от случайных факторов.

Отметим наиболее характерные свойства схемы рассматриваемого RS -триггера.

1. Наличие двух устойчивых состояний на ее входе: а) $Q = 1, \bar{Q} = 0$; б) $Q = 0, \bar{Q} = 1$. Благодаря обратной связи состояние на выходе одного элемента обеспечивает и поддерживает инверсное состояние на втором выходе.

2. Для цепи на рис. 21.1, а «единица» на выходе Q как бы повторяет «единичное» воздействие на входе S , т.е. $Q = 1$ при $S = 1$; аналогично реакция $\bar{Q} = 1$ повторяет воздействие $R = 1$.

Очень важно, что любое из полученных состояний сохраняется после окончания «единичного» воздействия. Схема «запоминает» приобретенное ей состояние и хранит его до прихода «единицы» на вход того элемента, где в момент установления предыдущего режима был «нуль». Все отмеченные свойства схемы триггера на элементах «ИЛИ-НЕ» отражены в таблице истинности (табл. 21.1).

Таблица 21.1

Таблица переключений (истинности) RS -триггера на элементах «ИЛИ-НЕ»

S	R	Q	\bar{Q}
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	Сохраняется предыдущее состояние	
1	1	Запрещено	

На рис. 21.1, б показана схема асинхронного RS -триггера, реализованного на базисных логических элементах «И-НЕ». Его входы обозначены S_1 и R_1 , а выходы — Q и \bar{Q} . Соответствующая таблица истинности для схемы на рис. 21.1, б может быть получена из очевидных соотношений

$$Q = \overline{S_1 \cdot \bar{Q}}; \quad \bar{Q} = \overline{R_1 \cdot Q}.$$

Для различных ситуаций на входе цепи на рис. 21.1, б из этих соотношений следует:

1) при $S_1 = 1$ и $R_1 = 0$ $\bar{Q} = \overline{0 \cdot Q} = \bar{0} = 1$; $Q = \overline{S_1 \cdot \bar{Q}} = \overline{1 \cdot 1} = \bar{1} = 0$;

2) при $S_1 = 0$ и $R_1 = 1$ $\bar{Q} = \overline{1 \cdot 1} = \bar{1} = 0$; $Q = \overline{S_1 \cdot \bar{Q}} = \overline{0 \cdot 0} = \bar{0} = 1$;

3) при $S_1 = 1$ и $R_1 = 1$ сохраняется ранее достигнутое состояние. Действительно:

а) допустим, что в состоянии, предшествующем воздействию ($S_1 = 1$ и $R_1 = 1$), $Q = 1$, $\bar{Q} = 0$. В этом случае сигнал $\bar{Q} = 0$, будучи поданным на вход верхнего элемента «И-НЕ» схемы на рис. 21.1, б, однозначно обеспечивает на выходе этого элемента «1», т.е. $Q = 1$. Две «единицы» на входе нижней схемы «И-НЕ» обуславливают на его выходе «0», т.е. $\bar{Q} = 0$;

б) точно так же поддерживается режим $Q = 0$, $\bar{Q} = 1$.

4. Для рассматриваемого триггера, собранного на элементах «И-НЕ», воздействие двух «нулей» на входе не позволяет определить однозначно состояние на входах. Поэтому оно запрещено.

Полученные результаты представлены в табл. 21.2. Обратим внимание, что согласно табл. 21.2 триггер на базисных элементах «И-НЕ» инвертирует входное воздействие, т.е. $Q = \bar{S}_1$. По этой причине обоснованными являются обозначения $S_1 = \bar{S}$ и $R_1 = \bar{R}$. Если на входы S_1 и R_1 триггера на рис. 21.1, б включить два инвертора, то приходим к схеме на рис. 21.2, которая не инвертирует сигналы, поданные на ее входы S и R , а именно: $Q = S$ и $\bar{Q} = R$.

Таблица 21.2

Таблица истинности RS -триггера на элементах «И-НЕ»

$S_1 = \bar{S}$	$R_1 = \bar{R}$	Q	\bar{Q}
1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	Сохраняется предыдущее состояние	
0	0	Запрещено	

Два рассмотренных варианта RS -триггера называются **асинхронными**, так как реагируют на входное воздействие сразу же при его поступлении. Условное изображение асинхронного не инвертирующего RS -триггера приведено на рис. 21.3.

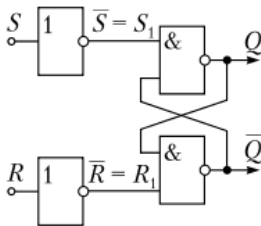


Рис. 21.2. Асинхронный триггер на элементах «И-НЕ», не инвертирующий состояние на входе S

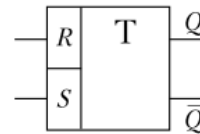


Рис. 21.3. Условное изображение асинхронного RS -триггера

21.1.2. Синхронный RS -триггер

При использовании в конкретных устройствах обычно бывает полезно сместить реакцию триггера на момент поступления тактового (синхронизирующего) импульса C (*clock*). Эта задача решается в схеме синхронного RS -триггера (рис. 21.4), которая получена из схемы асинхронного RS -триггера (см. рис. 21.1, б) путем включения на его входы двух базисных элементов «И-НЕ».

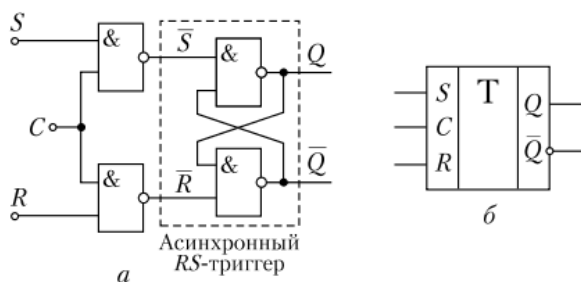


Рис. 21.4. Синхронный RS -триггер:

a — структурная схема; $б$ — условное изображение

Тактовый импульс C подается на один из входов добавочных базисных элементов. На их вторые входы подаются сигналы S и R («установки» и «сброса»):

1. При $C = 0$ на входах самого триггера \bar{S} и \bar{R} имеем «1», т.е. $\bar{S} = 1$ и $\bar{R} = 1$. Схема поддерживает предыдущее состояние на выходе.

2. При $C = 1$ входные элементы схемы «И-НЕ» работают как инверторы:

а) если $S = 1$ и $R = 0$, то $\bar{S} = 0$ и $\bar{R} = 1$. Согласно табл. 21.2 $Q = 1$, $\bar{Q} = 0$;

б) если $S = 0$ и $R = 1$, то $\bar{S} = 1$ и $\bar{R} = 0$. Тогда по табл. 21.2 $Q = 0$, $\bar{Q} = 1$;

в) если $S = 0$ и $R = 0$, то $\bar{S} = 1$ и $\bar{R} = 1$, т.е. поддерживается ранее достигнутое триггером состояние.

Таким образом, при $C = 1$ синхронный RS -триггер ведет себя как обычный RS -триггер без инверсии, т.е. состояние на выходе Q повторяет состояние на входе S .

21.1.3. D -триггер

D -триггер (рис. 21.5) — это разновидность (частный случай) синхронного RS -триггера, когда сигналы на его информационных входах S и R определяются одной логической переменной, обозначаемой обычно D (*delay* — задержка), а именно: $S = D$, $R = \bar{D}$. В цепи на рис. 21.5, a на установочный вход S подается сама логическая переменная D , а на вход сброса R — она же, только через инвертор. С приходом тактового импульса (при $C = 1$) оба входных базисных элемента «И-НЕ» работают инверторами, поэтому сигналы на внутренних входах схемы \bar{S} и \bar{R} взаимно инверсны, т.е. $\bar{S} = \bar{D}$, $\bar{R} = D$.

Для синхронного RS -триггера в режиме взаимно-инверсных входов можно записать: $Q = \bar{\bar{S}} = D$. Следовательно, состояние на выходе Q повторяет состояние на входе D в момент прихода тактового импульса.

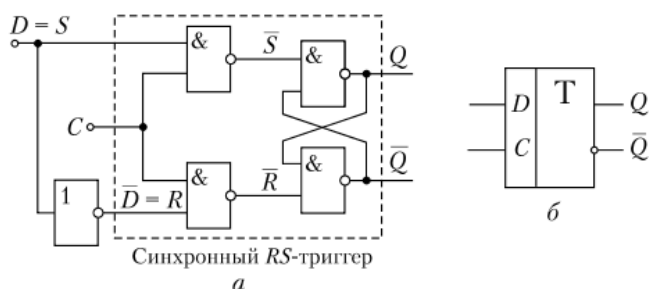


Рис. 21.5. D -триггер:

a — структурная схема; $б$ — условное изображение

Обращаем внимание, что изменение состояния на выходе Q запаздывает по отношению к изменению входной логической переменной D на время t_3 , так как происходит только по пришествии синхронизирующего импульса. Другими словами, схема «ждет» прихода синхронизирующего (тактового) импульса. В момент появления тактового импульса происходит «запись» D -триггером входной информации.

Изменение значения Q («перезапись») возможно только: а) с приходом нового тактового импульса и б) если входная логическая переменная D к этому моменту времени изменила свою величину.

Схема на рис. 21.5, а является простейшей запоминающей ячейкой. Условное изображение D -триггера показано на рис. 21.5, б.

21.1.4. T -триггер (счетный) на основе D -триггера

Если в схеме D -триггера инверсный выход \bar{Q} соединить с входом D (рис. 21.6, а), то для логической переменной D будет справедливо равенство $D = \bar{Q}$. Как уже отмечалось, при воздействии на вход C каждого тактового импульса на выходе D -триггера значение Q должно повторять состояние на его входе $D = \bar{Q}$, а значит, изменяться («перебрасываться») на противоположное — с Q на \bar{Q} . При этом сигнал на любом из двух выходов имеет форму прямоугольных импульсов. Их частота следования вдвое меньше тактовой частоты (рис. 21.6, б).

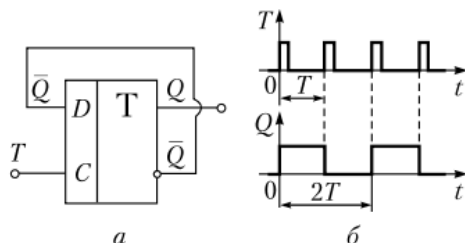


Рис. 21.5. T -триггер на основе D -триггера:

а — структурная схема; б — временные диаграммы

Таким образом, T -триггер выступает как делитель частоты следования импульсов, подаваемых на его синхронизирующий вход, и может быть использован при построении двоичных счетчиков.

21.1.5. Триггеры типа $M-S$

Триггеры типа $M-S$ позволяют разнести во времени процессы приема информации и передачи ее на выход с целью исключения искажений передаваемой информации по причине неизбежно возникающего при ее приеме переходного процесса. Такие триггеры состоят из двух бистабильных ячеек, из которых одна является ведущей (*master* — хозяин), а вторая — ведомой (*slave* — раб). Ведомая ячейка «ждет» окончания переходного процесса в ведущей ячейке и только потом воспринимает принятую ведущей ячейкой информацию.

RS -триггер типа $M-S$. Его структурная схема, состоящая из двух каскадно включенных синхронных RS -триггеров (ячеек), приведена на рис. 21.7, а. Входной каскад является ведущим, а выходной — ведомым. Обе ячейки памяти синхронизируются от одного источника тактовых импульсов, но вы-

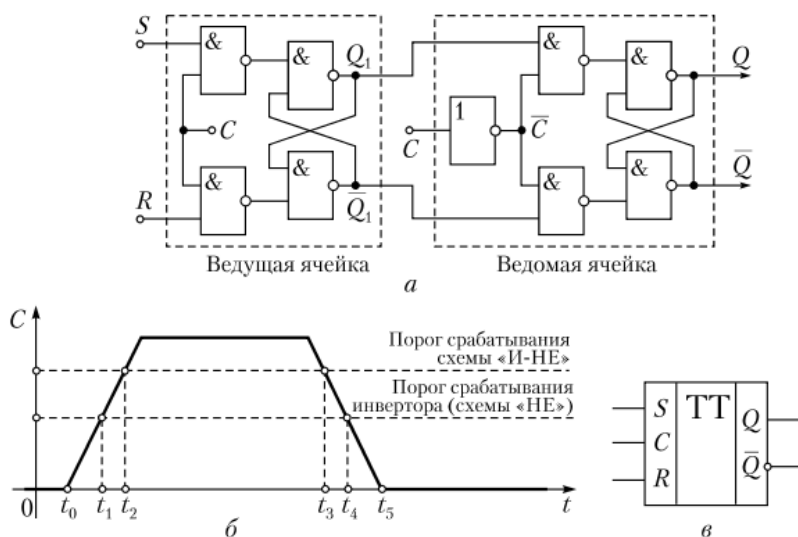


Рис. 21.7. RS-триггер типа M-S:

a — структурная схема; *б* — временная диаграмма моментов переключения элементов «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ» относительно фронтов синхроимпульса *C*; *в* — условное графическое обозначение

ходная ячейка — через инвертор. Поэтому на синхронизирующий вход ведущей ячейки памяти подается сигнал *C*, а ведомой — \bar{C} .

Важным требованием, предъявляемым к параметрам используемых в схеме компонентов, является различие порогов срабатывания элементов «И-НЕ» и инвертора на входе ведомой ячейки. Под порогом срабатывания понимается уровень входного сигнала, необходимый для перехода элемента из состояния логического «нуля» в состояние «единица» и обратно.

Для правильной работы схемы на рис. 21.7, *a* необходимо, чтобы инвертор переключался при меньшем напряжении на его входе, чем элементы «И-НЕ». Это обстоятельство пояснено на рис. 21.7, *б*, где показан реальный синхроимпульс «*C*» трапецеидальной формы и выделены его передний и задний фронты.

Рассмотрим реакцию ведущей и ведомой ячеек на синхроимпульс (рис. 21.7, *б*) в течение всего интервала его воздействия:

- $t_0 \leq t < t_1$. Схема не ощущает воздействия тактового импульса;
- в момент t_1 импульс *C* достигает уровня «единица» для инвертора, т.е. на его входе $C = 1$. Тогда на выходе инвертора появится сигнал $\bar{C} = 0$, который отключит ведомую ячейку от ведущей;
- в момент t_2 уровень синхроимпульса воспринимается как логическая «единица» элементами «И-НЕ» ведущей ячейки. Поданная на нее информация передается на выходы Q_1 и \bar{Q}_1 . Это состояние сохраняется на вершине импульса *C* вплоть до момента времени t_3 на его заднем фронте;
- при $t > t_3$ для элементов «И-НЕ» уровень синхроимпульсов ниже порога срабатывания и воспринимается как $C = 0$. Ведущая ячейка отключается от информационных входов;
- при $t > t_4$ уровень *C* становится ниже порога срабатывания инвертора, поэтому для него $C = 0$, а $\bar{C} = 1$. Ведомая ячейка подключается к выходам ведущей, воспринимает записанную в ней информацию и передает эту информацию на свой выход.

Условное графическое обозначение RS -триггера типа $M-S$ представлено на рис. 21.7, в. Две буквы T означают двухступенчатую структуру триггера.

T -триггер (счетный) типа $M-S$. Путем несложных соединений из RS -триггера типа $M-S$ можно получить схему, выполняющую те же функции, что и счетный триггер на основе D -триггера (см. рис. 21.6). Для этого достаточно выходной сигнал \bar{Q} подать на вход S , а сигнал Q — на вход R (рис. 21.8, а).

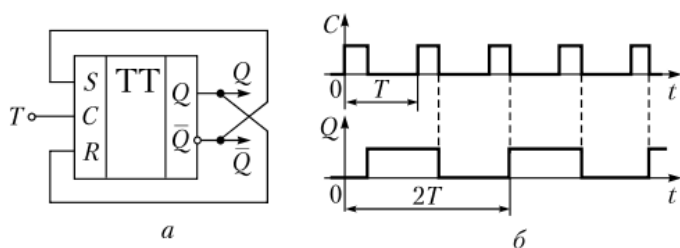


Рис. 21.8. T -триггер (счетный) на основе RS -триггера типа $M-S$:

а — структурная схема; б — временные диаграммы

С каждым тактовым импульсом происходит изменение состояния схемы на противоположное. В соответствии с принципом работы двухступенчатой $M-S$ -структуры во время переднего фронта синхроимпульса информация $S = \bar{Q}$ записывается в ведущую ячейку, а во время заднего фронта — передается на выход Q . Временные диаграммы, иллюстрирующие сказанное, приведены на рис. 21.8, б.

Следует отметить, что T -триггер типа $M-S$ (см. рис. 21.8, а) обладает более высокой помехоустойчивостью по сравнению с ранее рассмотренным T -триггером на основе D -триггера (см. рис. 21.6, а).

JK -триггер типа $M-S$. На базе схемы RS -триггера типа $M-S$ (см. рис. 21.7, а) может быть построен универсальный триггер с двумя информационными входами: J (*jump* — переброс) и K (*keep* — держать); и одним входом для подачи синхронизирующего импульса C [12, 14]. В отличие от RS -триггера, для которого комбинация $S = 1, R = 1$ запрещена, JK -триггер работает и при одновременном воздействии на его входы двух «единиц», т.е. при $J = 1, K = 1$ (становится T -триггером).

От RS -триггера типа $M-S$ (см. рис. 21.7, а) схема JK -триггера (рис. 21.9) отличается:

а) наличием двух ветвей обратной связи, соединяющих вход R с выходом Q , а вход S — с \bar{Q} ;

б) дополнительными входами J и K у элементов «И-НЕ» ведущей ячейки; для этого они должны иметь три входа.

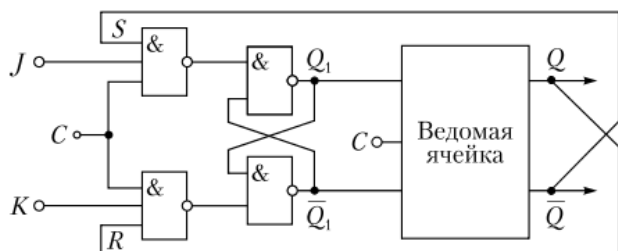


Рис. 21.9. JK -триггер, построенный на основе RS -триггера типа $M-S$

Все возможные ситуации на входе и выходе JK -триггера можно разбить на три группы.

1. $J = 0, K = 0$. В этом случае приход тактового импульса C не воспринимается входной ячейкой, следовательно, выходная ячейка хранит предыдущее состояние.

2. $J = 1, K = 0$ или $J = 0, K = 1$, т.е. входные сигналы взаимно-инверсные. Выходная реакция схемы на рис. 21.9 подобна реакции RS -триггера на взаимно-инверсные воздействия $S = 1, R = 0$ или $S = 0, R = 1$. Реакция Q повторяет воздействие J , а \bar{Q} повторяет K .

3. $J = 1, K = 1$. Состояние данной цепи зависит от наличия или отсутствия синхронизирующего импульса C . При $C = 0$ схема на рис. 21.9 сохраняет ранее приобретенные уровни Q и \bar{Q} , а с приходом тактового импульса, т.е. при $C = 1$, изменяет их на противоположные, так как на вход J подается сигнал \bar{Q} . По сути она превращается в счетный T -триггер типа $M-S$ (см. рис. 21.8, а).

На рис. 21.10, а–в показаны простейшие способы превращения JK -триггера в RS -триггер, D -триггер и T -триггер соответственно.

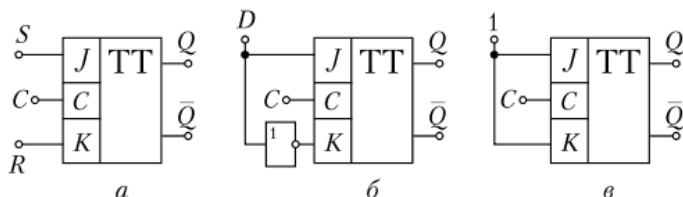


Рис. 21.10. Способы включения JK -триггера для выполнения им функций:

а — RS -триггера; б — D -триггера; в — T -триггера

21.2. Счетчики и регистры

Счетчики и регистры — это цифровые узлы, обязательно присутствующие в любой вычислительной системе. Производимые ими вычислительные действия невозможны без операций запоминания и хранения результатов вычислений. Другими словами, счетчики и регистры являются устройствами с памятью и по этой причине рассматриваются в классе последовательностных устройств.

21.2.1. Счетчики

Счетчиком называется функциональный узел, преобразующий информацию о количестве поступивших на его вход импульсов в n -разрядный двоичный код. Кроме этого, счетчики запоминают полученную информацию и хранят ее по крайней мере до прихода следующего импульса.

Основным элементом счетчика обычно является T -триггер, который, как уже отмечалось ранее, называется счетным. Количество используемых триггеров зависит от разрядности счетчика n , так как каждый разряд выходного цифрового кода реализуется отдельным триггером. Количество импульсов, которое может «сосчитать» n -разрядный двоичный счетчик, равно числу различных состояний для совокупности из n триггеров, т.е. 2^n . Когда число поступивших на вход импульсов становится $\geq 2^n$, в схеме счетчика происходит возврат всех разрядных триггеров в исходное («нулевое»)

состояние, а затем повторение счета. При этом фактически счетчик выполняет операцию деления количества поданных на его вход импульсов на 2^n . Величина 2^n называется **модулем счета**.

По функциональному назначению различают счетчики суммирующие и вычитающие, в зависимости от их реакции на приход очередного импульса. У суммирующего счетчика с приходом каждого импульса цифровой код на выходе увеличивается на «1», а у вычитающего — уменьшается. В схемах реверсивных счетчиков предусматривается возможность переключения режима работы либо на суммирование, либо на вычитание.

При построении счетчиков применяются два главных способа подачи на них импульсов, подлежащих счету.

1. Подсчитываемые импульсы подаются на вход триггера младшего разряда. Его реакция служит воздействием на триггер более старшего (следующего за ним) разряда и т.д. Такой способ называется **последовательным переносом**.

2. Вся поступающая импульсная последовательность одновременно подается на все разрядные триггеры. Такое воздействие называется **параллельным переносом**.

Счетчики с параллельным переносом обладают более высоким быстродействием по сравнению со счетчиками последовательного переноса (в которых реакция каждого разрядного триггера запаздывает по отношению к своему воздействию). Однако их схема существенно сложнее [1].

Рассмотрим принцип функционирования трехразрядного счетчика, реализованного по схеме с последовательным переносом (рис. 21.11, а). Она содержит три JK -триггера типа $M-S$, превращенных в T -триггеры путем подачи «1» на входы J и K . Напомним, что T -триггеры типа $M-S$ называют двухступенчатыми, так как каждый из них включает в себя две ячейки: ведущую и ведомую (см. выше). Двухступенчатый T -триггер изменяет свое состояние на противоположное под действием заднего фронта каждого поступившего на его вход тактового импульса. Уточним, что во время заднего фронта импульса на входе триггера происходит перепад уровня сигнала от «1» к «0». В то же время на передний фронт поступившего на вход импульса (перепад от «0» к «1») двухступенчатый триггер не реагирует.

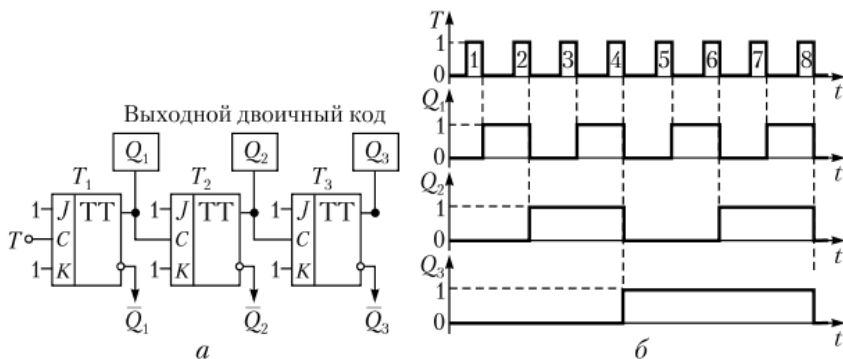


Рис. 21.11. Трехразрядный суммирующий счетчик с последовательным переносом:

а — структурная схема; б — временные диаграммы его состояний

Отметим основные особенности схемы счетчика на рис. 21.11, *a*:

- последовательность подсчитываемых импульсов поступает на счетный вход триггера T_1 ;
- прямой выход Q каждого из трех T -триггеров соединен со счетным входом триггера более старшего разряда (Q_1 — со входом T_2 , а Q_2 — со входом T_3);
- исходным состоянием счетчика является $Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = 0$, что соответствует цифровому коду 000.

При подаче на вход устройства импульсной последовательности, подлежащей счету, выходные сигналы Q_1, Q_2, Q_3 принимают значение «1» или «0», а их совокупность $Q_3Q_2Q_1$ совпадает с двоичным кодом количества поданных импульсов. Например, при поступлении первого импульса изменится состояние с «0» до «1» только первого триггера, т.е. $Q_1 = 1, Q_2 = 0, Q_3 = 0$, а на выходе счетчика появится комбинация двоичного кода $Q_3Q_2Q_1 = 001$. Следующий за ним импульс вернет T_1 в «нулевое» состояние, а T_2 переключится в «единицу»; при этом T_3 останется в состоянии «0», так как он не реагирует на передний фронт воздействия на своем входе. Этому режиму соответствует на выходе всего устройства код $Q_3Q_2Q_1$, равный 010, и т.д.

Работа счетчика (см. рис. 21.11, *a*) иллюстрируется временной диаграммой, представленной на рис. 21.11, *б*, и таблицей истинности (табл. 21.3), где отражены все $2^n = 8$ различных состояний разрядных триггеров. Обратим внимание, что восьмой импульс возвращает схему в исходное «нулевое» состояние и, начиная с девятого импульса, процесс повторяется.

Таблица 21.3

Таблица истинности для счетчика

№ входного импульса, i	Состояние выходов в паузе между i -м и $(i + 1)$ -м импульсами		
	Q_3	Q_2	Q_1
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1
8	0	0	0

Если счетные входы всех триггеров в последовательной цепочке, изображенной на рис. 21.11, *a*, начиная со второго, соединить с инверсными выходами предыдущих каскадов, то рассматриваемая схема превращается в вычитающий счетчик. С появлением на его входе очередного импульса цифровой код на выходе будет уменьшаться на «1» [1].

21.2.2. Регистры сдвига

Регистром сдвига называется цифровое устройство, осуществляющее перемещение цифрового слова, поданного на его информационный вход, по цепочке триггеров под воздействием тактовых импульсов. Он имеет два

входа — информационный и тактовый (для подачи импульсов сдвига). Чаще всего регистры сдвига строятся на D -триггерах двухступенчатой структуры (типа $M-S$). Необходимое количество триггеров в цепочке определяется разрядностью принимаемого цифрового слова.

На рис. 21.12, *a* изображена структурная схема сдвигового регистра на четыре разряда, содержащая четыре двухступенчатых D -триггера. Цифровая информация подается на вход D первого в цепочке триггера. Синхронизационные входы всех триггеров объединены и подключены к генератору тактовых импульсов (импульсов сдвига) T . Цифровое слово вводится по разрядно (начиная либо с младшего разряда, либо старшего). Первым тактовым импульсом поданная цифра записывается на выходе Q_1 первого триггера T_1 . Каждый следующий тактовый импульс перемещает ее на один разряд (на рис. 21.12 вправо).

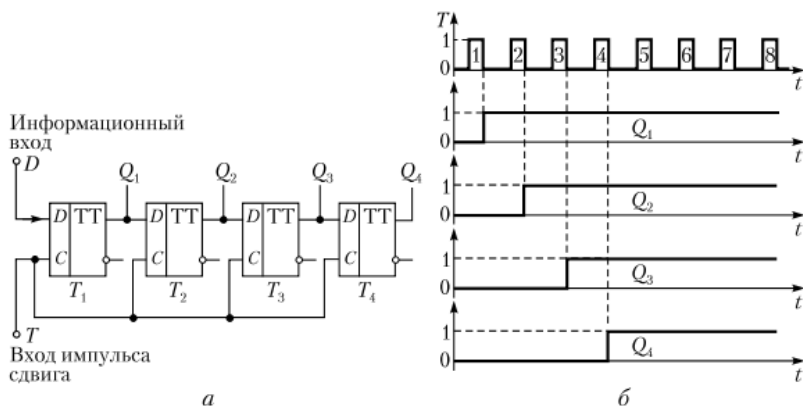


Рис. 21.12. Четырехразрядный регистр сдвига на D -триггерах:

a — структурная схема; *б* — диаграмма состояний ($D = 1 = \text{const}$)

Считывание принятой информации может производиться в виде как последовательного кода, так и параллельного:

- последовательный код принимается с выхода разряда Q_4 . Он представляет собой последовательность цифр, распределенную во времени, появляющуюся на выходе Q_4 с частотой тактовых импульсов. Если поступившее на информационный вход регистра D цифровое слово обозначить $D_3D_2D_1D_0$ и оно подавалось начиная с младшего разряда D_0 , то на выходе Q_4 эти цифры придут в том же порядке: сначала D_0 , потом D_1 , затем D_2 и, наконец, D_3 . Причем цифра D_0 на выходе Q_4 появится только вместе с задним фронтом четвертого тактового импульса;

- параллельный цифровой код представляет собой совокупность цифр, разнесенных в пространстве. Он наблюдается на выходах $Q_1 - Q_4$ по окончании четвертого тактового импульса. Таким образом, для считывания n -разрядного слова необходимо на синхронизационный вход регистра подать n тактовых импульсов. Его прочтение приходится на паузу между окончанием первого цикла из n тактовых импульсов и началом второго цикла.

На рис. 21.12, *б* показана временная диаграмма состояний на выходах $Q_1 - Q_4$ регистра (см. рис. 21.12, *a*) для случая, когда на его информационный вход подана одна «1» и она неизменно поддерживается на всем рассматриваемом интервале времени. Напомним, что D -триггер повторяет на сво-

ем прямом выходе Q информацию, поступившую на вход D , но только с приходом тактового импульса, причем в момент его окончания. Так как в приведенном на рис. 21.12, б примере сигнал $D = 1$ предполагается неизменным, то каждый триггер, приняв и записав под воздействием тактового импульса эту «1», сохраняет ее и с приходом следующих синхронизирующих импульсов.

21.3. Оперативные запоминающие устройства

Оперативным запоминающим устройством (ОЗУ) называется функциональный узел, обладающий памятью, позволяющий осуществлять быстрый доступ к любой его запоминающей ячейке с целью считывания и записи информации. Каждая ячейка содержит либо один, либо несколько элементов памяти.

При построении ОЗУ используются два вида запоминающих элементов:

- 1) триггеры;
- 2) емкостные элементы.

Самыми распространенными и надежными запоминающими элементами являются триггеры. ОЗУ на триггерах называются **статическими**, на емкостных элементах — **динамическими**.

Для ОЗУ принято международное обозначение RAM (*random access memory* — память с произвольной выборкой). В любом запоминающем устройстве (ЗУ) можно выделить две основные структурные составляющие: накопитель информации и устройство управления. Главная часть ЗУ — накопитель — состоит из ячеек памяти. Их количество определяет емкость запоминающего устройства, т.е. объем хранимой информации.

21.3.1. Статические оперативные запоминающие устройства

Главным свойством статических ОЗУ является *неизменность записанной информации как в режиме хранения, так и в режиме считывания*. Это обусловлено видом используемых элементов памяти — триггеров. На рис. 21.13 показан вариант запоминающей ячейки, содержащей один запоминающий элемент — D -триггер. Она имеет три входа, обозначенные $D_{\text{вх}}$, A , WE , и один выход — $Q_{\text{вых}}$. Назначение входов:

- $D_{\text{вх}}$ — вход для записи поступившей информации;
- A — адресный вход; наличие «1» на адресном входе свидетельствует о выборе именно данной ячейки для записи или считывания информации;
- WE — вход, на который подается сигнал, разрешающий запись поданных на информационный вход «единицы» или же «нуля».

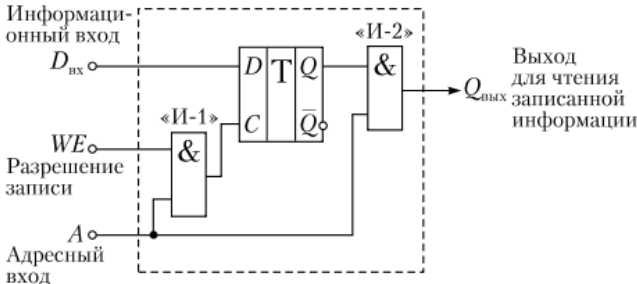


Рис. 21.13. Запоминающая ячейка на D -триггере

Схема запоминающей ячейки, показанная на рис. 21.13, кроме триггера, содержит еще два конъюнктора («И»), которые обозначены как «И-1» и «И-2». Элемент «И-1» не позволяет производить запись информации без наличия «единицы» на адресном входе. Конъюнктор «И-2» предотвращает операцию считывания информации, записанной в ячейке с другим адресом. В такую ячейку записывается один бит информации, т.е. одна двоичная цифра – «1» или «0».

Обычно все запоминающие ячейки накопителя располагаются в виде квадратной матрицы, как показано на рис. 21.14, где приведена матрица, содержащая 16 ячеек (на 16 бит информации). Это позволяет каждой ячейке матрицы поставить в соответствие номер строки и номер столбца и таким образом однозначно определить ее адрес.

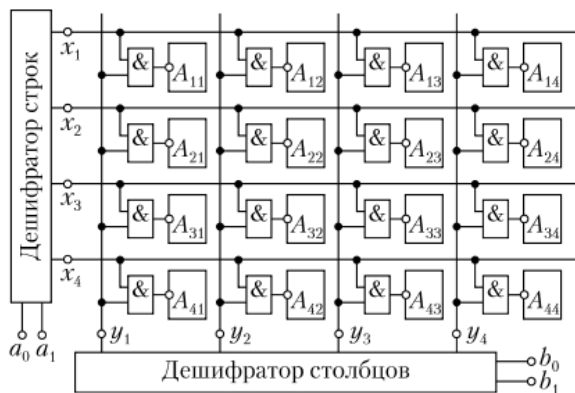


Рис. 21.14. Структура матрицы памяти ЗУ с адресным доступом к ячейкам памяти

Связь ячеек запоминающей матрицы с устройством управления осуществляется посредством совокупности горизонтальных и вертикальных проводников, называемых **шинами** (на рис. 21.14 четыре горизонтальные и четыре вертикальные шины). Каждая ячейка через конъюнктор (&) подключена к одной вертикальной и одной горизонтальной шине. Обращаем внимание, что на рис. 21.14 показаны только адресные входы ячеек А. Остальные входы $D_{\text{вх}}$, WE , а также выход $Q_{\text{вых}}$ на этом рисунке не показаны.

Записываемая информация одновременно поступает на информационные входы $D_{\text{вх}}$ всех ячеек, т.е. можно считать, что эти входы собраны в одну точку. Аналогично входы разрешения записи WE всех ячеек объединены. Это же относится и к выходам ячеек $Q_{\text{вых}}$.

Процесс обращения к выбранной ячейке памяти. Чтобы обратиться к определенной ячейке памяти ЗУ, необходимо активизировать ее адресный вход А (подать на него «1»). С этой целью на дешифраторы строк и столбцов (см. рис. 21.14) подаются двоичные коды номеров строки и столбца, соответствующих выбранной ячейке. На одном из выходов каждого дешифратора появляется сигнал «единичного» уровня и, как следствие, активизируются две шины, горизонтальная и вертикальная. Им от дешифраторов сообщен высокий потенциал.

Конъюнктор, включенный на пересечении активизированных шин, реагирует на две «1» на его входе «единичным» сигналом на своем выходе. Последний поступает на адресный вход А ячейки-адресата.

Процесс записи. Он состоит из следующих действий.

1. Записываемый сигнал подается на информационный вход $ZУ - D_{\text{вх}}$. Он соединен с информационными входами всех ячеек матрицы, в том числе и ячейки-адресата.

2. На вход WE (разрешение записи) также подается «1».

3. Две «1» на входе конъюнктора «И-1» обуславливают «1» на синхронизирующем входе D -триггера (см. рис. 21.13). Информация, поданная на его информационный вход $D_{\text{вх}}$, пройдет на выход Q , т.е. запишется в D -триггере.

Процесс считывания. «Единица», поданная на адресный вход ячейки, поступает на нижний вход конъюнктора «И-2» (см. рис. 21.13). Его верхний вход соединен с выходом D -триггера Q , где хранится записанный сигнал. При наличии «1» на нижнем входе «И-2» сигнал на его выходе, обозначенный на рис. 21.13 как $Q_{\text{вых}}$, совпадает с Q , а именно: если $Q = 1$, то $Q_{\text{вых}} = 1$; а если $Q = 0$, то и $Q_{\text{вых}} = 0$.

Запоминающие устройства, в которых главным признаком ячейки матрицы памяти (с точки зрения доступа к ней) является ее адрес, называются **адресными** или **ЗУ с адресным типом организации памяти**. Применяются и другие виды организации памяти, где доступ к ячейке матрицы памяти осуществляется по отличному от адреса признакам [6, 9].

21.3.2. Динамические оперативные запоминающие устройства

В качестве запоминающего элемента можно использовать конденсатор, если его состояние, когда он заряжен до заданного уровня, принять за логическую «единицу», а разряженное состояние — за логический «ноль». При отсутствии разрядной цепи конденсатор может хранить заряд теоретически как угодно долго. Это свойство емкости положено в основу построения динамических ЗУ.

Ячейка памяти динамического ЗУ содержит элемент, обладающий достаточно выраженными емкостными свойствами — накапливать электрический заряд под действием разности потенциалов между обкладками конденсатора. При записи «1» конденсатор заряжается до заданного уровня, а при записи «0» — разряжается.

На рис. 21.15 показано принципиальное построение матрицы памяти динамического ЗУ с адресной структурой. Емкостные элементы памяти включены на пересечении горизонтальных и вертикальных проводников (шин) так, что одна обкладка конденсатора соединена с горизонтальной шиной, а вторая — с вертикальной. Номера этих шин составляют двузнач-

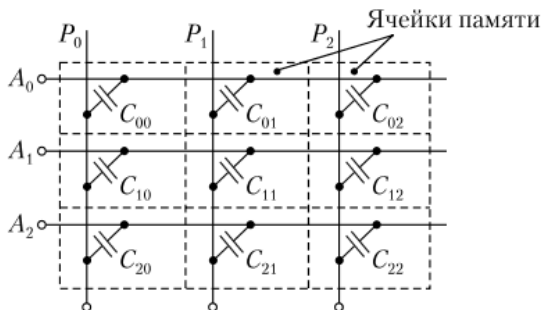


Рис. 21.15. Матрица памяти динамического ОЗУ с адресной структурой

ный десятичный номер, который рассматривается как адрес ячейки. При помощи горизонтальных и вертикальных шин ячейки матрицы могут общаться с управляющей частью ЗУ.

Функция запоминающего конденсатора при интегральной технологии изготовления обычно возлагается на емкость одного из p - n -переходов — либо биполярного, либо полевого транзистора. Варианты запоминающих ячеек, приведенные на рис. 21.16, *a*, *б*, соответствуют двум названным случаям.

В ячейке на рис. 21.16, *a* используется емкость p - n -перехода база — эмиттер биполярного транзистора. В запоминающей ячейке на рис. 21.16, *б* элементом памяти служит емкость между стоком и подложкой полевого транзистора с индуцированным n -каналом. Поясним работу этой запоминающей ячейки в режимах хранения, записи, считывания. Обратим внимание на то, что устройство управления ЗУ воздействует на ячейку через электроды затвора и истока полевого транзистора.

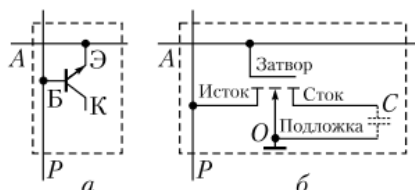


Рис. 21.16. Варианты реализации ячеек памяти динамического ОЗУ:

a — на биполярном транзисторе; *б* — на полевом транзисторе

В **режиме хранения** на затвор с шины *A* подается близкое к нулю (относительно общей точки *O*) напряжение. Потенциал шины *P* также близок к нулю. При такой разности потенциалов между затвором и истоком (напомним, шина *P* соединена с истоком) n -канальный транзистор с индуцированным каналом закрыт. Сток не контактирует с шиной *P*, и конденсатор не имеет возможности разряжаться.

Процессы записи и считывания происходят при высоком уровне напряжения, подаваемом с шины *A* на затвор, т.е. при открытом канале сток — исток. Потенциал стокowej обкладки конденсатора *C* практически сравнивается с потенциалом истока, а следовательно, с потенциалом шины *P*. Если на эту шину подается сигнал «1», то на конденсаторе запишется «1». При нулевом потенциале шины *P* конденсатор разрядится, т.е. в нем запишется «0».

В **режиме считывания** на исток через шину *P* подается низкий (нулевой) потенциал. Так как транзистор открыт «единицей», поданной на шину *A*, то конденсатор имеет возможность разряжаться через шину *P* на «землю». Следовательно, если напряжение на конденсаторе имело высокий уровень, т.е. на нем была записана «1», то при разряде конденсатора на нем запишется «0». Это возможно, если разница «единичных» уровней адресной (*A*) и разрядной (*P*) шин превышает пороговое напряжение полевого транзистора.

Таким образом, процесс считывания в динамическом ЗУ происходит с разрушением информации. Кроме того, при хранении логической единицы за счет токов утечки накопительный конденсатор постепенно разряжается через подложку. Поэтому в схеме динамического ЗУ предусматривается возможность периодического восстановления хранимой информации с периодом 1–2 мс [6].

21.4. Постоянные запоминающие устройства

Постоянным запоминающим устройством (ПЗУ) называется функциональный блок, хранящий постоянные, никогда не изменяющиеся данные или же редко изменяющуюся информацию. Пользователь обращается к ПЗУ только для считывания хранящихся данных. Международное сокращенное обозначение ПЗУ — ROM (*read only memory* — память только для чтения). Запись информации в ПЗУ обычно производится на этапе промышленного производства при помощи специального приспособления, которое называется маской. Полученные по такой технологии ПЗУ называются **масочными**. Именно они составляют постоянную память, заложенную в большинстве вычислительных устройств.

К постоянным запоминающим устройствам относятся и те ЗУ, в которых записанная информация изменяется редко. Причем необходимые изменения в программу могут вноситься пользователем при помощи так называемых **программаторов**. Для перепрограммируемых ПЗУ принято обозначение ППЗУ (PROM).

В связи с тем что ПЗУ предназначены только для чтения информации, требования к элементам, составляющим их память, отличаются от требований, предъявляемых к элементам памяти ОЗУ. При построении ПЗУ такие сравнительно сложные элементы, как триггеры, не требуются. Неизменные «1» или «0» в ячейке памяти можно получить, если замкнуть или оборвать некоторый ее участок. Этот принцип положен в основу построения матрицы памяти многих ПЗУ.

На рис. 21.17 изображена матрица диодного масочного ПЗУ. В его матрице памяти записаны шестнадцать четырехразрядных цифровых слов, каждое в отдельной строке. Поэтому адрес слова совпадает с номером строки. Матрица представляет собой сетку из шестнадцати горизонтальных и четырех вертикальных проводников (шин). В узлах сетки в соответствии с записанной информацией либо включены полупроводниковые диоды, либо они отсутствуют. Наличие диода означает записанную «единицу», а его отсутствие — «ноль». Таким образом, в строках $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{15}$ записаны следующие цифровые слова: строка A_0 — 1001; строка A_1 — 0101; строка A_2 — 1110; строка A_3 — 0110; ...; строка A_{15} — 1111. В исходном состоянии потенциалы как адресных (горизонтальных), так и разрядных (вертикальных) шин близки к нулю. Разности потенциалов между анодами и катодами диодов равны нулю, поэтому ток через диоды не протекает. В резисторах,

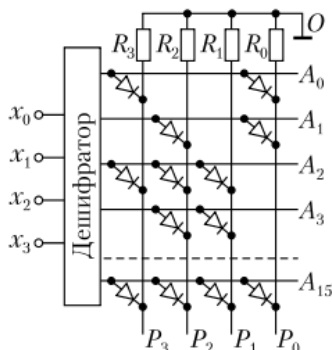


Рис. 21.17. Матрица памяти масочного ПЗУ

включенных последовательно с разрядными шинами (точнее, с шинами разрядов цифровых слов), токи также отсутствуют.

Рассмотрим процесс чтения записанных в матрице ЗУ цифровых слов. С целью считывания на вход дешифратора поступает двоичный код адреса выбранной строки. Тогда на одном из его выходов появляется сигнал «единица», т.е. высокий уровень напряжения. Поскольку этот выход дешифратора соединен с адресатом, т.е. выбранной горизонтальной шиной, то ее потенциал также возрастает. У диодов, соединенных с возбужденной шиной, потенциал анода становится выше, чем потенциал катода. Диоды открываются и передают высокий потенциал анодов на свои разрядные шины. Через резисторы начинает протекать ток. Индикаторами этот ток воспринимается как сигнал «1». Разрядные шины, не подключенные к адресной, остаются под нулевым потенциалом, их индикаторы покажут «0».

При изготовлении ППЗУ (PROM) поступают двояко:

1) во все узлы диодной матрицы записывают «1» и обеспечивают возможность по усмотрению пользователя их обнулять;

2) во все узлы матрицы записывается «0», но предусмотрена возможность превращения его в «1».

Первый вариант иллюстрируется на рис. 21.18, *а*, где диод *D* и последовательная с ним перемычка соединяют горизонтальную шину *A* с вертикальной *P*, что соответствует записанной «1». Если необходимо в рассматриваемом узле записать «0», то перемычка расплавляется подачей мощного импульса тока.

Второй вариант реализуется при помощи двух встречно включенных диодов Шоттки (рис. 21.18, *б*). Проводимость такой пары равна нулю, так как обязательно один из диодов заперт. В режиме программирования диод, включенный встречно (на рис. 21.18, *б* это диод D_2), превращается в короткозамкнутую перемычку (пробивается) путем подачи на него мощного импульса напряжения.

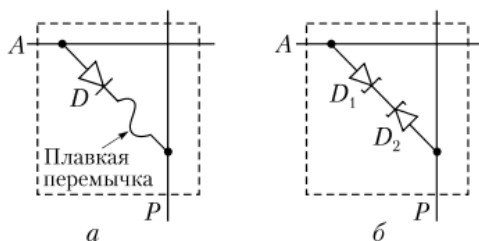


Рис. 21.18. Варианты элементов памяти ППЗУ:

а — с предварительной записью «единицы»; *б* — с предварительно записанным «нулем»

21.5. Программируемые логические устройства

21.5.1. Программируемые логические матрицы

Принципы и технологические приемы, лежащие в основе построения матрицы памяти ППЗУ, используются и при создании цифровых узлов, выполняющих различные логические функции n аргументов $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, задаваемые некоторой таблицей истинности.

Как известно, любой таблице истинности можно поставить в соответствие логическое уравнение в одной из совершенных форм — дизъюнктивной

(СДНФ) или конъюнктивной (СКНФ). Они подробно рассматривались в гл. 18. Обычно при построении логической матрицы в качестве исходной берут дизъюнктивную форму функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Напомним, что структура СДНФ представляет собой логическую сумму из k слагаемых, т.е.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_k, \quad (21.1)$$

где k не превышает 2^n . Причем каждое слагаемое в формуле (21.1) является логическим произведением, составленным из аргументов функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и их инверсий в различных сочетаниях. Например, $y_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$, $y_2 = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n$ и т.п.

Логическая структура вида (21.1) реализуется при помощи матриц, подобных тем, которые используются в ППЗУ. В соответствии с формулой (21.1) сначала формируются слагаемые y_1, y_2, \dots, y_k , т.е. логические произведения. Затем сформированные логические произведения подаются на устройство, осуществляющее их логическое сложение.

Проиллюстрируем названный алгоритм на примере функции трех аргументов $F(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей истинности (табл. 21.4).

Таблица 21.4

Таблица истинности для иллюстрации алгоритма построения ПЛМ

№ набора	Аргументы			$F(x_1, x_2, x_3)$
	x_1	x_2	x_3	
1	1	1	1	0
2	0	0	1	1
3	1	0	1	0
4	0	1	1	1
5	1	1	0	0
6	1	0	0	0
7	0	1	0	1
8	0	0	0	0

1. Получение СДНФ функции $F(x_1, x_2, x_3)$. Согласно методике подпараграфа 18.3.1:

- в табл. 21.4 выделяем наборы аргументов (строки), где функция $F(x_1, x_2, x_3)$ принимает значение «1». Это строки **2** — $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 1$; **4** — $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1$; **7** — $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0$;

- для каждого выбранного набора записываем логическое произведение, в котором каждый из аргументов x_1, x_2, x_3 представлен либо в не инвертированном виде, либо своей инверсией, в зависимости от его значения в строке «1» или «0» («1» $\rightarrow x$, «0» $\rightarrow \bar{x}$). Тогда наборам 2, 4, 7 будут соответствовать следующие логические произведения:

$$2 \rightarrow \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 = y_1; \quad 4 \rightarrow \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = y_2; \quad 7 \rightarrow \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 = y_3. \quad (21.2)$$

- записываем логическую сумму полученных логических произведений:

$$F(x_1, x_2, x_3) = y_1 + y_2 + y_3 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3. \quad (21.3)$$

Уравнение (21.3) является искомой СДНФ заданной логической функции.

2. Построение матрицы логических произведений «И». Ее основой является сетка из горизонтальных и вертикальных проводников — шин

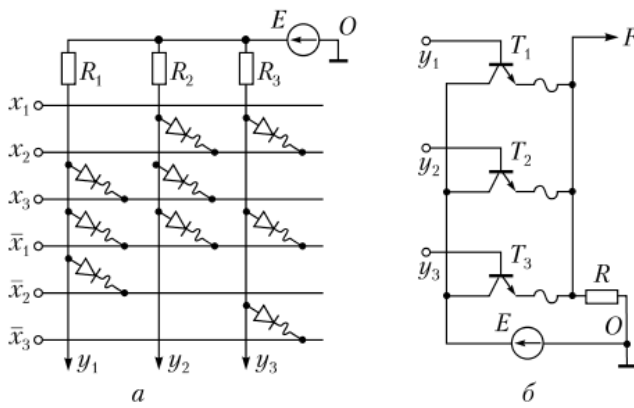


Рис. 21.19. Программируемая логическая матрица на три входа и один выход:
а – схема «И»; *б* – схема «ИЛИ»

(рис. 21.19, *а*). Поскольку на горизонтальные шины подаются логические переменные и их инверсии, то количество таких шин равно $2n$, в нашем случае – 6. Каждой вертикальной шине «поручена» реализация одного из логических произведений в соответствии с соотношениями (21.2). В рассматриваемом примере достаточно трех вертикальных шин. Их выходы на рис. 21.19, *а* обозначены как y_1, y_2, y_3 . Выходной сигнал с вертикальной шины может трактоваться как «1» или «0» в зависимости от ее потенциала (высокий – «1», низкий – «0»). При отсутствии контакта вертикальной шины с горизонтальной от источника ЭДС E (см. рис. 21.19, *а*) через резисторы R_1, R_2, R_3 всем вертикальным шинам сообщен высокий потенциал, близкий к E , т.е. для них записана «1». Через резисторы R_1, R_2, R_3 ток не течет.

Согласно СДНФ (21.3) первая шина (с выходом y_1) должна выполнять операцию $y_1 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$. Это означает, что данная шина может иметь высокий потенциал ($y_1 = 1$) только, когда одновременно $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 1, x_3 = 1$. Удовлетворить такому требованию можно, если при помощи диодов соединить шину y_1 с горизонтальными шинами $\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3$, как показано на рис. 21.19, *а*. Поясним сказанное.

Когда на входные шины $\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3$ подано высокое напряжение, равное $+E$ (логическая «1»), все три диода, подсоединенные к шине y_1 , заперты. Разность потенциалов между анодом и катодом у диодов близка к нулю. В этом случае через резистор R_1 , включенный последовательно с шиной y_1 , ток не течет. Потенциал данной шины остается высоким, что соответствует логической «единице», т.е. $y_1 = 1$.

Если хотя бы на один из трех входов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3$ подан низкий потенциал («0»), соответствующий диод открывается, через резистор R_1 протекает ток, создающий в нем падение напряжения, близкое к E . Следовательно, потенциал шины y_1 снижается до нуля, а значит, и логическая величина $y_1 = 0$.

Таким образом, при помощи трех диодов, соединяющих шину y_1 с входными шинами $\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3$, реализовано первое логическое уравнение системы (21.2). Аналогично в соответствии с двумя другими уравнениями системы (21.2) сделано диодное соединение шины y_2 с входами \bar{x}_1, x_2, x_3 , а шины y_3 – с входами $\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3$. На выходах y_2 и y_3 матрицы на рис. 21.19, *а* имеем сигналы, уровень которых удовлетворяет заданным соотношениям: $y_2 = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ и $y_3 = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$.

Итак, построенная диодная матрица (см. рис. 21.19, а) реализует все необходимые логические произведения.

3. Схема логического сложения. На рис. 21.19, б показан один из вариантов схемы, осуществляющей логическое суммирование трех функций y_1, y_2, y_3 . Подлежащие суммированию логические величины y_1, y_2, y_3 подаются на базы трех биполярных транзисторов. Их эмиттеры объединены и через резистор R соединены с точкой O , имеющей нулевой потенциал. Коллекторы биполярных транзисторов подключены к «плюсу» источника питания E . При подаче «1» на базовый вход любого из транзисторов (от y_1, y_2 или y_3) он открывается. Спротивление участка коллектор — эмиттер падает, и потенциал эмиттера становится близким к потенциалу коллектора, т.е. приближается к E . Следовательно, на выходе F схемы на рис. 21.19, б появляется логическая «1». Подчеркнем, что «единичная» ситуация на выходе F имеет место, когда хотя бы один из аргументов y_1, y_2, y_3 равен «1». В символах алгебры логики это означает, что логическая функция $F(y_1, y_2, y_3)$ связана со своими аргументами уравнением

$$F(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3.$$

Таким образом, при помощи схемы, изображенной на рис. 21.19, б, можно построить цифровой узел, выполняющий любую логическую функцию. Расположение диодов в матрице «И» может проводиться сразу по таблице истинности без предварительного составления алгебраического выражения в СДНФ.

На практике часто возникает задача реализации нескольких логических функций от одних и тех же переменных — $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В этом случае схема логического сложения должна содержать m выходных шин (F_1, F_2, \dots, F_m) связанных с шинами y при помощи биполярных транзисторов (так же, как шина F на рис. 21.19, б). Следовательно, схема, выполняющая дизъюнктивную функцию, превращается в матрицу.

Увеличение числа выходов в схеме «ИЛИ» неизбежно вызывает и увеличение числа необходимых для получения F_1, F_2, \dots, F_m логических произведений (конъюнкций). Это равносильно увеличению числа вертикальных шин в матрице «И». Конъюнкции, формируемые матрицей «И», принято называть **термами**.

Таким образом, устройство, реализующее одновременно несколько логических функций одних и тех же аргументов, состоит из двух матриц — «И» и «ИЛИ», как показано на рис. 21.20. Такое устройство называется **программируемой логической матрицей** (ПЛМ — *programmable logic arrays* — PLA).

Возможность программирования по усмотрению пользователя в ПЛМ обеспечивается при ее изготовлении следующим образом.

1. Во все без исключения узлы матрицы «И» включают диоды, снабженные последовательными плавкими перемычками.

2. Каждая шина матрицы «ИЛИ» соединяется с шинами y_1, y_2, \dots, y_k через база-эмиттерный переход биполярного транзистора с последовательной плавкой перемычкой (как на рис. 21.19, б).

3. Наличие плавких перемычек позволяет пользователю исключить (оборвать) тот или иной диод или транзистор.



Рис. 21.20. Блок-схема ПЛМ с n входами, m выходами и k термами

Программируемая матричная логика (ПМЛ). Разновидностью ПЛМ является ее упрощенный вариант, отличающийся следующим:

- программируемыми возможностями наделяется только матрица «И» (см. рис. 21.20), формирующая логические произведения (термы);
- в матрице «ИЛИ» переключки исключаются, поэтому она всегда выполняет операцию логического сложения всех поступающих на ее входы термов, т.е. имеет фиксированную структуру.

Этот шаг существенно упростил процесс изготовления ПЛМ, снизил их себестоимость, а также занимаемую на кристалле площадь. Повысилась и надежность микросхемы.

Данный вариант ПЛМ получил Международное обозначение PAL (*programmable array logic* — программируемые матрицы логики, или ПМЛ). Здесь в сокращениях ПЛМ (PLA) и ПМЛ (PAL) оказались переставленными местами две последние буквы.

Таким образом, матрицы, сокращенно обозначаемые как ПМЛ, являются упрощенным вариантом матриц, обозначаемых как ПЛМ.

С появлением ПЛМ и ПМЛ появилась возможность замены прежних логических блоков, построенных на универсальных базисах «И-НЕ» и «ИЛИ-НЕ» (так называемых микросхем стандартной логики [24]), менее громоздкими и гораздо более простыми устройствами. Эта замена стала *революционным скачком* на пути снижения энергопотребления и повышения степени интеграции микросхем, т.е. уменьшения размеров элементов, размещаемых на микросхеме, и увеличения их числа, что позволило перейти к производству больших (БИС) и сверхбольших (СБИС) интегральных схем.

По степени интеграции микросхемы условно подразделяются на следующие группы:

- 1) малые (до 10) и средние микросхемы — до 100 элементов;
- 2) большие (БИС) — от 100 до 10^5 элементов;
- 3) сверхбольшие (СБИС) — свыше 10^5 элементов.

21.5.2. Программируемые логические интегральные схемы и устройства

Программируемой логической интегральной схемой (ПЛИС — *programmable logic device* — PLD) называется полупроводниковое логическое устройство в виде полуфабриката, на основе которого пользователь имеет возможность программным путем создавать цифровую интегральную микросхему, выполняющую необходимые ему функции. Современные

ПЛИС имеют различную информационную емкость и разнообразное предназначение. Они содержат как комбинационные блоки (не обладающие памятью), так и последовательностные узлы — различного вида ЗУ, регистры, счетчики и т.п. Причем возможности программирования пользователем касаются не только логических блоков, но и других функциональных узлов ПЛИС.

Среди многих разновидностей ПЛИС можно выделить два основных класса.

1. **Комплексные программируемые логические устройства (КПЛУ).** Их международное наименование — *complex programmable logic device* (CPLD). В КПЛУ на одном кристалле располагаются различные функциональные логические блоки и несколько ПЛМ и ПМЛ, соединения между которыми могут программироваться пользователем. Для этого в ПЛИС содержится большое количество ключей, объединенных в программируемые коммуникационные матрицы (матрицы связи).

2. Наибольшими функциональными возможностями и гибкостью обладают разновидности ПЛИС под названием **программируемые пользователем вентильные матрицы** (ППВМ — *field programmable gate array* — FPGA). Их пространственная структура была позаимствована у ранее разработанных базовых матричных кристаллов (БМК). Поскольку БМК программировались при их изготовлении, а не пользователем, то сфера их применения оказалась ограниченной.

Программируемые пользователем вентильные матрицы представляют собой матрицы из множества сравнительно крупных ячеек, расположенных на едином полупроводниковом кристалле. Содержимое каждой ячейки представляет собой так называемый логический блок.

Любой из логических блоков ППВМ выполняет фактически функцию ключевого устройства, управляемого большим количеством переменных — $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для этого он имеет n входов и один выход. Такие ключевые устройства называются **логическими вентилями**. Поэтому и матрицы, их содержащие, называются вентильными.

Оказалось целесообразным создавать в ППВМ группы ячеек, которые в совокупности ориентированы на построение часто востребованных функциональных узлов, таких как ОЗУ, вычислительные блоки (сумматоры, умножители, счетчики, регистры) и т.п. Такие совокупности ячеек называются **ядрами**. Наличие ядер позволяет ППВМ после программирования пользователем превращаться в законченную цифровую систему, именуемую **СБИС «система на кристалле»**. За счет громадного количества ключей в ППВМ пользователь имеет возможность быстрого и очень гибкого *перепрограммирования* разрабатываемого цифрового устройства.

К достоинствам ППВМ следует отнести достаточно низкое напряжение питания (порядка 3 В) и малую потребляемую мощность. Кроме того, они обладают высоким быстродействием, большой степенью интеграции и сравнительно небольшой стоимостью.

Первые ППВМ были выпущены фирмой Xilinx в 1985 г. Но даже в настоящее время и в ближайшем будущем ППВМ останутся одними из наиболее перспективных устройств, позволяющих решать многие технические задачи.

21.6. Микропроцессоры

Микропроцессором (МП) называется программно-управляемое устройство обработки информации, применяемое в микроЭВМ и других вычислительных системах. МП — главный орган в «теле» любой вычислительной системы. В соответствии с заданной программой он осуществляет все вычислительные действия, требуемые при решении поставленной задачи. Его можно назвать также главным решающим и управляющим органом. Укрупненная блок-схема микропроцессора представлена на рис 21.21.

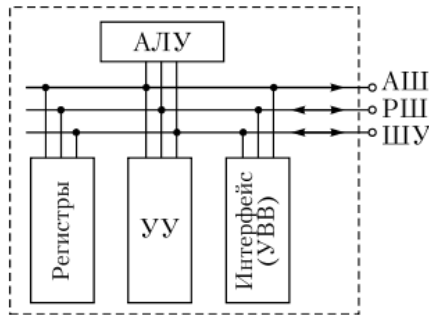


Рис. 21.21. Блок-схема микропроцессора

Выполняется МП обычно на одном кристалле (чипе — *chip*) в виде СБИС, которая содержит следующие основные функциональные блоки.

1. Арифметико-логическое устройство (АЛУ). Для большинства МП входящие в их состав АЛУ выполняют:

- арифметические сложение и вычитание;
- простейшие логические операции («И», «ИЛИ», «НЕ» и др.);
- операции сравнения чисел;
- поразрядный сдвиг цифрового слова вправо и влево;
- сложение с «1», вычитание «1» и некоторые другие действия.

2. Блок регистров. Ни одна арифметическая операция или логическое действие невозможны без временного хранения в регистре результатов вычислений или выбранного адреса некоторой команды. Любой регистр представляет собой совокупность запоминающих ячеек. Благодаря регистрам МП наделяется необходимой временной памятью. В зависимости от функционального назначения в блоке регистров различают регистры команд, регистры данных, вводимых в МП из внешних ОЗУ и ПЗУ, и другие их виды.

3. Устройство управления (УУ). Оно осуществляет управление всеми блоками МП, в том числе АЛУ и регистрами. УУ принимает вводимые в МП коды команд. Входящий в состав УУ дешифратор расшифровывает их и передает:

- в регистр команд для хранения в течение всего временного интервала исполнения команды;
- в АЛУ для осуществления процесса реализации заданного алгоритма (причем все элементарные шаги этого процесса контролируются и координируются УУ).

Команды, поступающие от УУ, представляют собой последовательность импульсов. Для выработки командной последовательности импульсов необходим генератор синхронизирующих импульсов. Такой генератор может

входить в состав УУ, или же для этих целей используется внешнее устройство.

4. Интерфейс. Это промежуточное звено между МП и внешними устройствами (ВУ). Его называют также **устройством ввода-вывода**. Интерфейсы стандартизованы (в том числе по типу разъемов, например USB), так как обеспечивают взаимодействие МП с внешними устройствами. Их назначение — преобразовать передаваемую информацию к виду, понятному приемной стороне, причем при передаче информации в обоих направлениях — от МП к ВУ и от ВУ к МП. Основными внешними устройствами для МП являются блоки ОЗУ и ПЗУ, без которых невозможно функционирование МП. Проводимые в интерфейсе преобразования относятся прежде всего к числу разрядов в слове (т.е. формату цифровых слов), а также к скорости их передачи.

Для взаимодействия с внешними устройствами МП имеет три входных разъема, выводы которых соединены с многопроводными внутренними магистральями — шинами (на рис. 21.21 условно представлены одним проводом). Классификация этих шин следующая:

- *адресная шина* (АШ) — по ней от МП передается код адреса либо запоминаящей ячейки внешнего ЗУ, либо одного из внешних регистров. Обращаем внимание на односторонность передачи информации по АШ — только от МП к ЗУ;

- *разрядная шина* (РШ) — сигналы по ней могут передаваться в двух направлениях, т.е. как от МП через интерфейс к ВУ, так и от ВУ к МП. Под внешними устройствами здесь подразумевается чаще всего ОЗУ и ПЗУ;

- *шина управления* (ШУ) — по проводам ШУ обмен информации происходит также в двух направлениях. Например, по ШУ от МП к внешнему ОЗУ или ПЗУ может передаваться сигнал чтения или записи информации из ячейки с адресом, переданным по АШ. Из внешних блоков в МП по ШУ могут поступать сигналы запроса о результатах проводимых в МП операций. От ВУ к МП при необходимости передается сигнал «сброса», т.е. перевода МП в исходное «нулевое» состояние [9].

Таким образом, на МП возложены весьма ответственные и сложные функции центрального решающего и управляющего органа. Но для выполнения поставленных задач к микропроцессору требуется подключить ряд внешних блоков, а именно:

- ЗУ обоих видов (ОЗУ и ПЗУ);
- внешнее интерфейсное устройство — устройство ввода-вывода (УВВ);
- генератор синхронизирующих импульсов (ГСИ);
- блок питания;
- устройство взаимодействия с оператором, например дисплей, и другие блоки.

В совокупности с микропроцессором перечисленные блоки образуют автономное устройство, которое называется микро-ЭВМ. На рис. 21.22 показана его блок-схема.

Находят применение вычислительные системы, в которых используются несколько МП. Такие системы называются **мультипроцессорными**. Они позволяют обрабатывать большой объем информации, и при параллельном способе обработки возможно увеличение их быстродействия [9, 14]. Быст-

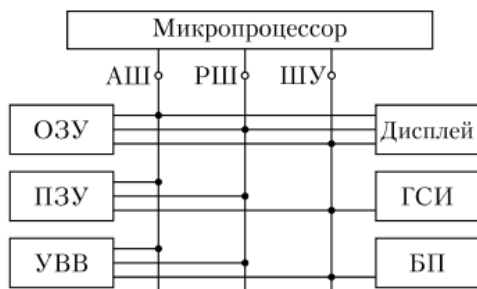


Рис. 21.22. Укрупненная структура микро-ЭВМ

родействие МП определяется его тактовой частотой, значение которой в настоящее время достигает нескольких гигагерц.

В памяти вычислительных систем хранятся и обрабатываются как единое целое цифровые слова, включающие, как правило, не менее восьми двоичных символов (двоичных единиц, или бит — *bit*, сокращение от *binary digit* — двоичное число). По этой причине за единицу хранения и обработки информации было принято восьмиразрядное двоичное цифровое слово, называемое **байтом** (*byte*, сокращение от *binary term* — двоичный терм). Следовательно, один байт (Б) равен 8 бит. Более крупные единицы измерения емкости ЗУ называются (по ГОСТ 8.417–2002):

- килобайт (КБ) = 2^{10} Б = 1024 Б = 8192 бит = 8,192 Кбит;
- мегабайт (МБ) = 2^{10} КБ = 2^{20} Б = 1 048 576 Б = 8 388 608 бит = 8,388608 Мбит;
- гигабайт (ГБ) = 2^{10} МБ = 2^{20} КБ = 2^{30} Б;
- терабайт (ТБ) = 2^{10} ГБ = 2^{20} МБ = 2^{30} КБ = 2^{40} Б и т.д.

Таким образом, *байт соответствует восьми, КБ — десяти, МБ — двадцати, ГБ — тридцати, ТБ — сорокаразрядному двоичному цифровому слову соответственно.*

21.7. Перспективные направления развития элементной базы сверхбольших интегральных схем

Развитие элементной базы в современной электронике происходит по двум основным направлениям.

1. Увеличение степени интеграции СБИС, снижение их энергопотребления и повышение функциональной сложности за счет перехода от планарной (2D) технологии производства МОП-транзисторов к объемной (3D) технологии.

2. Использование новых физических явлений (в том числе приборов с зарядовой связью) и материалов.

Остановимся подробнее на каждом из названных направлений.

21.7.1. Повышение степени интеграции и снижение энергопотребления сверхбольших интегральных схем

Энергопотребление МОП-транзисторов можно снизить за счет уменьшения размера и усовершенствования их структуры. Поэтому задача увеличения степени интеграции и снижения энергопотребления СБИС решалась и решается в настоящее время путем ужесточения так называемых

топологических норм. Под **топологической нормой** (ТН) понимаются минимально возможные размеры при изготовлении каждой отдельной области полупроводника с заданным типом проводимости. В диоде и тем более транзисторе таких областей несколько. Поэтому размеры этих элементов превышают ТН.

При ТН менее 100 нм в планарных (плоскостных) структурах полупроводника из-за неизбежного укорочения проводящего канала в МОП-транзисторах резко возрастает утечка части зарядов из канала в подложку. Уменьшить ток утечки удалось путем изоляции канала сток – исток от подложки тонким слоем специального диэлектрика с высоким значением диэлектрической константы (технология кремния на изоляторе). Новая технология позволила фирме Intel освоить в производстве СБИС микропроцессоров с ТН 45 нм в 2007 г. и 32 нм в 2009 г.

Одним из перспективных путей дальнейшего снижения ТН до 14–22 нм стал переход от планарной (2D) технологии изготовления МОП- и КМОП-транзисторов к объемной (3D) технологии. Такой переход оказался возможным лишь потому, что предварительно были тщательно изучены электромагнитные процессы в объемных транзисторах и построены соответствующие расчетные модели.

На рис. 21.23 показан один из вариантов транзистора с трехмерной структурой затвора. Канал сток – исток выступает над поверхностью подложки в виде плавника (как плавник акулы над водной поверхностью), а затвор охватывает его с трех сторон (как подкова). Объемный транзистор, представленный на рис. 21.23, получил название **полевой транзистор с плавником** (*field effect transistor – FinFET*).

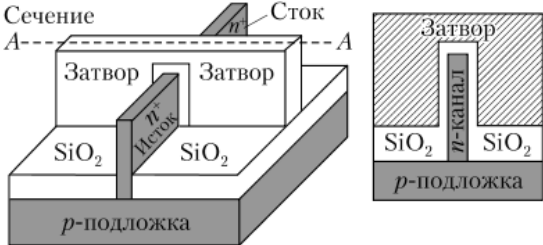


Рис. 21.23. МОП-транзистор с трехмерной структурой затвора и канала в виде плавника (FinFET):

а – общий вид транзистора; б – поперечное сечение (А–А)

Разновидностью объемного транзистора (см. рис. 21.23) является его трехплавниковый вариант, имеющий три выступающих над поверхностью подложки канала – плавника. Их охватывает общий (трехподковообразный) затвор. Такие транзисторы называются **трехзатворными** (*Tri-Gate*). В 2013 г. фирма Intel выпустила СБИС микропроцессора с применением трехзатворных объемных транзисторов. Важно отметить, что этот микропроцессор изготовлен по технологии с топологическими нормами (ТН) 22 нм [22].

В конце 2013 г. фирмами Altera и Xilinx объявлено о начале поставок нового поколения микросхем программируемой логики, выполненных по технологии с ТН 20 нм [26, 29]. Емкость ППВМ Virtex UltraScale фирмы Xilinx теперь *превышает 4 млн эквивалентных (простейших) логических ячеек!*

Фирмой Altera предполагается выпуск нового (десятой модификации) семейства высокопроизводительных СБИС программируемой логики Altera Stratix 10 по *революционной технологии Intel с топологическими нормами 14 нм* [27].

Переход на объемные транзисторы позволил понизить напряжение питания ППВМ до 2,5–3 В. Кроме того, дальнейшее снижение порогового напряжения новых полевых транзисторов $U_{\text{пор}}$ (уровня логической «единицы» на входе) является дополнительным способом уменьшения энергопотребления СБИС. В частности, фирма Intel поставила перед собой задачу понижения $U_{\text{пор}}$ до 0,3–0,5 В и уменьшения потребляемой энергии всей СБИС в нерабочем состоянии до уровня, не превышающего 1 мВт [22].

21.7.2. Фотоэлектронные преобразователи «свет – сигнал» на основе приборов с зарядовой связью

Ускоряющийся прогресс в области электронной элементной базы отразился практически на всех областях человеческой деятельности. Одно из ведущих мест здесь бесспорно принадлежит телевидению и разнообразным видеосистемам [2]. Вытеснение громоздких электровакуумных приборов (передающих телевизионных трубок и кинескопов) матричными преобразователями «свет – сигнал» и «сигнал – свет» явилось *революционным достижением микроэлектроники*. Среди современных фотоэлектронных преобразователей «свет – сигнал» в первую очередь следует назвать приборы с зарядовой связью (*charge coupled device*), сокращенно ПЗС (ССТ). Их входным сигналом является интенсивность светового потока (Φ), которая преобразуется в аналоговый уровень накопленного заряда в каждой ячейке ПЗС. Этот заряд перемещается к выходному устройству, в котором и происходит преобразование зарядов в выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$. Обращаем внимание на аналоговый характер $u_{\text{вых}}(t)$, так как в самом ПЗС осуществляется только дискретизация сигнала во времени (пространстве), но не производится квантование по уровню.

Принцип работы ПЗС можно пояснить на простейшей структуре в виде линейки или цепочки одинаковых ячеек, показанной на рис. 21.24, а. Полупроводниковая подложка p -типа покрыта тонким слоем прозрачного диэлектрика (SiO_2), на котором располагается цепочка электродов, выполненная из прозрачного проводника. Один элемент рассматриваемой линейки в укрупненном виде показан на рис. 21.25. Световой поток, направленный

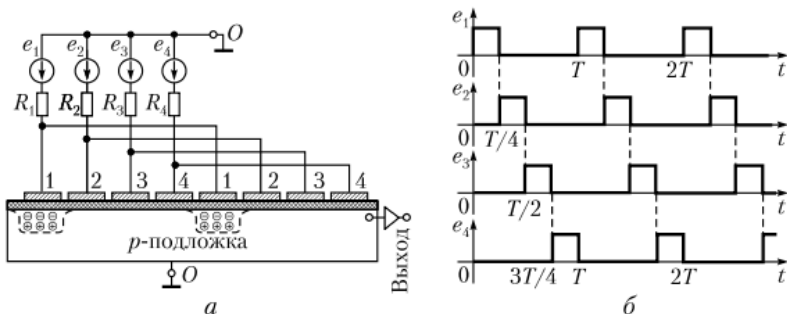


Рис. 21.24. Четырехфазные регистр сдвига (а) и последовательность управляющих импульсов (б)

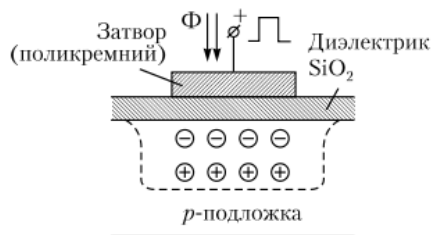


Рис. 21.25. МОП-конденсатор

перпендикулярно плоской поверхности электрода, через него и диэлектрическую прослойку попадает на подложку.

В отсутствие светового сигнала под действием положительного напряжения, поданного на один из электродов, основные носители заряда (дырки) откатываются вниз от электрода, а немногочисленные неосновные носители (электроны) притягиваются к поверхности полупроводника под электродом, где образуется область, обедненная носителями заряда (см. рис. 21.25). Элемент, показанный на рис. 21.25, называется **МОП-конденсатором**. Под воздействием луча света происходит дополнительная генерация электронно-дырочных пар, тем большая, чем интенсивнее световой поток. Образовавшиеся электроны направляются вверх к электроду, а дырки оттесняются от электрода вниз.

Таким образом, под электродом, на который подан управляющий положительный импульс, накапливается заряд из электронов, количество которых зависит от силы светового потока Φ . Можно утверждать, что в каждой ячейке ПЗС имеет место преобразование интенсивности света Φ в суммарный заряд электронов q . Этим заканчивается процесс записи данной информации в ПЗС.

Рассмотрим процесс считывания записанной информации. Он осуществляется путем последовательного перемещения накопленного заряда по цепочке очень близко расположенных друг от друга МОП-конденсаторов на выход ПЗС. С этой целью производятся одновременное снятие напряжения с данного электрода и подача его на соседний электрод, например справа. За счет этого накопленный заряд перетекает к «соседу» справа и т.д. Для исключения перемещения зарядов в противоположную сторону напряжение на соседние электроды слева одновременно не подается. Заряд с крайнего в линейке МОП-конденсатора поступает на вход расположенного рядом на том же кристалле истокового повторителя, осуществляющего преобразование заряда в выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$.

В рассмотренном примере ПЗС действует по принципу сдвигового регистра. В общем случае все электроды ПЗС и соответствующая им последовательность импульсов, управляющая процессом сдвига зарядов, разбиваются на группы из двух, трех, четырех, а иногда шести и восьми электродов (фаз). Для определенности рассмотрим четырехэлементные группы. Каждый из четырех электродов в группе подключается к своему источнику импульсной последовательности. Эти источники на рис. 21.24, б обозначены как $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $e_4(t)$. Эти последовательности импульсов сдвинуты друг относительно друга так, что образуют собой симметричную четырехфазную систему. Под воздействием такой совокупности управляющих им-

пульсов происходит последовательное считывание информации, начиная с ближайшей к выходу ячейки.

Качество (эффективность) переноса зарядов в регистрах сдвига на ПЗС в значительной степени зависит от неизбежно возникающих переходных процессов в их цепи управления, обусловленных наличием собственной емкости у каждой из фаз, межфазными емкостями, а также внутренним сопротивлением генератора импульсов управления. На рис. 21.26 приведена эквивалентная схема для расчета переходных процессов в цепи управления четырехфазной линейки ПЗС.

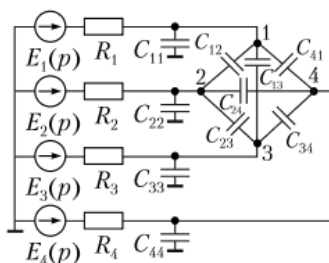


Рис. 21.26. Эквивалентная схема для расчета переходных процессов у четырехфазных ПЗС

В общем случае анализ переходных процессов в многофазных регистрах сдвига на ПЗС проведен в [18, 19]. В результате анализа выработаны рекомендации по выбору оптимальной формы управляющих импульсов, в том числе длительности их фронтов.

Линейные преобразователи «свет — сигнал» на ПЗС состоят из одной строки фоточувствительных элементов (фотодиодов) и регистра сдвига на ПЗС. Они широко применяются в различных сканерах, в том числе и в спектрональных сканерах при исследовании природных ресурсов Земли с помощью спутников [21].

Матричные преобразователи «свет — сигнал» на ПЗС. Такие матрицы включают в себя Z_a светочувствительных ячеек в столбце и N_a столбцов, т.е. светочувствительных ячеек в строке. Общее число активных светочувствительных элементов изображения, или пикселей, в матрице равно $X_a = Z_a N_a$. Пиксель (*pixel*) является сокращенной формой английского словосочетания *picture cell*, обозначающего наименьший элемент изображения, и часто используется как наименьшая единица при характеристике двумерного цифрового изображения. В инженерной практике пикселем называют также элемент схемы (ячейку), формирующий такое изображение. В настоящее время в матричных формирователях сигналов изображения число светочувствительных ячеек (пикселей) X_a достигает нескольких миллионов. Например, в цифровых ТВ-камерах стандартной четкости $Z_a = 576$, $N_a = 720$, а $X_a = Z_a N_a = 414\,720 \approx 0,4$ мегапикселей (Мп). В стандарте ультравысокой четкости (ТУВЧ) $Z_a = 4320$, $N_a = 7680$, а $X_a = 33,2$ Мп.

В последнее время в матрицах ПЗС, предназначенных для камер цветного телевидения, МОП-конденсаторы (см. рис. 21.25) в качестве светочувствительных элементов используются сравнительно редко из-за низкой чувствительности в синей части видимого спектра. Им на смену пришли фотодиоды, но функции переноса накопленных в фотодиодах зарядов, как и прежде, возлагаются на регистры сдвига, выполненные на ПЗС [2, 15, 17].

21.7.3. Фотодиодные матрицы с координатной адресацией

Фотодиодные матрицы относятся к матричным формирователям сигналов изображения с координатной адресацией, которая осуществляется генераторами горизонтальной и вертикальной разверток. Обычно в качестве генераторов разверток применяются регистры сдвига или же мультиплексоры, управляемые от генератора тактовых импульсов (ГТИ).

Один из вариантов структуры фотодиодной матрицы представлен на рис. 21.27, *а*. Она содержит N_a фотодиодов в каждой строке и Z_a — в каждом столбце, т.е. всего $M = Z_a N_a$ фотодиодов. Функция каждого фотодиода — преобразовать интенсивность падающего на него света в электрический ток соответствующий величины. Все остальные компоненты матрицы на рис. 21.27, *а* предназначены для считывания электрических сигналов с каждого отдельного фотодиода. Как ранее отмечалось, данная структура является адресной.

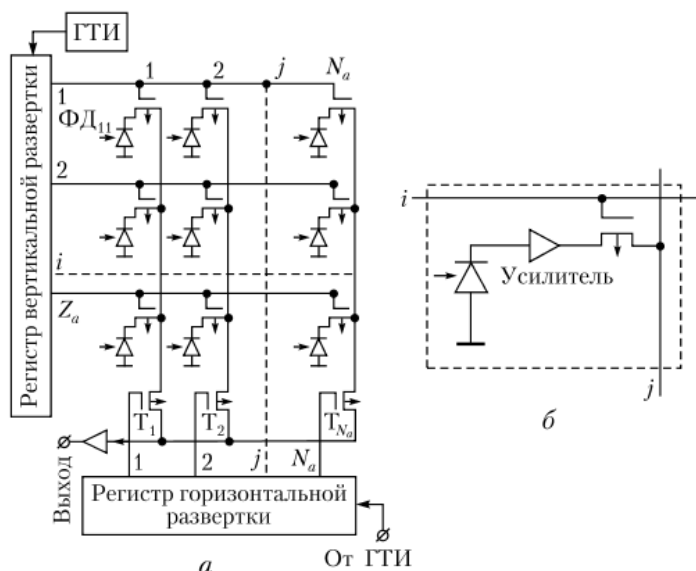


Рис. 21.27. Пассивная фотодиодная матрица с координатной адресацией (*а*) и структура активного пикселя (*б*)

Обратим внимание на следующие особенности схемы на рис. 21.27, *а*:

- затворы полевых транзисторов (ключей), принадлежащих одной строке, соединены между собой и подключены к одному из выходов регистра вертикальной развертки;
- стоковые концы каналов МОП-транзисторов, расположенных в одном столбце, соединены между собой и через канал сток — исток одного из транзисторов T_1, T_2, \dots, T_{N_a} подсоединены к выходу (через усилитель).

Конкретизируем условия, необходимые для считывания информации с заданного фотодиода, например с фотодиода $\Phi Д_{11}$ расположенного по адресу — первая строка, первый столбец. Для этой цели необходимо:

- а) обеспечение высокого потенциала на затворах полевых транзисторов первой строки подачей импульса напряжения на первую горизонтальную шину. Таким воздействием открываются каналы всех МОП-транзисторов первой строки;

б) подача высокого напряжения на затвор транзистора T_1 , при этом открывается его канал, соединяющий выход с первой вертикальной шиной.

Среди транзисторов, подключенных к заданной вертикали, открытым является только МОП-транзистор, включенный последовательно с ΦD_{11} . Поэтому образуется замкнутый контур, включающий в себя ΦD_{11} , канал упомянутого МОП-транзистора, вертикальную шину первого столбца, открытый канал транзистора T_1 и вход усилителя. Подаваемый на вход усилителя ток равен току, текущему через ΦD_{11} . Следовательно, сигнал на выходе усилителя $i_{\text{вых}}$ определяется этим током.

Последовательность считывания информации с фотодиодов зависит от воздействий, поступающих с регистров вертикальной и горизонтальной разверток. Обычно считывание происходит последовательно по строкам и столбцам.

Матрица на рис. 21.27, *а* называется **пассивной**. Ее главный недостаток заключается в том, что МОП-ключи, используемые для коммутации слабых сигналов с пассивных фотодиодов, вносят в выходной сигнал большие помехи (геометрический шум). Для улучшения отношения между полезным сигналом и помехами последовательно с каждым фотодиодом включили усилитель на полевых транзисторах (см. рис. 21.27, *б*). Полученная таким образом матрица стала называться **активной**.

Следующим шагом борьбы с помехами стало преобразование усиленного сигнала в цифровую форму сначала в каждом столбце [28], а затем и в каждой ячейке с помощью индивидуального АЦП [16].

В настоящее время активные фотодиодные матрицы и все необходимые для их работы блоки располагаются на одном кристалле СБИС. Такая СБИС уже может рассматриваться как законченная видеосистема (без объектива) [2].

Трехслойные фотодиодные матрицы. К перспективному направлению развития матричных формирователей сигналов изображения можно отнести разработку так называемых трехслойных матриц. Как известно, любое цветное изображение формируется путем наложения трех составляющих: красной (R), зеленой (G) и синей (B). Трехслойные матричные преобразователи позволяют создать одновременно компактно расположенные в пространстве три цветных матрицы — R , G , B . В них используется тот факт, что синяя (B), зеленая (G) и красная (R) составляющие падающего на кремниевую пластину светового потока проникают на разную глубину кремния. Наименьшая глубина проникновения — у синей составляющей, за ней следует зеленая составляющая, и, наконец, на самую большую глубину проникает в кремний красная составляющая. Поэтому на разной глубине кремния формируются три параллельные и независимые друг от друга фотодиодные матрицы для каналов R , G и B . Такие матрицы уже разработаны в нашей стране, а за рубежом даже достигли стадии серийного производства [23, 30].

Примером может служить трехслойная матрица Foveon X3 фирмы Foveon. Такая матрица используется в цифровых зеркальных фотоаппаратах японской фирмы Sigma Corporation. Общее число пикселей во всех трех слоях матрицы равно 14,06 Мп.

21.7.4. Матричные преобразователи «сигнал — свет»

Для отображения принятых телевизионных сигналов или же графической информации в мониторах, телевизорах и компьютерных дисплеях до последнего времени использовались электровакуумные приборы — кинескопы. Достижения современной микроэлектроники позволили отказаться от дальнейшего производства кинескопов, так как им на смену пришли более компактные матричные преобразователи «сигнал — свет». К ним относятся:

- плазменные панели, которые нашли ограниченное применение в мониторах и телевизорах с диагональю экрана обычно не менее 30 дюймов;
- жидкокристаллические матрицы, которые занимают доминирующее положение на рынке и широко применяются в мониторах, телевизорах и дисплеях самых различных размеров;
- светодиодные матрицы на основе светодиодов из органических материалов (OLED), которые находятся на завершающей стадии разработки и уже применяются в профессиональных мониторах [20, 25].

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите известные вам термины, применяемые для наименования электронных устройств, обладающих памятью.

2. Какие электронные устройства называются триггерами? Назовите их главные свойства. Из каких элементов выполняются триггеры?

3. Нарисуйте структурные схемы простейших триггеров на элементах «ИЛИ-НЕ» и «И-НЕ». Составьте их таблицы истинности.

4. Почему RS -триггеры на рис. 21.1, a , b называются синхронными?

5. Назовите главное функциональное отличие синхронного триггера от асинхронного на примере RS -триггера на рис. 21.4, a .

6. Как получить из синхронного RS -триггера (см. рис. 21.4, a) D -триггер? Сколько входов имеет D -триггер?

7. Назовите условия, при которых D -триггер (см. рис. 21.5) изменяет свое состояние на противоположное.

8. Как из D -триггера (см. рис. 21.5) получить T -триггер? Почему он называется счетным?

9. На вход T -триггера (см. рис. 21.6) подана последовательность прямоугольных импульсов, у которых частота следования $f = 10$ кГц. Какова частота импульсов на выходе на его выходах Q и \bar{Q} ?

10. Каким образом при помощи двухступенчатого RS -триггера типа $M-S$, показанного на рис. 21.7, a , решается задача разнесения во времени процессов приема информации и ее передачи на следующие каскады?

11. Как получить счетный триггер на основе RS -триггера типа $M-S$, показанного на рис. 21.7, a ? В чем главное отличие полученного триггера от T -триггера на рис. 21.6, a ?

12. Как получить из двухступенчатого триггера (см. рис. 21.6, a) JK -триггер? Обоснуйте его универсальность.

13. Каким образом превратить JK -триггер: а) в RS -триггер; б) в D -триггер; в) в T -триггер?

14. Назовите главное назначение функционального узла, называемого счетчиком.

15. Что понимается под модулем счета?

16. Поясните работу счетчика, изображенного на рис. 21.11, a . Покажите, куда подается последовательность импульсов, подлежащих счету. Каковы реакции триг-

геро́в Q_1, Q_2, Q_3 в паузе между: а) четвертым и пятым входными импульсами; б) пятым и шестым импульсами?

17. Как превратить суммирующий счетчик на рис. 21.11, а в вычитающий?

18. Какова функция регистра сдвига? Сколько входов имеет регистр сдвига? Каково их назначение?

19. Поясните работу регистра сдвига на рис. 21.12, а. Каким образом происходит считывание принятой информации? Что понимается под: а) последовательным кодом; б) параллельным кодом для считываемой информации?

20. Каковы функции цифрового узла, называемого оперативным запоминающим устройством (ОЗУ)?

21. Назовите виды запоминающих элементов, используемых при построении ОЗУ. По какому признаку ОЗУ делятся на статические и динамические?

22. Поясните принцип действия запоминающей ячейки на D -триггере на рис. 21.13. Каково назначение ее входов: $D_{\text{вх}}$; WE ; A ?

23. Поясните работу матрицы памяти с адресным доступом к ее ячейкам, изображенной на рис. 21.14. Каким образом осуществляются процессы: а) записи поступающей информации; б) считывания записанной информации?

24. Какого вида запоминающие элементы используются при построении динамического ОЗУ?

25. При помощи каких полупроводниковых элементов реализуются элементы памяти динамического ОЗУ на рис. 21.15?

26. Как происходят хранение, запись и считывание информации («1» или «0») в запоминающей ячейке на рис. 21.16, б?

27. Дайте определение постоянному запоминающему устройству.

28. Каковы требования к элементам памяти ПЗУ? Почему при построении ПЗУ не используются триггеры?

29. Поясните структуру матрицы памяти ПЗУ на рис. 21.17. Сколько элементов памяти включает каждая ячейка данного ПЗУ? Какова функция дешифратора?

30. Какие ПЗУ называются масочными?

31. Что такое перепрограммируемые ПЗУ (ППЗУ)?

32. Назовите основные технологические приемы, применяемые при изготовлении ППЗУ.

33. Назовите функцию программируемой логической матрицы (ПЛИМ).

34. Сформулируйте главную идею, лежащую в основе построения логической матрицы, выполняющей заданную логическую функцию $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

35. Каков алгоритм реализации дизъюнктивной формы логической функции y в ПЛИМ? Какие функции возлагаются на составляющие ПЛИМ матрицы «И» и «ИЛИ»?

36. Постройте матрицы «И» и «ИЛИ», необходимые для реализации функции $y = x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$ в ПЛИМ. Воспользуйтесь методикой, приведенной в параграфе 21.1.

37. Что понимается под программируемой логической интегральной схемой (ПЛИС)?

38. Дайте определение цифровому устройству, называемому микропроцессором.

39. Назовите основные блоки, из которых состоит микропроцессор, и выполняемые ими функции.

40. Какими устройствами (блоками) необходимо дополнить микропроцессор, чтобы получить автономную систему, называемую микро-ЭВМ?

Заключение

Бурное развитие микроэлектроники является одной из наиболее ярких примет начала XXI в. Трудно назвать сферу человеческой деятельности, которой не коснулся бы прогресс в области развития электронной элементной базы и сверхбольших интегральных схем. К его результатам следует отнести процессы взаимного проникновения и интеграции ранее четко разграниченных областей применения электронной техники. Ярким примером такой интеграции может служить объединение средств вычислительной техники, телевидения, мобильной телефонии и Интернета в устройствах под названием Smart-фон и Smart-телевизор, где приставка Smart переводится как «умный».

Разработка и внедрение в производство сверхбольших интегральных схем на основе объемных транзисторов позволяет пользователю программным путем построить на одном кристалле СБИС законченную цифровую систему.

Снижение топологических норм при изготовлении СБИС до 14–22 нм в настоящее время и до 5–10 нм в будущем можно рассматривать как начало нового направления в развитии микроэлектроники под названием **наноэлектроника**.

Основной чертой современного развития электронной техники является его лавинообразный характер: каждое достижение влечет за собой возникновение большого количества новых практических задач и проблем в смежных областях техники. Примером может служить проблема передачи нескольких цифровых телевизионных программ стандартной, высокой, а в будущем и сверхвысокой четкости по одному стандартному телевизионному каналу, что потребует разработки сложных кодирующих устройств.

Решение возникающих перед электронной промышленностью задач невозможно без объединения усилий специалистов в разных областях науки и техники. Немаловажная роль здесь принадлежит специалистам, которые владеют методами расчета и анализа процессов, происходящих в электронных схемах и устройствах. Обеспечение базовых знаний в названной области и является основной целью данного учебника.

Литература

Учебные пособия и монографии

1. *Батушев, В. А.* Микросхемы и их применение : справочное пособие / В. А. Батушев [и др.]. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Радио и связь, 1985.
2. *Березин, В. В.* Твердотельная революция в телевидении: Телевизионные системы на основе приборов с зарядовой связью, систем на кристалле и видеосистем на кристалле / В. В. Березин [и др.]. — М. : Радио и связь, 2006.
3. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учебное пособие для бакалавров / Л. А. Бессонов [и др.]. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2014.
4. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник для бакалавров / Л. А. Бессонов. — 11-е изд. — М. : Юрайт, 2013.
5. *Демирчян, К. С.* Моделирование и машинный расчет электрических цепей / К. С. Демирчян, П. А. Бутырин. — М. : Высшая школа, 1988.
6. *Марченко, А. Л.* Основы электроники : учебное пособие для вузов / А. Л. Марченко. — М. : ДМК Пресс, 2012.
7. *Миленина, С. А.* Расчет электронных схем. Семинары по курсу «Электротехника и электроника» / С. А. Миленина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МИРЭА, 2012.
8. *Миленина, С. А.* Теоретические основы электротехники. Установившиеся и переходные процессы в линейных электрических цепях : учебное пособие / С. А. Миленина. — 4-е изд. — М. : Изд-во МИРЭА, 2009.
9. *Миловзоров, О. В.* Электроника : учебник для бакалавров / О. В. Миловзоров, И. Г. Панков. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2013.
10. *Попов, Д. И.* Схемотехника аналоговых электронных устройств : учеб. пособие / Д. И. Попов. — Рязань : Изд-во РГРТУ, 2009.
11. *Прянишников, А. А.* Электроника : полный курс лекций / А. А. Прянишников. — 5-е изд. — СПб. : Корона ; М. : Бином-Пресс, 2006.
12. *Титце, У.* Полупроводниковая схемотехника : справочное руководство : пер. с нем. / У. Титце, К. Шенк. — 12-е изд. — М. : ДМК Пресс, 2008.
13. *Хоровиц, П.* Искусство схемотехники : пер. с англ. / П. Хоровиц, У. Хилл. — 7-е изд. — М. : Мир ; БИНОМ, 2011.
14. *Щука, А. А.* Электроника : учеб. пособие / А. А. Щука ; под ред. А. С. Сигова. — СПб. : БХВ-Петербург, 2006.

Статьи

15. *Костюков, Е. В.* Экспериментальная трехматричная камера ЦТ на ПЗС с числом элементов 580×532 // Е. В. Костюков [и др.] // Техника кино и телевидения. — 1981. — № 6. — С. 30–38.
16. *Манцветов, А. А.* Телекамеры на КМОП фотоприемниках / А. А. Манцветов, А. К. Цыцулин // Вопросы радиоэлектроники (Сер. Техника телевидения). — 2006. — Вып. 2. — С. 70–89.
17. *Миленин, Н. К.* Матричные преобразователи свет — сигнал и цветные ТВ-камеры на их основе / Н. К. Миленин // Техника кино и телевидения. — 1989. — № 11. — С. 64–69; № 12. — С. 67–73.

18. *Миленин, Н. К.* Переходные процессы в ключевых выходных каскадах генераторов импульсов управления ПЗС / Н. К. Миленин, С. А. Миленина // Техника кино и телевидения. — 1982. — № 10. — С. 50–53.

19. *Миленин, Н. К.* Расчет переходных процессов в цепях управления приборов с зарядовой связью / Н. К. Миленин, С. А. Миленина // Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. — 1982. — № 7. — С. 36–42.

20. *Самарин, А.* OLED-дисплеи: от мифов к реальности // Компоненты и технологии. — 2007. — № 2.

21. *Селиванов, А. С.* Многозональные сканирующие устройства на ПЗС для исследования природных ресурсов / А. С. Селиванов [и др.] // Техника кино и телевидения. — 1989. — № 11. — С. 50–53.

22. *Фомичев, В.* 22-нм технология от Intel / В. Фомичев // Время электроники [Электронный ресурс]. — URL: <http://www.russianelectronics.ru/leader-r/review/doc/59738>

23. Элементная база для телевидения высокой четкости // Тематическая подборка статей. — Электросвязь. — 2008. — № 8. — С. 29–47.

Интернет-ресурсы

24. Каталог «Импортные электронные компоненты» // Сайт компании Контест. URL: <http://www.kontest.ru/catalog/1844621>

25. Каталог семейства профессиональных мониторов фирмы Sony. OLED мониторы серии PVM и ЖК-мониторы серии LMD / Sony Corporation, 2011 // Сайт компании Sony. URL: <http://www.sony.ru>

26. Новое поколение микросхем программируемой логики, выполненных по технологии 20 нм — Virtex UltraScale // Сайт компании Xilinx. URL: <http://fpga.su>

27. Основные особенности нового семейства высокопроизводительных СБИС ПЛ Altera Stratix 10 // Сайт компании Altera. URL: <http://www.altera.ru>

28. Технологии будущего сегодня. «Exmor R» — Back-illuminated CMOS Sensors // Сайт компании Sony. URL: <http://www.sony.net>

29. Altera открывает эру 20 нм СБИС ПЛ с Quartus II v13.1 Arria 10 Edition // Сайт компании Altera. URL: <http://www.altera.ru>

30. Sigma SD15. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Sigma_SD15

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании
присылайте в редакцию
e-mail: red@urait.ru

**Новые издания и дополнительные материалы доступны
в электронной библиотечной системе «Юрайт»
biblio-online.ru**

Учебное издание

Миленина Светлана Александровна

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭЛЕКТРОНИКА И СХЕМОТЕХНИКА

Учебник и практикум для СПО

Под редакцией *Н. К. Миленина*

Формат 70×100¹/₁₆.

Гарнитура «Petersburg». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 32,42. Тираж 1000 экз. Заказ № 1922, 00 экз.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru